Zeitschrift: Die neue Schulpraxis

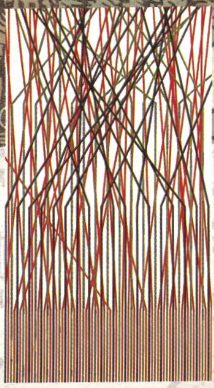
Band: 73 (2003)

Heft: 6-7

Heft

die neue schulpraxis

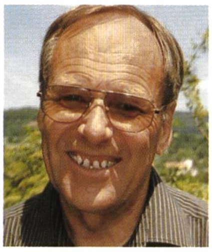
Juni/Juli 2003 Heft 6/7



Mathematik

eine Lernlandschaft

Dominik Jost
djost@schulpraxis.ch



Wenn ich in den Rechenlehrmitteln der Sechzigerjahre blättere, so lag der Schwerpunkt dort eindeutig auf dem Erwerb von Rechenfertigkeiten. Doch bereits damals wurden vielerorts Überlegungen angestellt, ob diese Ausrichtung auf rechnerische Fertigkeiten den Ansprüchen eines zeitgemässen Unterrichts genügen kann. Verantwortliche in den Lehrplan- und Lehrmittelkommissionen blickten nach Deutschland, um möglicherweise eine im Trend liegende Antwort zu finden. Verhalten schwappte die Mengenlehre auch auf die Schweiz über. Neu erschienene deutsche Lehrmittel wurden auf schweizerische Verhältnisse umgeschrieben und in Projektklassen getestet. Nach den ersten zaghaften Anfängen ging eine Welle von Reformbemühungen durch die Schweiz. Erste Koordinationsbestrebungen auf kantonaler, regionaler und gar auf schweizerischer Ebene wurden an die Hand genommen. Ein Grossteil der Lehrerschaft wurde in zahlreichen Lehrerfortbildungskursen mit den neuen Zielen und Inhalten eines zeitgemässen Mathematikunterrichts vertraut gemacht. Der Ausweitung des bisherigen Rechenunterrichts zu einem umfassenderen Mathematikunterricht lag die Zielsetzung zu Grunde, die Rechenfertigkeit durch die Rechenfähigkeit zu erweitern und zwischen den beiden die unumgängliche Balance zu finden. Die Umsetzung und die jahrelangen Anstrengungen der Unterrichtenden trugen Früchte und hatten, wie die PISA-Studie zeigte, auch Erfolg. Das gute Ergebnis darf jedoch nicht dazu verleiten, auf dem Erreichten auszuruhen. Der Mathematikunterricht benötigt auch heute wieder Impulse. Sie gehen in die Richtung von einem fächerübergreifenden Unterricht. Gedanken wie vernetztes Handeln und Denken, aktiventdeckendes Lernen müssen zentral werden. Für diese Art von Lernen muss auch eine entsprechende Lernumgebung geschaffen werden. Auf solche hinzuweisen, ist die Absicht dieser Themennummer. Möge sie auch Anlass sein, die methodische und didaktische Diskussion für einen modernen Mathematikunterricht zu aktivieren. Nur so werden die Schweizer Klassen in einer nächsten PISA-Studie vorderste Ränge belegen.

Impulse für den Mathematikunterricht

Titelbild

Diese Themennummer befasst sich mit Lernumgebungen, die auf den verschiedenen Stufen auf ein entdeckendes, fächerübergreifendes Lernen und ein vernetztes, eigenständiges problemlösungsorientiertes Denken hinzielen. Sie sollen auch dazu anregen, eigene Lernlandschaften zu schaffen und sie mit der Klasse zu erproben.

Idee der Lernlandschaften

Was sind Lernlandschaften? Wozu sind Lernlandschaften gut? Wie lassen sich Lerninhalte in Lernlandschaften umsetzen?

Dominik Jost

Lernlandschaften

Lernumgebung

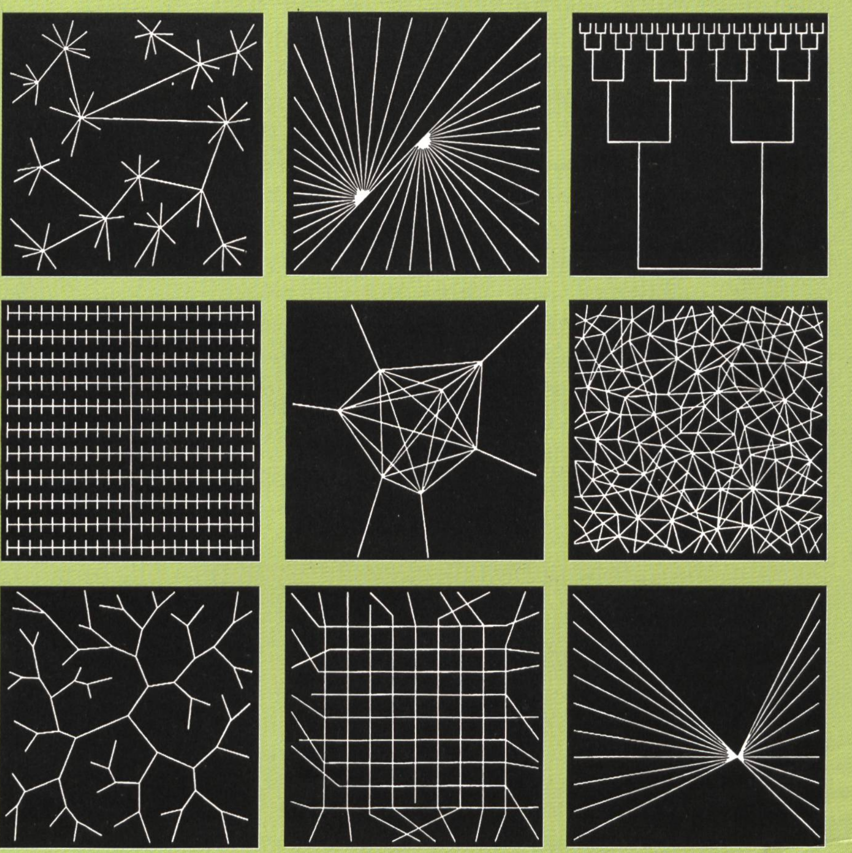
Ansprüche an den eigenen Unterricht in Bezug auf Individualisierung und Motivation sowie Forderungen nach sozialer Kompetenz, Binnendifferenzierung, Eigenverantwortung und Kreativität sind den Lehrkräften kaum fremd. Gleichwohl ist es keineswegs ein Leichtes, den Unterricht aus dem Stand der Wissensvermittlung herauszuheben und vermehrt auf das Lehren des Denkens auszurichten. Dabei geht es um Denken aus Neugier, um Denken als Entdeckungsreise. Einengungen durch die linearen Wege des Angepasstseins und Begrenzungen durch Fragen mit bereits vorgegebenen Antworten können dadurch aufgelöst werden. Was das tägliche Leben fordert, ist nicht beengendes, fachliches Denken. Erforderlich ist ein Denken in Bezügen, ein vernetztes Denken. Dazu muss jedoch eine Lernumgebung gestaltet werden, die Schülerinnen und Schüler in die Weite lockt und sie in Eigenverantwortung ihre Wege gehen lässt. Es müssten Lernumgebungen, eben Lernlandschaften geschaffen werden, in denen die Lernenden sich verlaufen und verirren können. Lernumgebungen, wo das Lernen zu einem Entdecken und Sich-Erinnern wird. Bekanntes soll sich dabei mit Neuem verknüpfen.

Vernetzung

Wenn es gelänge, Lernumgebungen zu schaffen, wo Netze ausgelegt werden, dann stünden Begriffe nicht mehr unverbunden auf den Lernwegen und einander im Wege. Möglicherweise könnte so das Lernen wieder etwas von seiner Ursprünglichkeit zurückgewinnen. Vielleicht würde dann die Verarbeitung und Festigung des Lernstoffs ausserhalb der Schule in Vernetzung mit der Realität möglich. So könnte dann auch das blosse Merken von unzusammenhängenden Fakten vermieden werden. Auf alle Fälle muss das ausschliesslich wissensvermittelnde, abstrahierte Lernen überwunden werden. Die tatsächlichen Vernetzungen und Wechselwirkungen müssen in den Lernprozess miteinbezogen werden. Diese Wechselwirkungen sind etwas Grundlegendes. Letztlich geht es um das richtige Begreifen unserer Welt mit allen ihren Mustern.

Lernlandschaften schaffen

Zur Schaffung von Lernlandschaften müssen Problemstellungen gefunden werden, die den Gegenstand des Lernens mit allen Sinnen des Organismus erfassen. Es sollen Problemstellungen sein, die reale Lernsituationen bieten. Es kommen Aufgabenstellungen vor, die faszinieren, zu Neugier anregen und die zu Erfolgserlebnissen führen. Das heisst, es wird statt nur mit Begriffen von Dingen, mit den Dingen selbst gearbeitet, mit ihren Wechselwirkungen und ihrer Beziehung zur Umwelt. Das Lernen wird zu einem Ganzheitserlebnis. Der Fächerkanon wird aufgebrochen. Ausgehend von vertrauten Elementen wird eine Lernlandschaft angeboten, die eine lernfreudige, entspannte Atmosphäre und den Kontakt zur Realität zulässt. Sie weckt Neugierde und lässt das Lernen für die Lernenden zur ureigensten Sache werden. Gewiss, dies schreibt sich so leicht. Wer sich schon an die Gestaltung einer ganzheitlichen Lernlandschaft herangewagt hat, weiss, wie viel schöpferische Leistung aufgebracht werden muss. Er kennt die damit verbundenen Ansprüche. Es gilt nämlich, weniger Wissen als vielmehr den Umgang mit dem Wissen zu vermitteln. Das bedeutet, die Fähigkeit zu lehren, wie Gelerntes umgesetzt, angewendet und beurteilt wird. Er weiss



Vernetzung

Die Lehrmittel von Klett und Balmer basieren auf den neusten methodisch-didaktischen Erkenntnissen und internationalen Forschungsresultaten. Sie werden von Schweizer Autorinnen und Autoren speziell auf Schweizer Verhältnisse abgestimmt und in Klassen erprobt. Die zusätzlichen rund 14 000 Titel aus anderen Klett-Verlagen machen das Sortiment von Klett und Balmer zum umfassendsten der Schweiz. Mehr darüber auf www.klett.ch oder im Newsletter «Rundgang». Zu bestellen im Internet oder unter 041 726 28 00.

Klett
SCHWEIZ

auch, welches Spektrum an eigener Erfahrung aus der Umwelt bereitstehen muss, damit sich die neuen Lerngegenstände in die bestehenden Denknetze einbauen können. Er hat auch erfahren, wie er selbst offen sein muss für die Ideen der Lernenden. Er hat aber auch erlebt, wie Lernen faszinieren sowie Freude, Begeisterung, Staunen und Spannung wecken kann.

Sowohl-als-auch

Weiterführung

Ein bedeutsamer Gedanke sei den Antworten vorangestellt: Die Lehrkräfte müssen sich nicht entweder für die obligatorischen Lehrmittel oder für die «Lernlandschaften» entscheiden. Es darf nie der Eindruck aufkommen, dass der bisherige Mathematikunterricht als wertlos oder verfehlt in eine Ecke abgelegt werde.

Denn vieles, was bisher unternommen worden ist, hat erst die anvisierte Ausweitung herausgefordert und möglich gemacht. Es ist deutlich geworden, dass Mathematik-Lernen mehr ist als ein Aufarbeiten von Regeln und Verfahren. Der Einsatz von Lernlandschaften ist erst dann sinnvoll, wenn erste mathematische Hintergründe und Zusammenhänge erkannt sind. Diese Einsicht in Beziehungen lässt sich selten über die Vermittlung von Regeln und Verfahren erlangen. Da ist der Umgang mit den Dingen selbst gefragt. Der kognitive Sprachgebrauch hat dies schon längst in seinen Wortschatz einbezogen. Manche Wörter, die im Zusammenhang mit Mathematik-Lernen verwendet werden, stehen mit Tätigkeiten der Hand, seltener mit denen unserer Füsse in Verbindung.

Begriff	be-greifen
Aufbau	auf-bauen
Entwicklung	aus-wickeln
Handlung	hand-eln
Verstehen	darauf-stehen
Fortschritt	fort-schreiten

Stilwandel

Angebot

Viel wird von didaktischer Erneuerung, zeitgemässer Anpassung, Entschlackung gesprochen. Zum einen kann dies bisherige Entwicklungen zum Stillstand bringen, zum anderen wird die Möglichkeit eröffnet, sich auf weitere Modelle des Unterrichtens zu besinnen. In einem Modell könnte beispielsweise der Anspruch realisiert werden, die Lerninhalte in einer ganzheitlichen und in einer fächerübergreifenden Perspektive zur Darstellung zu bringen. Das würde bedeuten, dass Lerninhalte einzelner Fächer zu einem Ganzen verknüpft und in der bereits geschilderten Form einer Lernlandschaft angeboten werden.

Vernetzung

Ziel ist es nicht, den Unterrichtsstoff, wie er beispielsweise in den Lehrplänen steht, abzudecken. Es geht vielmehr darum, Möglichkeiten aufzuzeigen, Verständnis für komplexe Wirkungszusammenhänge zu erlangen.

Vielfach erlebten die Lernenden den Unterricht als Abfolge oder Aneinander-

Vergleich der zwei Mathematikwelten

Mathematik-Didaktik konstruiert eine schulische Mathematikwelt.		In Real-Situationen der «Strasse» manifestiert sich eine arithmetische Welt der Kinder.
in kunstvoll hergestellten, isolierten Spielsituationen.	**Rechnen wird geübt**	in beziehungsvollen und kontextbelassenen Ernstsituationen.
nach einer Standard-Methode.	**Mathematische Operationen werden ausgeführt**	nach dem Prinzip des persönlichen Weges.
wenn das Schulbuch es vorsieht.	**Sachrechnen wird betrieben**	wenn es einen aktuellen Anlass gibt.
bieten Regeln und Lehrsätze an.	**Pädagogen**	vertrauen auf die mathematische «Erfindungskraft» des Kindes.
mechanischer Rechenauto«math».	**Die Schülerin und der Schüler werden gesehen als**	aktiv-entdeckender Lerner.

reihung von isolierten Fachveranstaltungen. Unser Umfeld liegt aber nicht in einzelne Fächer aufgeteilt vor. Die Ganzheitlichkeit ist nicht gegeben, wenn wir isoliert den sprachlichen, naturkundlichen, mathematischen Gesichtspunkt zur Betrachtung und Beschreibung heranziehen und hervorheben.

Das vernetzt angebotene Wissen schafft mehr Verbindungen im Gehirn und bleibt länger haften. Vor diesem Hintergrund ist fächerübergreifendes Arbeiten ein zeitgemässer Anspruch. Fächerübergreifendes Unterrichten lässt den Lernenden Raum zu eigenständigerem Arbeiten. Sie nehmen ihre Lernschritte selbst in die Hand und damit auch die Verantwortung für ihr Handeln und Lernen. Fächerübergreifendes und fächerverbindendes Unterrichten zieht auch die ausserschulischen Erfahrungen in den Lernprozess mit ein.

Veränderungen

Beinahe während zwei Jahrzehnten sind in den Kantonen immer wieder neue Lehrpläne für die einzelnen Fächer erarbeitet worden. Viele davon sind eingeführt oder bereits revidiert worden. Wenn man diese fächerspezifischen Lehrpläne und vor allem die allgemeinen Lernzielbestimmungen betrachtet, wird einem bewusst, wie viele Gemeinsamkeiten auftauchen. Gewisse Wiederholungen sind oft von Vorteil und können als Vertiefung angesprochen werden. Es zeigen sich aber auch Querverbindungen, die verstärkt in den Vordergrund gerückt werden müssen. Auch von diesem Gesichtspunkt her ist fächerübergreifender Unterricht gefragt. Damit werden auch die Voraussetzungen für ganzheitliches Unterrichten geschaffen. Auch dafür wiederum müssen entsprechende Voraussetzungen und Rahmenbedingungen geschaffen werden. Dieser Auftrag geht in erster Linie an die verantwortlichen Behörden und Gremien.

Eine solche Veränderung könnte beispielsweise geschehen durch Aufbrechen des Stundenplantaktes, durch Schwerpunktbildung in der Aus- und Fortbildung, durch Schaffung von Handreichungen und Materialien oder durch den Entwurf zeitgemässer Lehrpläne.

Fundorte und Fundstücke

Schwierigkeit

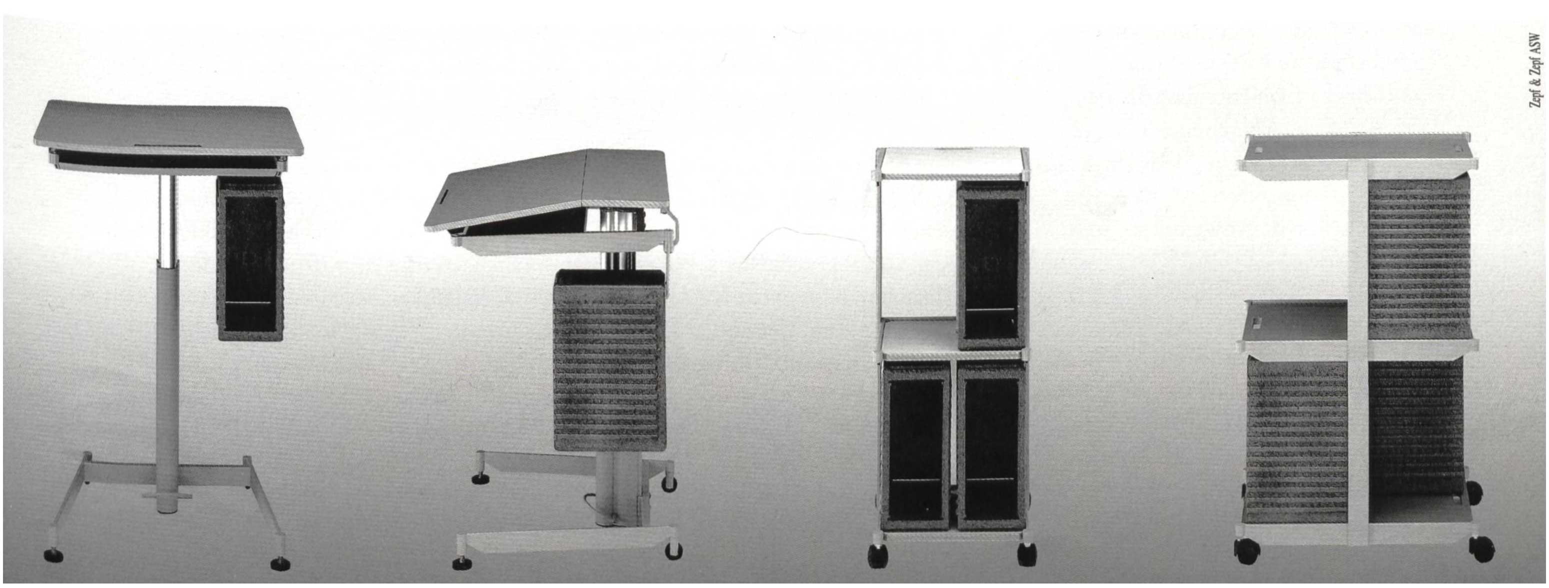
Beim Durcharbeiten von Bausteinen zu Lernlandschaften wird in Ausbildungs- und Fortbildungskursen immer wieder gefragt, wie der einzelne Lehrer und die einzelne Lehrerin eigenständig ähnliche Bausteine entwickeln könne. Mit dieser Frage drückt sich vielfach auch die vermeintliche Sorge des mathematischen Unvermögens und der zeitlichen Beanspruchung aus. Dabei ist ebenso herauszuspüren, dass die Lehrkräfte Hemmungen haben, in neue Erfahrungswelten aufzubrechen: «Und das auch noch!»

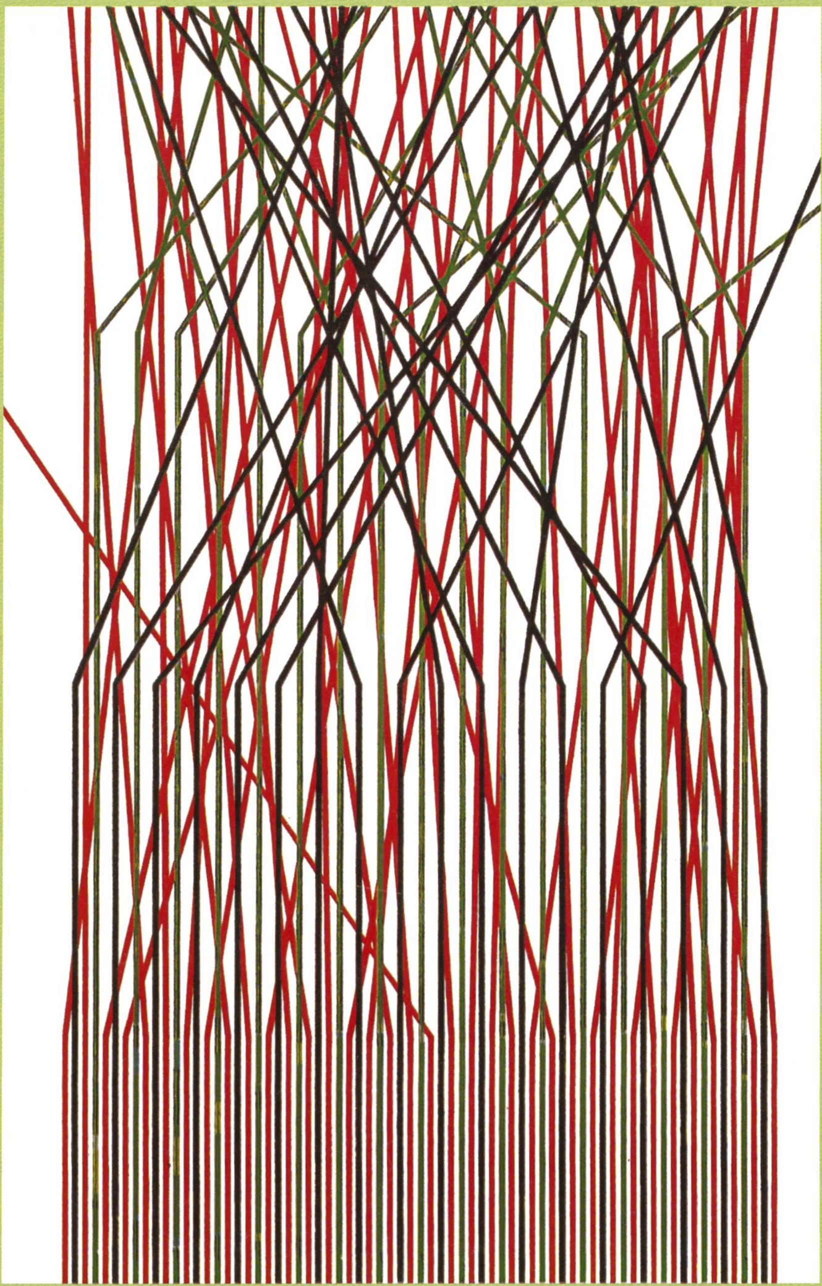
1. Fundort: Der Lehrende

Wie andernorts erwähnt, gibt es kein Entweder-oder sondern ein Sowohl-als-auch. In die weiteren Welten der Mathematik kann man sich mit kleinen Erfahrungen etappenweise vorwagen. Es soll zunächst ein Bewegen in einem Rahmen sein, wo man sich in Bezug auf die Vorgaben der Lehrpläne wohl fühlen kann. Jede Klasse bewegt sich in bestimmten Augenblicken über den Lehrplan hinaus. Dabei verknüpft sich vieles, was für das weitere Vorwärtsschreiten bedeutungsvoll ist.

Bereits die Bereitschaft, sich auf Neues einzulassen, öffnet Tore zu einer eigenen, vermutlich noch zugedeckten, ursprünglichen Mathematikwelt. Die Sinne werden wach für Ideen und Einfälle. Es ist ein Fokussieren auf die Sprache der Mathematik. Es wird von dem ausgegangen, was da ist. Man lässt sich die Zeit zu warten, was sich in der Interaktion mit anderen oder mit Dingen und Situationen aus unserem alltäglichen Umfeld entwickeln wird. Einen Keim dieser Fähigkeit trägt jeder in sich. Er müsste nur weiterentwickelt werden. Das bedeutet auch, fortzufahren, an sich zu arbeiten und sich zu entfalten. Dieser Weg muss ein freier Weg sein. Die Handreichung soll Denkanstoss und Anregung – einem Handlauf ähnlich – zu eigenen Wegen sein. Sie ist ebenso ein Mutmachen. Die Lehrerin oder der Lehrer soll in aller Gelassenheit die eigene Struktur des Suchens, des Erfindens, des Arbeitens mit den Kindern entwickeln. Diese soll der persönlichen Realität und der Klasse entsprechen. Das blosse Kopieren eines vorgegebenen Weges und ein Durchnehmen als Lehrgang in der Klasse würden dieser Absicht widersprechen.

Wenn ich als Lehrender für die Aufnahme von Impulsen für Lernlandschaften offen und bereit bin, dann werde ich spüren, wie reich das Umfeld an Anregungen ist. Es ist wichtig, diesen Strom der Wahrnehmung bewusst aufrechtzuerhalten. So können Gegenstände wie «Korb», «Schneeflecken»,





Wege führen überall hin – auch zu Fundorten

«Bergkette» oder Handlungen wie «Seilhüpfen», «Züngeln des Feuers», «Falten» mathematische Fragestellungen provozieren oder bekannte mathematische Sachverhalte wachrufen. Damit solche Elemente und Blitzgedanken nicht in Vergessenheit geraten, empfiehlt es sich, sie in Stichworten und Zeichnungen in einem Ideen-Skizzenbuch, z.B. «Powerbook», festzuhalten.

Ein Beispiel: Tabellen

Nachfolgend sei am Beispiel «Tabellen» dargestellt, wie sich dazu Fundstück an Fundstück aneinanderreihen kann. Mit der Zeit entwickelt sich eine vielfältige und schöpferische Lernlandschaft.

Als Lehrerin oder als Lehrer hat man im Lernfeld «Tabellen» im Laufe der Ausbildung einen recht hohen Abstraktionsgrad erreicht. Die Tabelle wird als Anordnung von waagrechten und senkrechten Linien aufgefasst, die Karos begrenzen. In diese Karos werden bestimmte Merkmale notiert.

Doch zuerst gilt es, den Ursprung zu entdecken. Der findet sich in der Anordnung von Pflastersteinen, Boden- und Wegplatten, in Mosaiken, an Häuserfronten und Gittern… Mit der Zeit kann man nirgends hingehen, ohne auf diese besondere Art der «Parkettierung» zu stossen. Die Sinne sind auf die Struktur «Tabelle» fokussiert. Ein gefülltes Skizzenbuch ist Ausdruck dieses schöpferischen Aufnehmens. Das Suchen ist jedoch noch keineswegs zu Ende. Die «Tabelle» tritt einem auch in Spielen entgegen. In Mustern sind die Karos farbig ausgefüllt, in einigen sind Zahlen eingetragen.

Die Addition der Zahlen in den Spalten und Zeilen wird greifbar. Plötzlich steht daneben die Frage: «Welche Bedeutung haben sie, was drücken sie aus?»

Der Schritt zu den Koordinaten ist nicht mehr weit. Mit ihrer Hilfe lassen sich Wege beschreiben. Schon kommt der Begriff des Vektors ins Spiel. Er steht im Zusammenhang mit der Bewegung in der Physik. Unterwegs tauchen gewiss die Flächenberechnungen und die magischen Quadrate auf. Es sei nun dem Leser und der Leserin überlassen, an diesen Fäden weiterzuziehen, sie miteinander zu verknüpfen und mit ihnen zu spielen. Es ist zu empfehlen, zwischendurch doch einmal einen Blick in den Lehrplan zu werfen und alles, was mit Tabellen in einem Zusammenhang steht, farbig zu markieren. Ist die eigenständig gefundene Lernlandschaft «Tabelle» nicht flexibler, kreativer und vor allem persönlicher? Sie ist jedenfalls ursprünglicher und unmittelbar an den Dingen selbst!

Die Umsetzung

Der Weg zur Unterrichtsgestaltung ist nun frei. Man kann auswählen, weil die Struktur erkannt, ein Stück weit ausprobiert ist und Erfahrungen damit gemacht worden sind. Die Dinge rundherum waren Katalysatoren. Die eigene Intuition entfaltete sich und sie unterstützte die Wahrnehmung der Vielfältigkeit. Auch Fundstücke in Büchern – nicht nur in Mathematikbüchern –, in Zeitschriften (Inseraten), auf Kunstkarten und Aufschriften können weitere Bausteine für die Schaffung von Lernlandschaften oder Ergänzungen dazu sein.

2. Fundort: Die Lernenden und die Klasse

Es erstaunt immer erneut, wenn man sich bewusst wird, welches gedankliche und sprachliche Begriffsnetz Kinder in ihren ersten Lebensjahren aufbauen. Dies vollzieht sich ohne jede gezielte Anleitung, ohne einen linearen Lehrgang. Es erstaunt, dass ein Kleinkind, das kaum stehen kann, nach Gegenständen greift, alles be-*greifen* will. Man spürt, dass ohne das körperliche Hantieren ein geistiges Be-*greifen* nicht zur Entwicklung kommt. Es sind somatische Vorerfahrungen, zusammen mit der angeborenen Neugier und der Freude an Ent-*deckungen,* die in den Kindern die Begriffswelt ent-*stehen* lassen.

In den ersten Schuljahren ist davon meist noch viel zu spüren. Für viele Lehrkräfte stellt sich die Frage, warum sich die Ent-*wicklung* im Lauf der Schulzeit nicht in gleichen Massen fort-*setzt* und weiterent-*faltet.* Man muss in die mathematische Welt der Kinder hineinhören und an ihr anknüpfen, damit der lehrgangsmässig gesicherte Unterricht nicht verloren daneben steht. Dieses Wissen darum bedeutet nun keineswegs, dass damit Ansprüche oder Voraussetzungen für den Zeitpunkt des Schuleintritts verbunden sind. Wenn nun ein Kind im Haus Nr. 15 wohnt, ist ihm diese Zahl um einiges vertrauter als die 7, die das Schulbuch bietet. Auf ähnliche Weise verbindet sich viel Persönliches mit mathematischen Begriffen. So erhält auch die mathematische Welt der Kinder eine persönliche Struktur, auf die es einzugehen gilt. Sie zu entdecken und zu erschliessen, kann zu neuen Einsichten verhelfen. Sie bringt auch manchen Gewinn. So wie die Kinder eine Sache als Ganzes angehen, muss auch der Unterricht als Ganzes erfahrbar gemacht werden. So geht der Sinn, der im Ganzen liegt, nicht verloren. Ganzheitliches Unterrichten nimmt also all jene Alltagserfahrungen auf, in welchen die Kinder Zahlen und Grössen mit dem ganzen Netz der Verknüpfungen begegnen. Sie werden in die Mathematik der Kinder integriert. Diese Mathematikwelt birgt ungeahnte Zugänge zu immer wieder überraschenden Fundorten. Man erfährt ein Stück wirklichen Lebens mit all seinem Schwung und ohne jede Zurückhaltung. Vertrauen ist nötig, dass Kinder diesen Weg zeigen können. Piaget hat in einer seiner Schriften den Satz geprägt, dessen Inhalt auch Kükelhaus in seinen Seminaren ähnlich zum Ausdruck gebracht hat:

«Verstehen heisst Wiedererfinden.»

Mit Verstehen ist auch Lernen gemeint. Denn erst, wenn ich etwas selbst erklären kann, wiedererfunden habe und wiedergeben kann, dann habe ich es verstanden.

Da die verschiedenen Mathematikwelten der Kinder näher zueinander stehen als zur durch und durch strukturierten Mathematikwelt der Erwachsenen, erfährt die Arbeit innerhalb der Gruppe oder der Klasse eine besondere Bedeutung. Dort, wo bei einem Kind der Weg des Entdeckens nicht mehr weiterführt, setzt ein Kind aus der Klasse die Idee fort und holt Neues hervor. Der Strom der Erfindungen wird durch das Miteinander aufrechterhalten. Es wird auch zum Teil vervielfacht: durch Zuhören, gegenseitiges Verstehen, Überraschungen und die Freude an neuen Ideen. Unterschiedliche Gesichtspunkte kreuzen sich und bringen neue Einsichten hervor.

Die Schülerinnen und Schüler sowie die Klasse sind immer wieder neu Fundort und schenken den Lernenden wertvolle Fundstücke für neue Lernlandschaften.

Das zentrale Thema des zweiten Schuljahres

Einführung der Multiplikation – eine spannende Lernlandschaft!

Die Einführung der neuen Operation Multiplikation ist nicht das Gleiche wie das Einführen und Auswendiglernen der einzelnen Reihen. Das Automatisieren der Reihen ist wichtig, steht jedoch am Schluss eines langen Lernprozesses. In dessen Verlauf werden die Kinder zuerst vertraut mit der neuen Operation und sie lernen nicht die Reihen «der Reihe nach», sondern erkennen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aufgaben aus verschiedenen Reihen, lernen Rechengesetze kennen und Rechenvorteile anwenden. In diesem Artikel behandeln wir bewusst die Einführung, welche im Unterricht einige Wochen in Anspruch nimmt, weil gerade sie eine wunderschöne Lernlandschaft ist.

Roland Keller und Beatrice Noelle Müller

1. Schritt: Einführung in die Multiplikation als neue Operation

Eine Zweitklässlerin erzählt: «Hier habe ich vier Bildchen in mein Album geklebt, und dann habe ich hier (auf der nächsten Seite) vier Bildchen eingeklebt, und dann hier (auf der nächsten Seite) nochmals vier Bildchen.» Diese Formulierung zeigt die typische Denkweise von achtjährigen Kindern und repräsentiert mathematisch gesehen die Addition (4+4+4).

Wenn wir Zweitklässlern die Multiplikation näher bringen wollen, müssen wir den Kindern eine andere Sichtweise zeigen: «Ich habe drei Mal vier Bildchen in mein Album geklebt.» Diese Formulierung hat eine andere Qualität, denn sie entspricht der Multiplikation (3·4).

Die Kinder lernen, vertraute Situationen unter einem veränderten Gesichtswinkel zu betrachten. Es gilt, den Blick für die neue Operation zu öffnen und die entsprechende Sprech- bzw. Denkweise zu trainieren.

Die Multiplikation soll nicht einfach als abgekürzte Schreibweise einer sukzessiven Addition verstanden werden, sondern einen eigenen, unabhängigen Charakter erhalten.

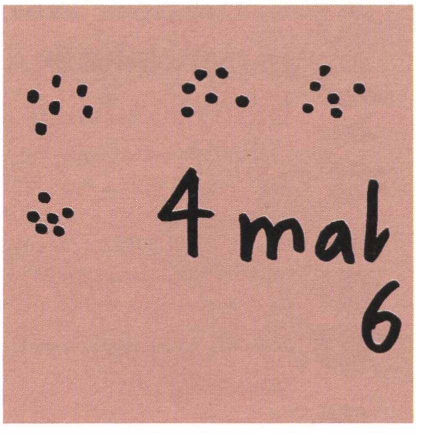
Die folgenden Unterrichtsvorschläge zeigen Wege auf, wie Schülerinnen und Schüler die Multiplikation als eigenständige Operation verstehen lernen können.

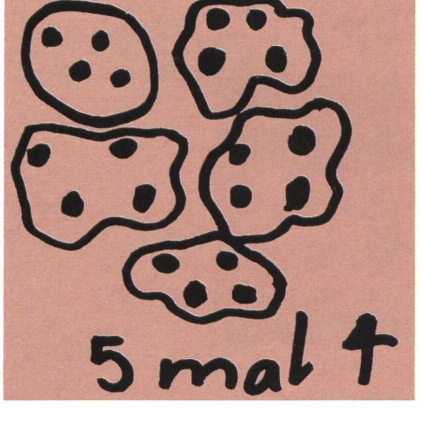
1·1-Handlungen und Protokolle

Ein Kind erhält den Auftrag, aus einem Korb mehrmals die gleiche Anzahl Kartonbatzen zu holen. Die Batzen legt es in Häufchen auf einen Tisch. Auch nach der Handlung kann dank der Anordnung der Batzen gesagt werden, was das Kind gemacht hat: «Du bist vier Mal zum Korb gegangen und hast immer acht Batzen mitgebracht.» Die Kinder führen nun solche mehrfachen Handlungen aus und zeichnen Protokolle dazu. Am folgenden Tag können diese Handlungen mit Hilfe der Protokolle in Erinnerung gerufen und interpretiert werden.

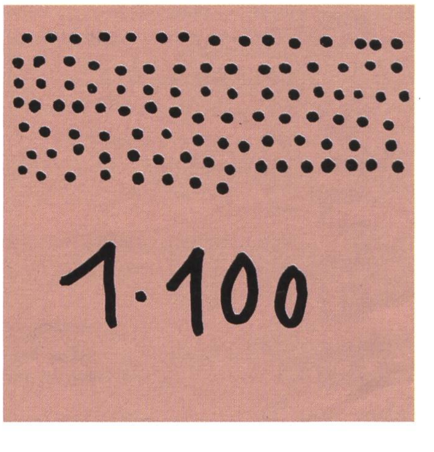
Mit dem Einmaleins-Fernrohr multiplikative Strukturen in der Umwelt erkennen

Um den Blick der Kinder für die neue Sichtweise zu schärfen, wird ein Einmaleins-Fernrohr gebastelt. Die





Protokolle von multiplikativen Handlungen



Mit dem 1·1-Fernrohr auf Entdeckungsreise.

1·1-Entdeckungen im Alltag

Im Supermarkt, zu Hause oder in Zeitungen und Zeitschriften suchen die Kinder nach multiplikativen Strukturen. Mit den gefundenen Bildern wird in der Schule ein Plakat gestaltet.

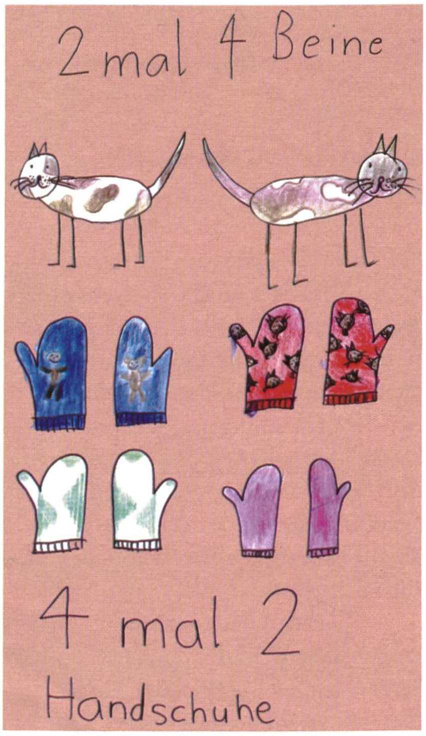
2. Schritt: Strukturen der Multiplikation erarbeiten

Von zufälligen Anordnungen zu Punktfeldern

In den folgenden Lektionen wird weiterhin daran gearbeitet, Handlungen mit Batzen zu protokollieren und diese Protokolle anschliessend zu interpretieren. Wenn die Kinder die Multiplikation als neue, eigenständige Operation verstanden und sich an die veränderte Sicht- bzw. Denkweise gewöhnt haben, ist es nicht

Kinder suchen rund ums Schulhaus und zu Hause nach Mengen, die in gleicher Anzahl mehrmals vorkommen: Das Schulhaus hat drei Mal vier Fenster, vor dem Schulzimmer stehen zwölf Mal zwei Schuhe usw.

Die gefundenen «Multiplikationsbilder» werden abgezeichnet. Das Resultat der Multiplikation ist in dieser Phase noch nicht wichtig. Einzelne Kinder werden es trotzdem schon aufschreiben. Das Erkennen von multiplikativen Strukturen steht im Vordergrund.



Mit dem 1·1-Fernrohr entdeckt:

5·5 Blütenblätter

2·10 oder 4·5 oder 5·4, je nach Sichtweise

7·8 Fensterscheiben

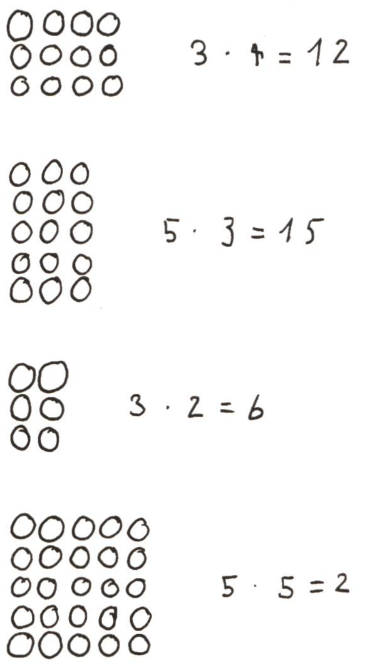
3 · 6 = 18

Multiplikative Strukturen im Supermarkt und in Katalogen, Zeitungen und Zeitschriften.

mehr nötig, jeweils die dazugehörige Handlung auszuführen. Die Kinder legen z.B. sechs Mal fünf Batzen, ohne dass sie die zugrunde liegende Handlung wirklich ausgeführt haben.

Durch ein Klassengespräch sollte ersichtlich werden, dass ein geordnetes Legen der Batzen als Punktefeld mehr Übersicht zulässt und hilft, die Anzahl schneller zu erfassen.

Zusammen mit der Klasse wird die Regel formuliert, dass Punktefelder zeilenweise zu lesen sind. Im ersten der folgenden Beispiele sind drei Reihen zu je 4 Batzen, also 3·4.



Kinder zeichnen Punktefelder und notieren dazu die entsprechende Multiplikationsaufgabe.

Geschichten zu Punktefeldern erfinden

Punktefelder sind abstrakte Darstellungen. Die ursprünglichen Handlungen können schnell in Vergessenheit geraten. Indem Kinder Punktefelder als «Protokolle» multiplikativer Vorgänge interpretieren, wird die Verbindung zwischen Handlung und symbolischer Darstellung gefestigt. Die Übung ist einfach: Zu einem vorgegebenen Punktefeld erfinden die Kinder Geschichten, die zur entsprechenden Multiplikationsaufgabe passen.

Beispiel: Auf dem Tisch liegt ein Punktefeld aus 5·2 Batzen. Dazu erfinden die Kinder Geschichten: «Ich habe fünf Mal zwei Fussbälle aus der Turnhalle auf den Pausenplatz getragen. Beim ersten Mal diese zwei, beim zweiten Mal diese zwei usw.»

Sobald Kinder Punktefelder als multiplikative Strukturen bzw. als Darstellungen von Handlungen interpretieren können, dienen solche Punktefelder als Hilfsmittel für weiterführende Untersuchungen.

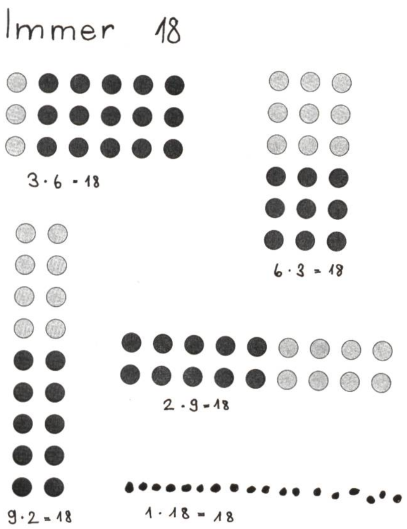
Arbeit mit Punktefeldern

Zu einer bestimmten Anzahl Batzen legen die Kinder möglichst viele Rechtecke und notieren die dazugehörigen Multiplikationen. Im nächsten Schritt schneiden sie die dazu passenden Punktefelder aus.

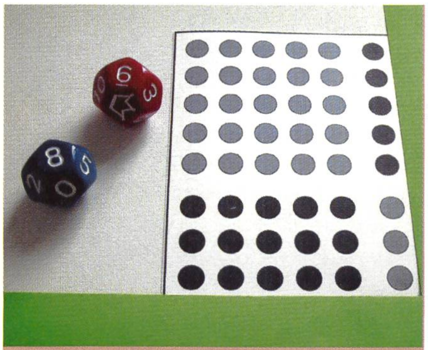
Arbeit mit Hunderterfeld und Malwinkel

In einem nächsten Schritt werden Punktefelder nicht mehr mit Batzen gelegt, sondern mit Hilfe des Malwinkels auf dem Hunderter-Punktefeld dargestellt.

Als Übungsform bietet sich eine Partnerübung an: Ein Kind würfelt mit zwei Zehnerwürfeln, das andere Kind stellt das entsprechende Punktefeld dar. Sind beide Kinder mit der Darstellung einverstanden, wechseln sie die Rollen. (Bei dieser Übung kommt bei einigen Kindern bereits die Frage auf, ob die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist oder nicht.)



Hinweis: Kopiervorlagen für Hunderterfelder und Malwinkel finden sich in den meisten Lehrmitteln, beispielsweise im Lehrmittel Mathematik 2 des Kantons Zürich oder im Zahlenbuch 2.



Mit Würfeln werden Multiplikationsaufgaben erzeugt und auf dem Hunderterfeld mit Hilfe eines Malwinkels dargestellt.

Punktefelder drehen – das Kommutativgesetz

Dass 8·3 und 3·8 das gleiche Resultat ergibt, ist für Multiplikationsanfänger keineswegs klar. Indem man Punktefelder dreht, wird diese Gesetzmässigkeit veranschaulicht und zum Thema gemacht.

Durchführen lässt sich das, indem man ein Punktefeld auf einen Karton legt. Man lässt die Kinder die Rechnung und das Ergebnis aufschreiben: 8·3 = 24. Dann dreht man den Karton um 90 Grad und sagt: «Merkwürdig, ich sehe die Rechnung 3·8, aber bei mir gibt das auch 24.» Nun müssen die Kinder erklären, warum beide Rechnungen zu demselben Ergebnis führen.

Rotiert man das Punktefeld um 45 Grad, so wird die Diskussion noch interessanter.

Aus quadratischen Punktefeldern entstehen Quadratzahlen

Es zeigt sich, dass quadratische Punktefelder immer zur gleichen Multiplikation führen, egal, wie man sie dreht. Die Kinder zeichnen verschiedene quadratische Punktemuster und notieren die dazu passenden Multiplikationen. Durch die Untersuchung aller möglichen Quadrate auf dem Hunderterfeld kommen die Schülerinnen und Schüler zu dem Punkt, wo die Lehrperson den Begriff der Quadratzahl einführen kann.

Punktefelder zerlegen – das Distributivgesetz

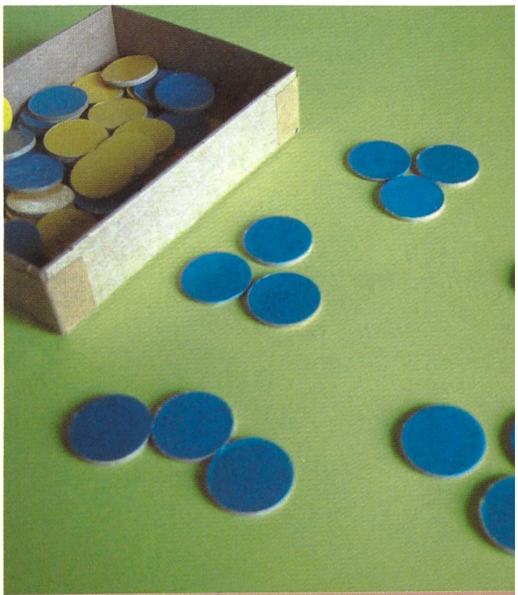
Deckt man einen Teil eines Punktefeldes mit einer farbigen Folie (zum Beispiel einem Klarsichtmäppchen) ab, entsteht eine Zerlegung.

Die beiden Teilaufgaben haben kleinere Resultate und sind deshalb leichter zu berechnen.

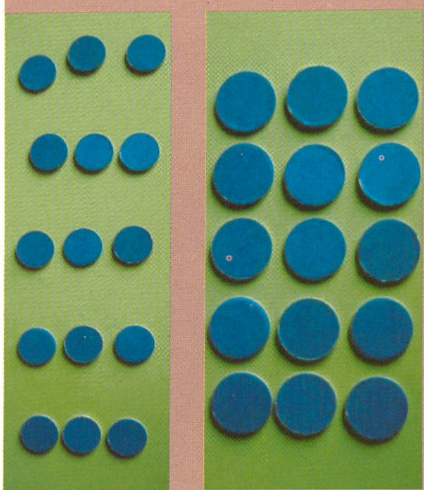
Wenn ich nicht weiss, was 8·7 gibt, kann ich das Produkt in die beiden Teilprodukte 5·7 = 35 und 3·7 = 21 zerlegen. So kann ich (noch) unbekannte Aufgaben auf bereits bekannte zurückführen.

Diese Technik wird später bei Multiplikationen mit grösseren Faktoren eine entscheidende Rolle spielen.

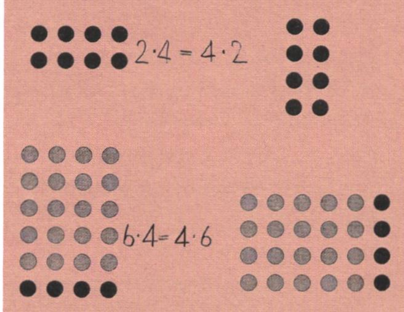
Zum Beispiel lässt sich die Aufgabe 23·40 zerlegen in 20·40 + 3·40. Werden solche Zerlegungen bereits bei der Einführung der Multiplikation thematisiert, gibt man den Kindern eine erste Möglichkeit, diese Rechengesetze zu verstehen, und zwar anhand einfacher Beispiele mit kleinen Zahlen.



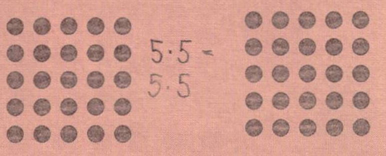
Von der zufälligen Anordnung...



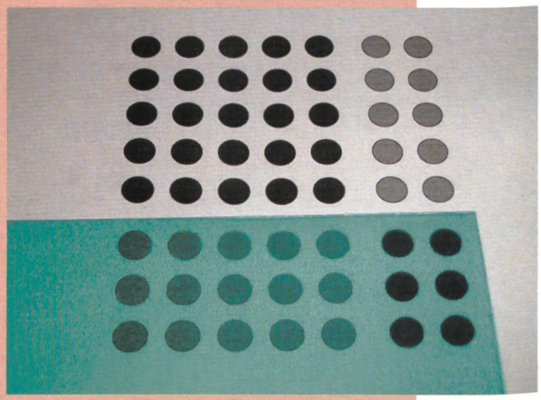
... zur strukturierten Anordnung und zum Punktefeld



Hier zeigt das Kind, dass es das Kommutativgesetz verstanden hat.



Beim Drehen eines quadratischen Punktefeldes verändert sich die Rechnung nicht.



8·7 wird zerlegt in 5·7 + 3·7

3. Schritt: Die 1·1-Reihen kennen lernen

Rechenwege beschreiben

Schwierige Aufgaben des Einmaleins lassen sich auf einfachere zurückführen. Werden solche Beziehungen vor oder bei der Einführung der Reihen thematisiert, hilft das Kindern, noch nicht automatisierte Resultate bei Bedarf wieder herzuleiten. So kann es auch Aufgaben, die wieder vergessen oder nicht auswendig gelernt wurden, lösen.

Verwandtschaften

Dasselbe Ziel verfolgt die nächste Übung. Zu einer 1·1-Aufgabe suchen die Schülerinnen und Schüler möglichst viele Aufgaben, die mit der vorgegebenen in Beziehung stehen: verwandte Aufgaben.

Reihen über Netzwerksbeziehungen aufbauen

Durch die beschriebenen Übungen ist der Weg für die Heranführung an die 1·1-Reihen vorgezeichnet. Die Kinder sind fähig, die Resultate der einzelnen

Je nach Sitzplatz sehen die Kinder zwei Mal vier oder vier Mal zwei Batzen. Wer hat Recht? Natürlich alle! Aber das muss zuerst diskutiert und verstanden werden!

Lieber Fabian

$12 \cdot 9$ ist eine schwierige Rechnung, oder?

Nein!

Warum nicht?

Weil ich $10 \cdot 9$ weiss, es gibt 90 und dann weiss ich auch $11 \cdot 9$ und das gibt 99 und dan weiss ich auch $12 \cdot 9$ und das gibt 108.

Fabian erklärt, wie er ein unbekanntes Resultat herleiten kann.

Lieber Simon

Kannst Du mir erklären, warum Du die Rechnung $8 \cdot 5$ so bubileicht findest?

Ich finde die $8 \cdot 5$ Rechnung So Leicht, weil ich so ausrechne wen ich $8 \cdot 5$ habe dan Rechneich das so aus $8 \cdot 10$ dan die helfte.

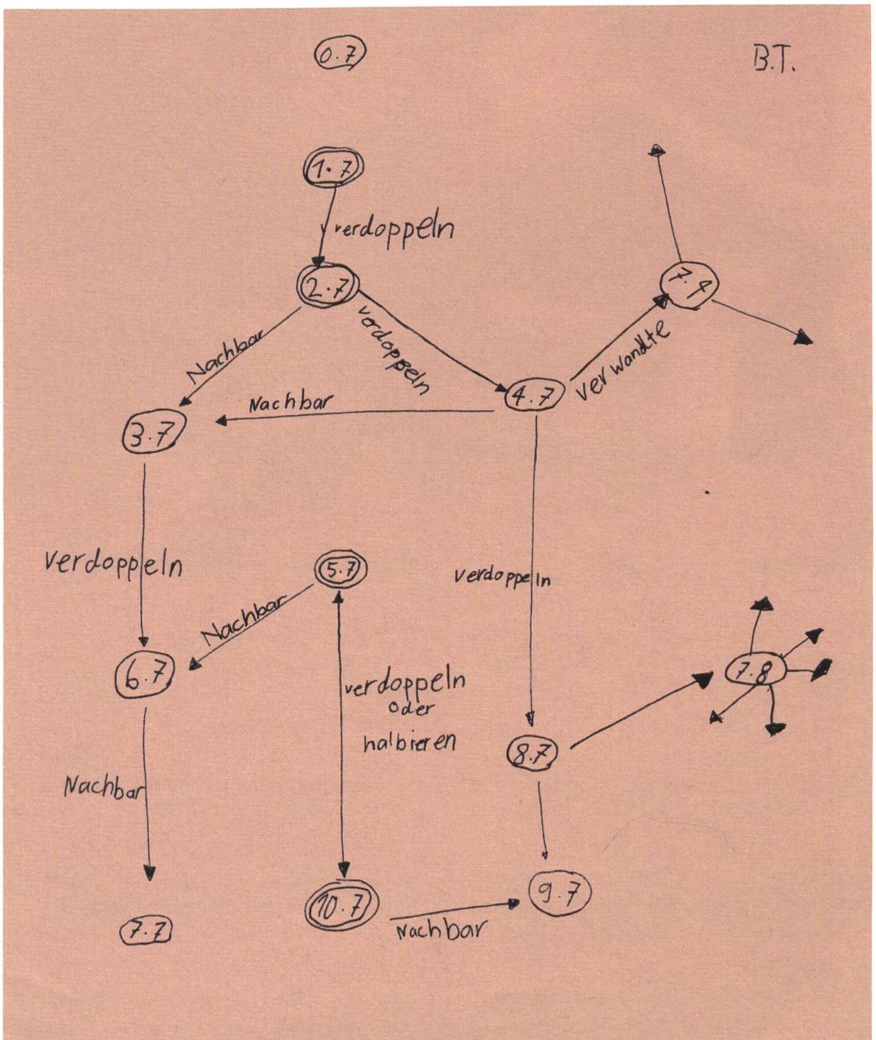
$8 \cdot 10 = 80$

die Helfte ist $8 \cdot 5 = 40$

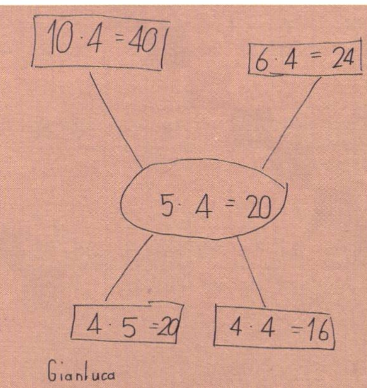
Warum nimmst Du die Hälfte?

weil 5 die Hälft ist von 10.

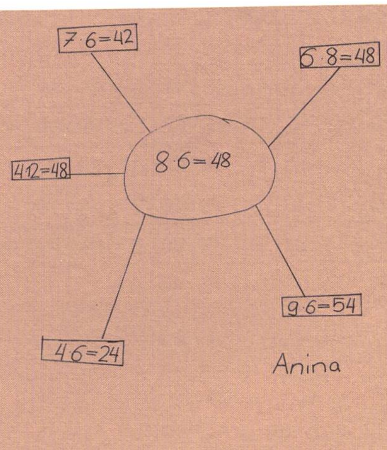
Zusammenhänge verstehen heisst, fähig sein, Unbekanntes auf Bekanntes zurückzuführen.



Die Siebenerreihe: Aufgebaut über Netzwerkbeziehungen



«Die Aufgabe 5·4 hat viele Verwandte. Zeichne möglichst viele dieser Verwandtschaften auf.»



Die Verwandten der Aufgabe 8·6

1·1-Aufgaben mit Hilfe der erarbeiteten Netzwerksbeziehungen bei Bedarf auszurechnen.

Das Grundgerüst einer einzelnen Reihe bilden die jeweils einfachsten Aufgaben: Die Multiplikationen mit 0, 1, 2, 5 und 10. Je nach Autor heissen diese zentralen Aufgaben Schlüssel-, Königs-, Merkaufgaben oder ähnlich.

Muster auf der Hundertertafel

Auf der Hundertertafel werden die Ergebnisse verschiedener Reihen markiert. Die entstandenen Muster werfen Fragen auf. In der Diskussion suchen Kinder nach Begründungen.

Beispielsweise kann ergründet werden, warum die Ergebnisse der Neunerreihe eine Treppe bilden.

Verwandte Reihen werden mit verschiedenen Farben markiert.

4. Schritt: Automatisieren der 1·1-Reihen

Das zentrale Thema in der zweiten Klasse ist die Einführung der Multiplikation. Das Automatisieren der 1·1-Reihen gehört nicht in die Einführungsphase und muss erst am Ende des 3. Schuljahres abgeschlossen sein (➨ siehe Kasten).

Beim Automatisieren sind Übungsformate zu bevorzugen, welche die oben beschriebenen multiplikativen Strukturen ausnützen.

Das Thema dieses Beitrags war die Einführung der Multiplikation als Lernlandschaft. Eine Besprechung der nachfolgenden Phase des Automatisierens würde den Rahmen dieses Artikels sprengen. Wir beschränken uns daher auf eine Übungsform.

Das Reihen-Klavier

Das Kind nennt zuerst die Schlüsselaufgaben (hier $1·8 = 8$, $2·8 = 16$, $5·8 = 40$ und $10·8 = 80$) und klappt die entsprechenden Ergebnisfelder auf. Nun berechnet es die Nachbaraufgaben mittels der entsprechenden Beziehungen (z.B. $9·8 = 80–8 = 72$). Das macht das Kind so lange, bis die ganze Reihe offen daliegt.

Mit dem Reihen-Klavier ist jede Schülerin und jeder Schüler in der Lage, die Reihen allein und ohne Mithilfe von Erwachsenen zu trainieren.

Die Autoren

Beatrice Noelle Müller und Roland Keller sind Dozenten für Mathematikdidaktik an der Pädagogischen Hochschule Zürich.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die Ergebnisse der Neunerreihe bilden ein Treppe auf der Hundertertafel. Warum?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Mögliche Erkenntnisse aus dem Vergleich der beiden Reihen: «Jede zweite Zahl der Dreierreihe gehört auch zur Sechserreihe.» «Die Zahlen der Sechserreihe sind die geraden Dreierzahlen.»

Literatur

- M. Döbeli / L. Kobel, Der Einstieg ins kleine 1x1, Die Grundschulzeitschrift 121/1999.
- Patricia Kündig, Die Einmaleins-Brille.
- H. Radatz et al., Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr, Schroedel 1996.
- Christoph Selter, Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht, Grundsätzliche Bemerkungen und Unterrichtsbeispiele zum Einmaleins, Arbeitskreis Grundschule 1995.
- E. Ch. Wittmann / N. Müller, Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Klett 1994.

Ein Blick in die Lehrpläne

Aus der Vielfalt der Lehrpläne hier zwei Beispiele:

Lehrplan des Kantons Zug:
2. Klasse: Das kleine Einmaleins aufbauen.
3. Klasse: Das kleine Einmaleins können.

Lehrplan des Kantons Zürich:
2. Klasse: Einmaleinsfolgen: Durcharbeiten.
3. Klasse: Einmaleinsfolgen: Festigen.

Auch die Lehrpläne anderer Kantone unterstreichen, dass die Automatisierung erst nach einer langen Einführungs- und Aufbauphase beginnt.

In welches Museum gehen wir?

Einträge durch: «die neue schulpraxis», St.Galler Tagblatt AG, Fürstenlandstrasse 122, 9001 St.Gallen
Telefon: 071 272 72 15, Fax 071 272 75 29, schulpraxis@tagblatt.com

Ort	Museum/Ausstellung	Art der Ausstellung	Datum	Öffnungszeiten
Baden Im Roggebode 19 Tel. 056 200 22 00	**Technisches Museum** Elektro-Museum	**Wasserkraftwerk:** Altes Wasserkraftwerk Kappelerhof, Turbinenräder und Anlageteile **Elektrogeräte:** Telefone, Haushalt, Messtechnik	ganzes Jahr	Mi 14–17 Uhr Sa 11–15 Uhr oder auf Anfrage Eintritt frei
Basel Basel/Rheinhafen Kleinhüningen Tel. 061 631 42 61 Sekretariat: Tel./Fax 061 631 42 65	Ausstellung «Verkehrsdrehscheibe Schweiz und unser Weg zum Meer» www.verkehrsdrehscheibe.ch	Schifffahrtsmuseum und Verkehrsträgerschau zugleich. Historische und aktuelle Schau über den Verkehrsträger Wasser, ergänzt durch die Verkehrsträger Schiene, Strasse, Luft.	März bis Nov. Dez. bis Febr.	Di bis So 10–17 Uhr Di, Sa, So 10–17 Uhr
Frauenfeld TG Freie Strasse 26 Tel. 052 724 22 19	Museum für Archäologie, Naturmuseum www.kttg.ch/museen	Natur und Archäologie unter einem Dach. Ein Erlebnis für Jung und Alt.	ganzes Jahr	Di bis So 14–17 Uhr Gruppen jederzeit Eintritt frei
Laufenburg Schimelrych 12 Tel. 062 874 42 70 062 874 11 63 Fax 062 874 42 70	**Rehmann-Museum** Ateliermuseum und Skulpturengarten www.rehmannmuseum.ch	Das Lebenswerk des Bildhauers Erwin Rehmann: von der Frau mit Kugel zu Familienformen, Raum- und Raumkörpern, Licht- und Eisenplastiken, Schnittplastiken, Raumgusstafeln und Acryl-Ereignisse	ganzes Jahr	Mi, Sa, So 14–17 Uhr Gruppen nach Vereinbarung mit Führung
Lenzburg Schloss Tel. 062 888 48 40	**Historisches Museum** Aargau www.ag.ch/lenzburg	Industriekultur im Aargau – eine Ausstellung im Rahmen des Jubiläums 200 Jahre Kanton Aargau (ab 18. Mai) Wohnmuseum, Gefängnis, Kindermuseum Café mit Shop, animierte Waffenschau, museumspädagogisches Angebot	1. April bis 31. Okt.	Di bis So 10–17 Uhr montags u. 11. Juli geschlossen
Pfahlbaumuseum Unteruhldingen (zwisch. Überlingen und Meersburg) Tel. 0049 7556/8543 Fax 0049 7556/5886	**Freilichtmuseum** für Jungsteinzeit und die Bronzezeit	In 20 Pfahlbauhäusern wird die Welt vor 5500 und 3000 Jahren lebendig. Seit 2002 neues Dorf mit lebensechten Szenen aus dem Alltag. Nachbildung eines Hauses aus Arbon CH, grosses Tauchaquarium	Jan., Febr. März April–Sept. Okt. Nov.	So 10–16 Uhr Sa, So, feiertags 9–17 Uhr tägl. 8–18 Uhr tägl. 9–17 Uhr Sa, So, feiertags 9–17 Uhr
Schwyz Bahnhofstrasse 20 Tel. 041 819 20 64	**Bundesbriefmuseum** Geschichte zwischen Mythos und Wahrheit	**Bundesbrief 1291** und seine Biografie. Entstehung der frühen Eidgenossenschaft. PC-Station. Schuldokumentationen/ Führungen auf Voranmeldung. Eintritt für Schulklassen gratis. Wiese/Halle für Picknick.	ganzes Jahr	Di bis Fr 9–11.30/13.30–17 Sa + So Mai–Okt. 9–17 Uhr Nov.–April 13.30–17 Uhr
Schwyz Hofmatt Tel. 041 819 60 11	**Musée Suisse** Forum der Schweizer Geschichte ForumSchwyz@slm.admin.ch www.musee-suisse.ch/schwyz Veranstaltungen	**Sonderausstellung:** 25. Mai bis 26. Oktober 2003 «Alpendüfte – eine Kulturgeschichte», mit Führungen und Workshops für die 3.–9. Klasse, Beratung und Anmeldung: 041 819 60 11 **Daueraustellung:** Das nationale historische Museum im Alpenraum zeigt die Kultur- und Alltagsgeschichte im Raum der heutigen Schweiz zwischen 1300 und 1800 … Geschichte und Kultur erleben! – mit Führungen, History Run und Vertiefungsprogrammen.	ganzes Jahr	Di bis So 10–17 Uhr

Ort	Museum/Ausstellung	Art der Ausstellung	Datum	Öffnungszeiten
Winterthur Technoramastrasse 1 Tel. 052 244 08 44	**TECHNORAMA** Das Schweizer Science Center E-Mail: info@technorama.ch Internet: www.technorama.ch	Naturwissenschaft und Technik auf spielerische, unterhaltsame und zugleich lehrreiche Weise erfahren: an über 500 interaktiven Experimenten über Licht und Sicht, Magnetismus, Mechanik, Wasser/ Natur/Chaos, Wahrnehmung u.a.m; Jugendlabor für Schüler ab 13 Jahren	ganzes Jahr	Di–So 10–17 Uhr An allg. Feiertagen auch montags geöffnet. Gruppenbesuche ohne Anmeldung möglich, ausgenommen Jugendlabor an Vormittagen

Den Würfel ins Lernen bringen

Würfel

Würfel bezaubern uns. Wenn ein Würfel auf dem Tisch liegt, findet man es fast unmöglich, ihn nicht in die Hand zu nehmen. Vielleicht schon wegen der Form. Der Würfel verbindet uns mit der tiefsten Vergangenheit der Menschen. Bestimmt war ein kleiner Kubus eines der ersten *nicht* natürlichen Dinge der Welt. Lassen wir uns wieder einmal auch von der mathematischen Seite des Würfels bezaubern.

Dominik Jost

Mit dem Würfel in der Hand...

Zauber des Würfels

Seit frühester Kindheit ist uns der Spielwürfel vertraut. Wenn ein Würfel auf dem Tisch liegt, bedarf es einiger Überwindung, ihn nicht in die Hand zu nehmen. Haben wir uns auch schon einmal gefragt, weshalb vom Würfel ein solcher Zauber ausgeht?

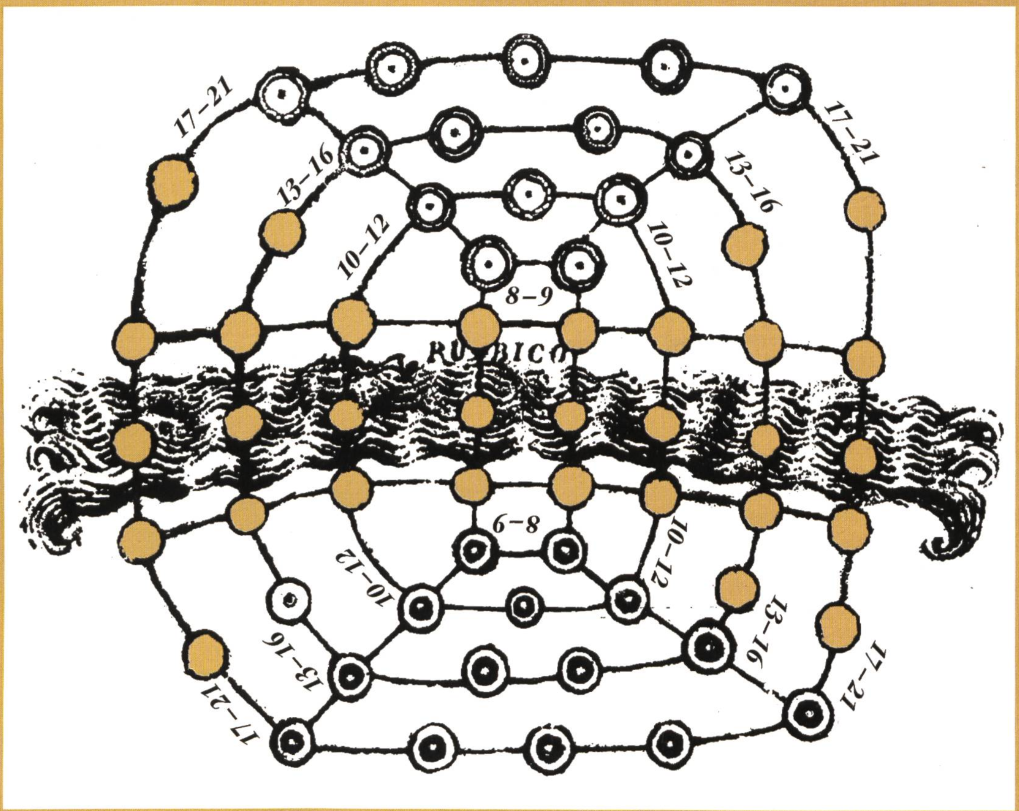
Seine Geschichte reicht in die tiefste Vergangenheit der Menschheit. Welches Volk hat ihn wohl zum ersten Mal gebraucht, ihn vielleicht aus einer kleinen gerollten Lehmkugel zum Kubus gepresst und seine Seiten markiert? Forscher vermuten, dass dies vor mehr als 100 000 Jahren geschehen ist. Ein erstes Stück Kulturgeschichte nahm damit seinen Anfang. Es ist auch ein Stück Geschichte des Denkens. Der Mensch hat damals etwas geschaffen, wofür er in der Natur kein Vorbild fand. Der Würfel war die erste von Menschenhand selbst geschaffene Gestalt. So weit wir die Geschichte des Würfels zurückverfolgen können, hat er das Schicksal der Menschen bewegt und bestimmt.

Schon früh wurde der Würfel auf seinen sechs Seitenflächen mit Bildern, Symbolen, Schriftzeichen oder Zahlen versehen. Die Menschen konnten ihn in Bewegung setzen und der Seite, die danach oben sichtbar war, eine ganz besondere Bedeutung zumessen. Die Menschen dachten, damit den Willen der Götter zu erfahren, die Zukunft vorherzusagen, Entscheidungen zu treffen. Der Würfel hat Geschichte gemacht.

Der Würfel ist geworfen.

Ohne den Würfel sähe die Weltgeschichte wohl anders aus. Vom römischen Kaiser Claudius wissen wir, dass er seine wichtigsten Entscheidungen oftmals vom Würfel bestimmen liess. Der von uns vielfach im übertragenen Sinne verwendete Ausdruck «Die Würfel sind gefallen» wird Julius Cäsar zugeschrieben. Als er während des

Spielplan des Rubikon



Krieges zwischen ihm und Pompeius vor der Entscheidung stand, den Fluss Rubikon an der Nordküste Italiens zu überschreiten, liess er die Würfel werfen. Doch schon dreihundert Jahre vor Christus war diese Redewendung im damaligen Griechenland bekannt, und zwar mit der Betonung auf «der Würfel falle».

Die Rubikon-Überschreitung von Cäsars Soldaten hat kurze Zeit später zu einem bei den römischen Legionären sehr beliebten Würfelspiel geführt.

Rubikon

Ähnlich wie auf der Abbildung (S. 20) wird vermutlich der Spielplan bei den römischen Legionären ausgesehen haben. Wir zeichnen ihn gross auf ein Blatt Papier. Das Spiel wird von zwei Feldherren ausgetragen. Sie nehmen Aufstellung auf beiden Seiten des Rubikons. Dabei gewinnt derjenige, der drei Legionen auf dem gegenüber liegenden Ufer aufstellen kann und drei gegnerische Legionen gefangen hält.

Die Feldherren stellen ihre Legionen (Steine, Plättchen, ... in zwei verschiedenen Farben) auf die mit Punkten gekennzeichneten Startfelder. Es wird reihum mit vier Würfeln gespielt. Ihre Augenzahlen ergeben eine Summe, nach der eine auf dem entsprechenden Felderring (8–9; 10–12: 13–16; 17–21) stehenden Legion um ein Feld versetzt werden kann. Dabei besteht kein Zugzwang. Wird eine Summe unter 8 oder über 21 erzielt, kann eine beliebige Legion verschoben werden. Steht eine Legion auf einer «Kreuzung», darf sie den Ring wechseln. Dazu muss im nächsten Wurf die Summe gewürfelt werden, die dem Ring entspricht, auf dem die Legion ihre neue Stellung eingenommen hat. Der Rubikon kann nur von einem der acht Brückenkopf-Felder im Fluss überschritten werden. Wenn er von einer Legion besetzt ist, kann über dieses Feld hinweg eine eigene Legion vom eigenen Ufer aus auf ein fremdes Feld am anderen Ufer übersetzen. Der gegnerische Stein ist dann verloren. Eine Legion kann jedoch ohne Brückenkopf aufs eigene Ufer zurückgezogen werden.

Zieht eine Legion auf einen von der fremden Legion gehaltenen Platz, wird diese durch Aufspringen gefangen genommen. Eine fremde Legion wiederum kann die entstandene Figur gefangen nehmen. Zwei gleiche Legionen können jedoch nie aufeinander stehen (aus «Die 7. Seite des Würfels»).

Lerninhalte

Spielwürfel, Spielplan, Felder;
Geschichte des Würfels

Lernziele

ALLGEMEINE

- Ein Stück Kulturgeschichte kennen lernen
- Die Idee des Spielwürfels erfassen
- Den Sinngehalt von Redewendungen erschliessen
- Spielstrategien entwickeln

FACHSPEZIFISCHE

- Spielanleitungen umsetzen
- Summen bilden

Didaktisch-methodische Hinweise

ALLGEMEINES

Wenn wir die Geschichte verfolgen, können wir uns auch die Frage stellen, wie weit die Schaffung des Würfels die Entwicklung der Mathematik beeinflusst hat. Bestimmt ist es der Anfang einer gelungenen Abstraktion. Die Weiterentwicklung des Würfels geht einher mit der Entwicklung des mathematischen Denkens. Interessant scheint auch der Bezug zum Übernatürlichen und zum Religiösen. In vielen Kulturen bildete die Mathematik eine Geheimwissenschaft und war vielfach der Priesterschaft vorbehalten. So übernahm der Würfel auch die Aussagekraft eines Orakels. Das drückt auch den Glauben aus, dass schon alles vorbestimmt ist.
Beim Nachdenken ist es bedeutsam, streng zwischen dem Orakel-Würfeln und dem Spiel mit Würfeln zu unterscheiden.

BESONDERE HINWEISE

Auf den legendären britischen Stammesfürst Artus geht das Spiel «Tafelrunde» oder Würfelturnier zurück. Nach der Überlieferung soll es so entstanden sein: Jeder Ritter der höfischen Tafelrunde wollte dem König am nächsten sitzen, um dem Zentrum der Macht ganz nahe zu sein. Dies führte unweigerlich zu Streitigkeiten. Im Bestreben um Einigkeit und Frieden setzte Artus schliesslich durch, dass die Sitzordnung jedes Mal aufs Neue ausgewürfelt wurde.
So nahm das neue Spiel seinen Weg hinaus in die Geschichte.
(Spielbeschreibung in: Buchenmatth, J.D.: Die 7. Seite des Würfels.)

Einen Haufen Würfel

sammeln

Aus dem Umgang mit Würfeln wissen wir, dass es ganz unterschiedliche Würfel gibt. Sie unterscheiden sich in Form, Farbe, Grösse, Verwendung, Material und Bezeichnung. Wir versuchen, etwas Ordnung in die Würfelvielfalt zu bringen. Dazu sammeln wir während einiger Zeit so viele Würfel wie möglich und bauen eine Würfelsammlung auf. Anhand dieser Sammlung sollte es uns gelingen, eine Würfelsystematik oder -ordnung zu entwerfen.

Bevor wir damit beginnen, müssen wir klären, was ein Würfel ist. Schauen wir dazu in verschiedenen Lexika nach. Wir werden bestimmt unterschiedliche Deutungen finden. Die eine Auslegung bezieht sich eher auf geometrische Gesichtspunkte (…von sechs Quadraten begrenzter Körper), die andere zielt auf die spielerische Verwendung (…Spielstein zum Entscheiden durch Zufall). Bei dieser Suche entdecken wir möglicherweise, dass der Wortsinn «Würfel» im Laufe der Jahrhunderte in unserer Sprache eine Wandlung erfahren hat.

Vielleicht stehen wir plötzlich vor der Frage, wie die Franzosen, Italiener, Spanier, Russen, … den Spielwürfel in ihrer Sprache bezeichnen: le dé, il dado, the dice …

Lange Zeit wurden nur Hexaeder, also Körper mit sechs Quadraten, als Würfel bezeichnet. Erst in den vergangenen drei Jahrzehnten wurde diese Bezeichnung auf alle Spielsteine erweitert, mit denen zufällige Entscheidungen getroffen werden können. Welche geometrischen Körper könnten darunter fallen?

sortieren

Vor uns liegen jetzt sicher Hunderte von Würfeln: kleine, rote, hölzerne, schwere, beschriftete, neue … Wir nehmen uns vor, in diese Sammlung Ordnung zu bringen. Dazu müssen wir zuerst Ordnungskriterien aufstellen. Solche könnten etwa sein: Farbe, Grösse, Aufschrift, Material, Verwendung. Eine andere Eigenschaft zur Unterscheidung könnte auch der Würfelinhalt oder -aufdruck sein: zum Beispiel Zahlenwürfel, Buchstabenwürfel, Farbwürfel, Symbolwürfel … Drehwürfel. Einige leidenschaftliche Sammler haben ihre Objekte nach Ordnungen, Familien, Gattungen und Arten unterteilt, ähnlich wie die Biologen in die Pflanzen- und Tierwelt Ordnung bringen. Ein solches Vorgehen nennen wir in der Mathematik «Klassifizieren».

Aufgrund unserer Würfelsammlung stellen wir eigene Ordnungskriterien auf. Gross tragen wir in eine Tabelle auf Packpapier diese Kriterien ein und stellen anschliessend die Objekte in die entsprechenden Kolonnen.

Finden alle unsere Spielwürfel ihren angemessenen Platz? Welche Kriterien sind in unserer Aufstellung nicht berücksichtigt? Könnten wir einen Spielwürfel gleichzeitig zwei Kolonnen zuordnen?

Durch Erweiterung oder Ergänzung unserer Tabelle können wir die Probleme und offenen Fragen angehen.

systematisieren

Eine Auflistung für Zahlenwürfel zeigt, wie umfassend eine Systematik, also eine Aufgliederung, aussehen kann.

1. Zahlenwürfel

1.1 Zahlenwürfel nach Punkten
- 1.1.1 1 – 6
- 1.1.2 1 – 3
- 1.1.3 tiefgezogene Punkte
- 1.1.4 verschiedenfarbige Punkte

1.2 Zahlenwürfel mit Ziffern
- 1.2.1 waagrecht
- 1.2.2 diagonal
- 1.2.3 Brüche
- 1.2.4 Zweierpotenzen
- 1.2.5 römische Ziffern
- 1.2.6 Zauberwürfel
- 1.2.7 negative Zahlen
- 1.2.8 Potenzzahlen
- 1.2.9 Währungswürfel

1.3 Zahlenwürfel mit Wörtern

1.4 Zahlenwürfel mit Symbolen
- 1.4.1 Spielsymbole
- 1.4.2 Werbung
- 1.4.3 Liebeswürfel

1.5 Zahlenwürfel mit Leerflächen

1.6 Zahlenwürfel als Anhänger

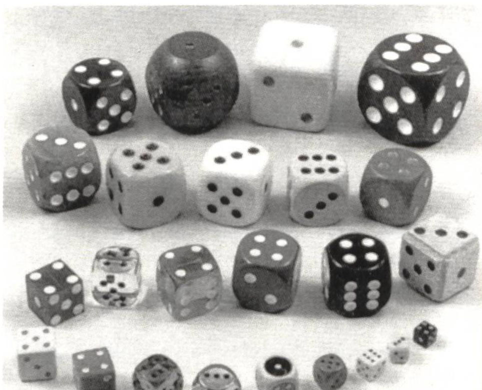
1.7 Zahlenwürfel mit Doppelfunktion
- 1.7.1 Radiergummi
- 1.7.2 Anspitzer
- 1.7.3 Flaschenöffner
- 1.7.4 Spardose
- 1.7.5 Zettelhalter

1.8 Blindenwürfel

1.9 Nachtwürfel

1.10 Symbole als Zahlen

(Würfelsystematik nach Buchenmatth)



Lerninhalte

Spielwürfel, Würfelmerkmale, Würfelsystematik, Ordnungsprinzip; Sortieren; Ordnen, Klassifizieren

Lernziele

ALLGEMEINE

- Geistige Grundfähigkeiten entwickeln
- Ordnungsprinzipien aufstellen
- Gegenstände klassifizieren

FACHSPEZIFISCHE

- Merkmale von Gegenständen zusammenstellen und die Gegenstände entsprechend ordnen
- Objekte in Klassen einteilen
- Objekte in einer auf- oder absteigenden Reihe hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale herstellen

Didaktisch-methodische Hinweise

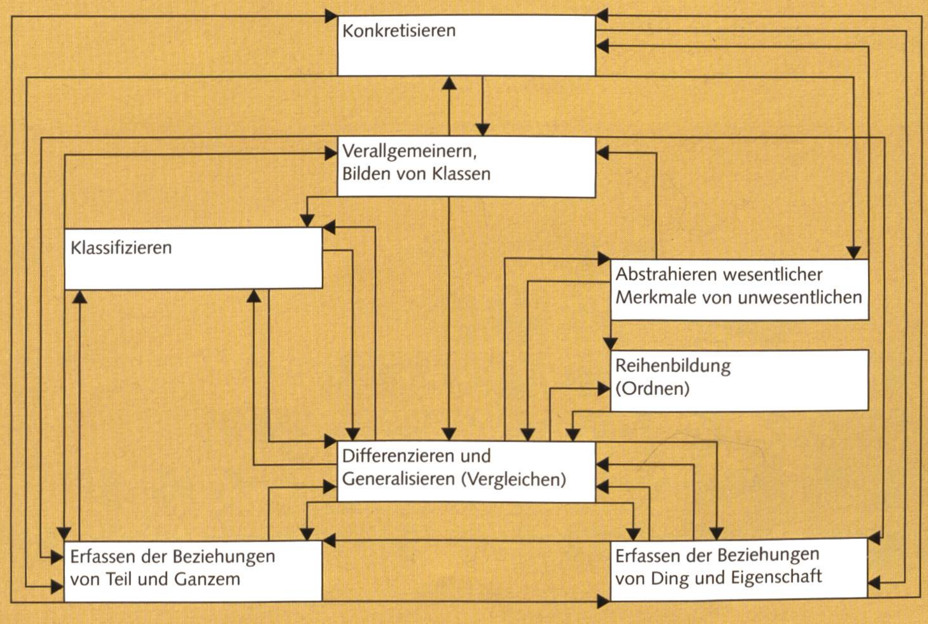
ALLGEMEINES

Dieses Unterrichtsmodul hat exemplarischen Charakter. Es soll die geistigen Tätigkeiten (Operationen) und Fähigkeiten ansprechen und ihre Wichtigkeit beim Erlernen von Mathematik aufzeigen.
Die geistigen Operationen bilden in ihrer Gesamtheit Analyse und Synthese als die Grundprozesse der geistigen Tätigkeit. Aus dem komplexen Feld der geistigen Tätigkeiten lassen sich im Wesentlichen folgende analytisch-synthetischen Operationen aufführen:
1. Das Zergliedern eines Gegenstandes in seine Teile beziehungsweise das Ausgliedern von Teilen aus dem Gegenstand und das Zusammenfügen solcher Teile zu einem neuen Ganzen (Erfassen der Beziehungen von Teil und Ganzem; vgl. auch Mengensprache).
2. Das Ausgliedern von Eigenschaften eines Gegenstandes und das Erfassen der Beziehungen dieser Eigenschaften zueinander sowie zwischen Eigenschaften und Gegenstand (Erfassen der Beziehungen von Ding und Eigenschaft).
3. Das Erfassen von Unterschieden zwischen Vergleichsobjekten hinsichtlich bestimmter Eigenschaften und das Erfassen von Gemeinsamkeiten zwischen ihnen (Differenzieren und Generalisieren – Vergleichen).
4. Das Erfassen beziehungsweise Herstellen einer auf- oder absteigenden Reihe von Objekten hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale (Ordnen).
5. Das Erfassen der für eine konkrete Ziel- oder Fragestellung wesentlichen Merkmale und das Vernachlässigen der unwesentlichen (Abstrahieren).
6. Das Erfassen einer Reihe von Gegenständen oder Erscheinungen mit gemeinsamen und gleichzeitig wesentlichen Merkmalen und das Bilden von Klassen (Verallgemeinern).
7. Das Zuordnen eines Objekts zu einer Klasse oder das In-Beziehung-Setzen von Klassen zueinander (Klassifizieren).
8. Das Übertragen und Anwenden des Allgemeinen auf das Besondere und Einzelne (Konkretisieren).

nach J. Lombscher

WEITERFÜHRENDE AUFGABEN

1. Eine Systematik entwerfen für Buchstabenwürfel, Farbwürfel, Symbolwürfel, Zahlenwürfel.
2. Spielwürfel entwerfen, die keine Hexaeder (Sechsflächer) sind.
Anschliessend das Netz eines solchen Körpers zeichnen.



Schematische Darstellung der Wechselbeziehungen der geistigen Tätigkeiten

Können oder Zufall?

Die Entscheidung aus der Hand geben

Wir wissen es allzu gut, manchmal wollen wir Entscheidungen nicht selber fällen. Sei es beim Spiel, wer zuerst beginnen, mit welcher Figur gespielt werden oder wer mit wem spielen soll. Hat nicht jeder schon einmal jemanden gefragt, in welchem seiner beiden Hände ein Stein verborgen liege, um die Entscheidung aus der Hand zu geben? Es gibt eine Reihe solcher Entscheidungsrituale: Die vom Schiedsrichter hochgeworfene Münze bestimmt die Seitenwahl beim Fussball oder entscheidet, wer die Seite auswählen darf. Das Ziehen eines Streichholzes entscheidet, wer zuerst beginnen darf.

Auch der Würfel wird in solche Entscheidungsrituale eingespannt. Wer zuerst eine Sechs würfelt, darf mit dem Spiel beginnen. So soll die gewürfelte Augenzahl entscheiden, um wie viel wir auf dem Spielfeld vorrücken dürfen. Haben wir dabei nicht schon über die Würfelergebnisse gerätselt und uns über die Häufigkeit des Eintreffens einer bestimmten Augenzahl gewundert? Bestimmt haben wir schon einmal ausgerufen: «Jetzt muss doch endlich die Sechs kommen!»

Wer oder was hat da die Hand im Spiel? Ist es der Zufall oder sind es Gesetzmässigkeiten? Wer steuert den Zufall und was ist das, «der Zufall»?

Ein Mass für den Zufall

Wir sammeln Wörter, die wir in unserer Sprache benutzen, um das wahrscheinliche Eintreffen von Ereignissen auszudrücken. Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Gewitter losbricht, dass ich in der Prüfung eine Fünf schaffe, dass ein Auto mit der Marke Volvo vorbeifährt, dass die Katze eine Maus fängt…?

Es sind Wörter wie unmöglich, möglich, selten, häufig, wahrscheinlich … die wir finden.

An einem Spiel mit zwei Würfeln versuchen wir unsere Eindrücke aus dem Alltag zu überprüfen und dabei Gesetzmässigkeiten zu finden.

Jeder aus der Spielrunde wählt sich eine Zahl aus der möglichen gewürfelten Augensumme. Vielleicht ist es die Glückszahl, möglicherweise der Geburtstag oder einfach die Zahl 13.

Reihum werden gleichzeitig beide Würfel geworfen, vielleicht 50- oder gar 100-mal. Derjenige, dessen Augensumme eintrifft, schreibt sich einen Punkt gut.

Wie entwickelt sich der Stand der Punkte? Welche Zahlen rücken dem Sieg näher und näher? Wird das Ergebnis beim nächsten Spiel gleich aussehen? Welche Zahlen können überhaupt eintreffen? Wie viele Augensummen sind bei zwei Würfeln überhaupt möglich?

In der Tabelle stellen wir alle Kombinationen (36) mit den verschiedenen Summen (11) zusammen.

Der Wahrscheinlichkeit auf der Spur

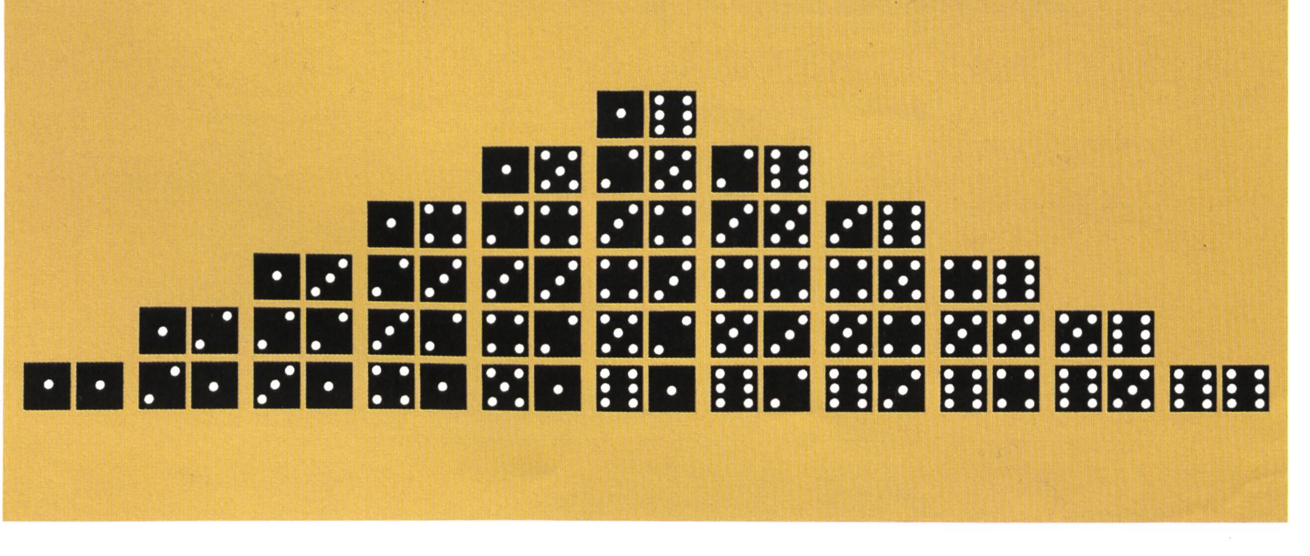
Wir listen die Anzahl der Möglichkeiten fein säuberlich auf und geben die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens in der Bruchschreibweise mit dem Nenner 36 an. Es sind ja wohlbemerkt 36 Möglichkeiten, die eintreffen können.

Das bedeutet, dass nach der Wahrscheinlichkeit innerhalb von 36 Würfen nur je einmal die Summen 2 und 12 eintreffen werden, aber immerhin sechsmal die Summe 7. Also wäre klar, auf welche Zahl wir setzen werden.

Wie wahrscheinlich ist diese Wahrscheinlichkeit?

Augensumme	Anzahl der Möglichkeiten	Mass der Wahrscheinlichkeit
0	0	0
1	0	0
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36
13	0	0

Wir spielen das Spiel an verschiedenen Tagen mehrere Male durch und tragen die Ergebnisse in eine Tabelle ein. Anschliessend berechnen wir die Abweichungen und suchen nach Erklärungen.



Lerninhalte

Zufall, Entscheidung, Wahrscheinlichkeit, Häufigkeit, Statistik, Abweichung. Umgangssprachliche Ausdrücke für Häufigkeit

Lernziele

ALLGEMEINE

- Wörter sammeln, die das wahrscheinliche Eintreffen von Ereignissen ausdrücken
- Gewinnchancen beurteilen
- Gewonnene Einsichten auf andere Situationen übertragen
- Logisches Denken schulen

FACHSPEZIFISCHE

- Probleme der Wahrscheinlichkeit und Statistik anschaulich kennen lernen
- Kombinatorische Probleme lösen
- Bruchschreibweise als Mass der Wahrscheinlichkeit verwenden
- Mathematische Beziehungen ins Bildhafte umsetzen (grafische Lösungshilfen einsetzen)
- Verknüpfungstabelle entwerfen

Didaktisch-methodische Hinweise

ALLGEMEINES

Mathematische Aussagen zur Wahrscheinlichkeit werden zusammen mit der Kombinatorik und Statistik zum Bereich der Stochastik zusammengefasst. Zu diesem Gebiet findet sich in den Lehrplänen der Volksschule wenig Aussagekräftiges. Wenn Hinweise zu finden sind, dann sind es Hinweise oder Beispiele für mathematische «Freiräume». Die Entwicklung zeigt in eine andere Richtung. Es wird aber noch seine Zeit brauchen, bis das Gebiet der Stochastik gleichberechtigt neben den «Funktionen» oder dem «Rechnen mit Dezimalbrüchen» aufgeführt und als verbindlicher Unterrichtsstoff erklärt wird.
Themen aus der Stochastik wurden bisher erst in den oberen Klassen der Mittelschulen behandelt. Dies erscheint in zweifacher Hinsicht unbefriedigend: Einerseits ist dort die Zeit für eine intensive Behandlung zu kurz, andererseits bringen die Studierenden dieser Altersstufe besonders für die grundlegenden Aufgabenstellungen nur noch wenig Interesse auf. Das Werfen von Münzen oder von Würfeln, die statistischen Eintragungen in Tabellen, die grafische Darstellung von Beobachtungen bieten sich für eine weit frühere Klassenstufe an. Ein weiterer Nachteil dieser zu späten Behandlung ist, dass breite Bevölkerungsteile, die keine Mittelschule besucht haben, von Situationen aus der Stochastik nur nebulöse Vorstellungen besitzen, sodass diese Disziplinen in ihrer Wertschätzung auf der Ebene von Spielereien rangieren. Dies verwundert an und für sich nicht, ist doch mit der Auswertung von statistischem Material schon viel Unfug getrieben worden.
Die folgenden Überlegungen rechtfertigen es, Problemstellungen aus der «Wahrscheinlichkeit» bereits Schülerinnen und Schülern aus der Primarschule vorzulegen:

- Viele Probleme der Wahrscheinlichkeit haben einen starken Lebensbezug.
- Zahlreiche dieser Aufgaben sind durch klares und richtiges Beobachten und Auszählen oder sogar schon gedanklich zu lösen.
- Der Aufbau der Begriffe kann schrittweise von der enaktiven über die ikonische Repräsentationsform gewonnen werden.
- Die Aufgabenstellungen motivieren von der Sache her und besitzen daher einen hohen Aufforderungscharakter.
- Sie schulen das logisch-mathematische Denken.
- Einsichten in die Gebiete der Wahrscheinlichkeit und Statistik sind für die eigene Lebensbewältigung wertvoll.

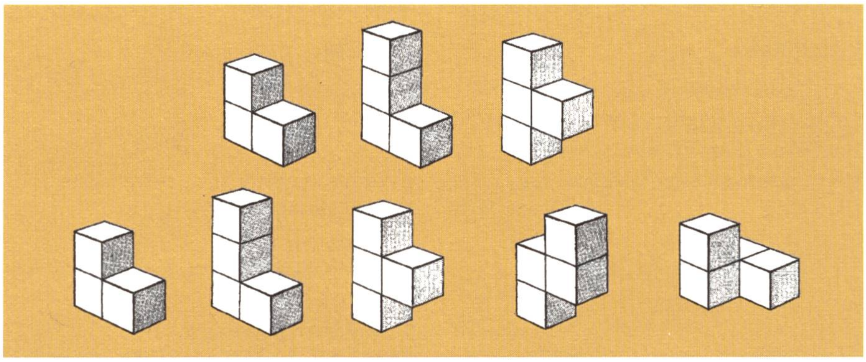
BESONDERE HINWEISE

Stochastik ist kein geschlossenes Unterrichtspaket wie etwa die Einführung des Bruchbegriffes. Darunter fallen Einzelthemen, die interessante Aufgabenstellungen ermöglichen und beispielsweise die Grundoperationen nachhaltig üben und festigen lassen.
Im Weiteren sei auf die entsprechende weiterführende Literatur aufmerksam gemacht.

WEITERFÜHRENDE AUFGABEN

1. Wörter, die das wahrscheinliche Eintreffen von Ereignissen (möglich, selten, nie ...) ausdrücken, in eine aufsteigende Reihenfolge bringen. Diese Reihenfolge ins Bildhafte umsetzen und dabei grafische Lösungshilfen verwenden.
2. Die Spielregeln variieren:
a) Die Augensumme multiplizieren
b) Mit drei Würfeln werfen
Dabei die Spielchancen für die entsprechenden Zahlen angeben.
3. Verknüpfungstabelle entwerfen.

Vom Quadrat zum Würfel



Eine chinesische Herausforderung

Ein chinesisches Rätsel, Tangram genannt, von dem man annimmt, dass es tausende von Jahren alt ist, fasziniert immer wieder von neuem. In China heisst das Spiel «Sieben-Schlau-Brett» oder «Weisheitsbrett». Es besteht aus einem Quadrat aus dünnem Material, das in folgende sieben Stücke zerlegt ist: fünf Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm. Damit lassen sich laut einer Sammlung in der Bibliothek von Lewis Carroll 323 figürliche Darstellungen legen. Zuweilen wird damit eine solche Lebendigkeit und Bewegtheit eingefangen, dass der geometrische Charakter ganz überspielt wird.

Die Regeln sind denkbar einfach: Für alle Darstellungen werden immer alle sieben Formen verwendet, auch wenn es manchmal etliches Kopfzerbrechen bereitet. Das Spiel entfaltet sich ausschliesslich auf der Fläche. Die Formen werden also nie übereinander gelegt.

Versuchen wir einmal, die folgenden Beispiele nachzulegen.

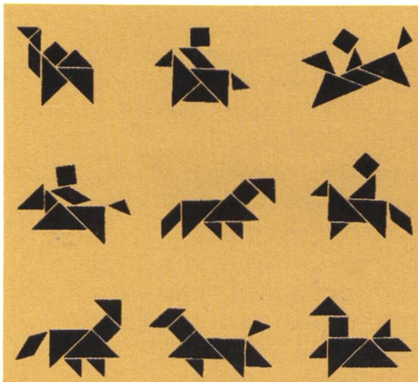
Einfälle in der Vorlesung

Von Zeit zu Zeit wurde der Versuch unternommen, ein Tangram für den Raum zu erfinden. Ein Versuch war besonders erfolgreich: der Soma-Würfel. Piet Hein, ein dänischer Schriftsteller, hatte den genialen Einfall während einer Vorlesung von Werner Heisenberg über Quantenphysik. Die Ausführungen über die Zerlegungen eines Raumes in Würfel haben Piet Hein folgenden geometrischen Satz finden lassen:

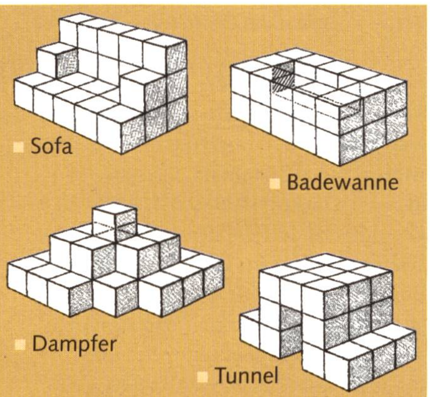
«Betrachtet man alle unregelmässigen Körper, die aus nicht mehr als vier gleich grossen und an den Seitenflächen verbundenen Würfeln bestehen, so lassen sich diese Figuren zu einem grossen Würfel zusammensetzen.» Wir können uns die Frage mathematisch vorerst etwas einfacher stellen: «Wie viele verschiedene Anordnungen von 1, 2, 3 und 4 Würfeln gibt es?» Dabei gelten zwei Anordnungen gleich, die sich durch Verschiebung ineinander überführen lassen. Piet Hein hat jedoch von unregelmässigen Körpern gesprochen. Was ist darunter zu verstehen?

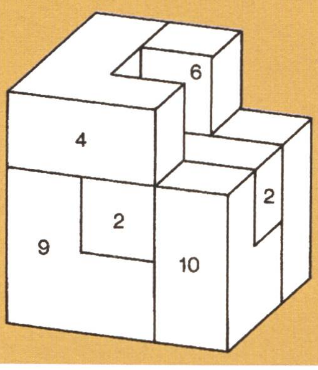
Die Körper sollen irgendwo Ecken aufweisen. Welche Vierlinge liegen demnach ausserhalb unserer Betrachtungen? Übrig bleiben jetzt die sieben Teile des Soma-Würfels. Mit ihnen kann ähnlich gespielt werden wie mit den Tangram-Teilen: Figürliche Darstellungen können im Raum nachgebaut werden.

Zu Beginn versuchen wir, aus den sieben Teilen den Soma-Würfel selbst aufzubauen. Bestimmt werden wir eine der 230 verschiedenen Lösungen finden.



Anzahl der Würfel	Anordnungsmöglichkeiten	Anzahl der Anordnungen
1	■	1
2	■■	1
3	■■■	2
4	…	8
5	…	…





Hier weitere Beispiele zum Austüfteln und Knobeln

Lerninhalte

Ecke, Fläche, Raum, Form, Vierling, Würfel;
Dreieck, Quadrat, Parallelogramm; regelmässig, unregelmässig, Raumzerlegung, Anordnung, figürliche Darstellung; Tangram, Soma-Würfel

Lernziele

ALLGEMEINE

- Die Entwicklung von Spielideen nachvollziehen
- Räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und schulen
- Regeln einhalten
- Mit geometrischen Formen kreativ experimentieren

FACHSPEZIFISCHE

- Mit geometrischen Formen Figuren nachlegen
- Kombinatorische Probleme lösen
- Die Teile des Soma-Würfels finden
- Mit den Teilen des Soma-Würfels unregelmässige Körper bauen

Didaktisch-methodische Hinweise

ALLGEMEINES

Für die Überlegungen, die vom Tangram und Soma-Würfel ausgehen, bedarf es unbedingt der entsprechenden Modelle. Solche Probleme sind vor allem zu Beginn der Lernphase nur auf der enaktiven Stufe zu lösen, natürlich begleitet von Anschauung und Vorstellung. Hier ist besonders handelndes Entdecken gefragt. Über das räumliche Handeln baut sich auch das räumliche Denken auf.

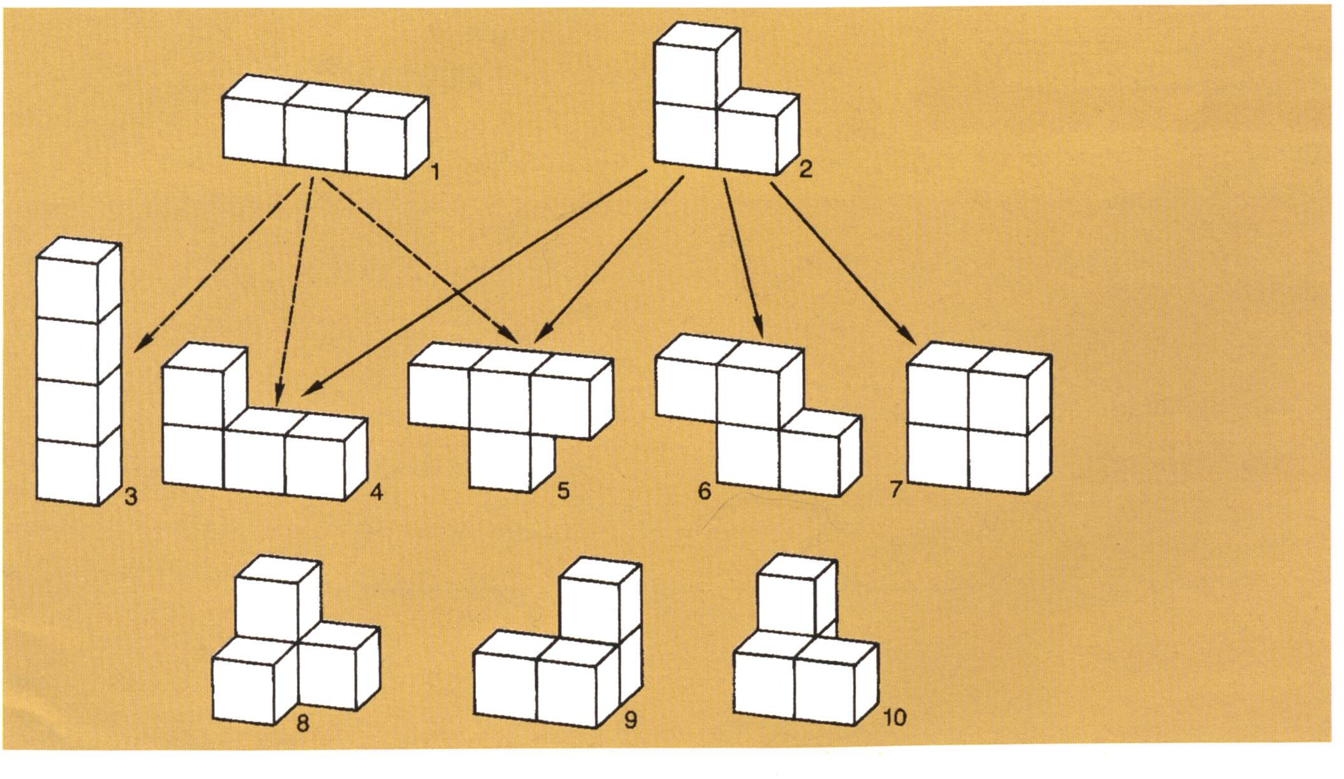
BESONDERE HINWEISE

Die Idee des Tangrams kann auch auf das Eigram (vgl. unten stehende Abbildung) ausgeweitet werden. Überhaupt sind diesen Spielideen rund um das Tangram und den Soma-Würfel keine Grenzen gesetzt.

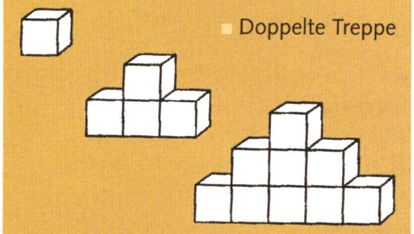
Auch mit den zwölf Pentominos-Figuren lassen sich ähnliche Beziehungen herleiten

WEITERFÜHRENDE AUFGABEN

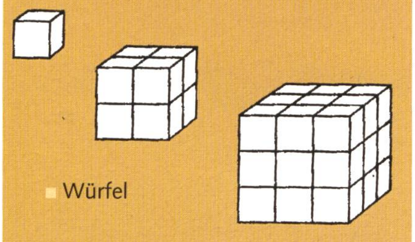
1. Mit den Tangram- und Soma-Würfel-Teilen selber figürliche Darstellungen entwerfen und sie nachlegen lassen.
2. Erklären, warum man beim Soma-Würfel nicht nur Vierlinge, sondern auch einen Drilling braucht.



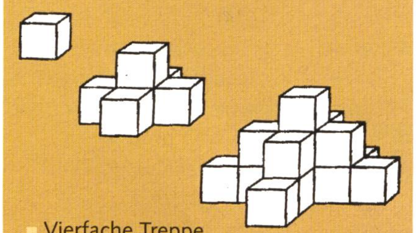
Würfeltreppen



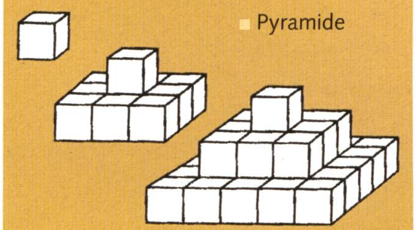
Doppelte Treppe



Würfel



Vierfache Treppe



Pyramide

Würfel auf Würfel

Stockwerk um Stockwerk

Das Bauen mit Würfeln ist uns längst vertraut. In frühen Jahren war es das Ziel, möglichst hohe Türme, Schlösser oder Burgen zu bauen. Wir nehmen die würfelförmigen Bauklötze wieder hervor und suchen beim Bauen von Würfeltreppen nach Gesetzmässigkeiten zwischen den einzelnen Körpern.

Zuerst bauen wir eine einfache Würfeltreppe. Dabei stellen wir uns die folgenden Fragen:

- Wie viele Würfel brauchen wir für jede Treppe?
- Wie gross ist jeweils der Unterschied von Treppe zu Treppe?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Stockwerken und den verwendeten Klötzen?

Wir versuchen, unsere Resultate in einen Zusammenhang zu bringen, und beschreiben die Folge und Differenzfolge mit Worten. Diese Erkenntnis setzen wir in einen allgemeinen Term für den Würfel um.

In eine Formel verpackt

Bei den Pyramidentreppen setzen wir Stockwerk, Seitenlänge und Anzahl der Klötze miteinander in Beziehung. Die Tabelle bringt aufschlussreiche Resultate zutage. Wenn wir den Schlussterm als Funktion von h grafisch darstellen, so wird die Lösung sehr anschaulich. Auf welchen Grenzwert hin strebt der Term?

Wir können die Problemstellung auch in die Ebene übertragen: Würfel → Quadrat; Pyramide → Dreieck.

Weitere Würfeltreppen

Wir wiederholen unsere Untersuchungen beim Bau von komplizierteren Würfeltreppen: Doppeltreppen, vier-fachen Treppen, Würfeltreppen, Pyramidentreppen.

Finden wir ähnliche Zusammenhänge zwischen Stockwerk und Anzahl der Klötze? Wir bringen die Ergebnisse in eine Reihenfolge, indem wir eine ähnliche Tabelle, wie bereits dargestellt, benutzen.

Wir untersuchen weitere leicht zählbare Elemente wie Eckpunkte, Kanten, Diagonalen und bestimmen die entsprechenden Zahlenfolgen.

Stockwerke	h	1	2	3	4	12	24
Seitenlänge	s	1	2	3	...	...	...
	$h \cdot s^2$	1	8	27...	...	...	
Anzahl Klötze	K	1	5	14		650	4900
	$\frac{h \cdot s^2}{K}$	1	1,6	1.93...	...	...	...

Solche Tabellen erleichtern uns die Arbeit:

Anzahl Klötze	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Würfel							
Zuwachs	+2						

Lerninhalte

Würfel. Würfeltreppe;
Kante, Diagonale, Fläche;
Beziehung, Zusammenhang, Gesetzmässigkeit, Unterschied; Term, Folge, Funktion, Grenzwert, Tabelle, Variable

Lernziele

ALLGEMEINE

- Räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln
- Gesetzmässigkeiten verallgemeinern
- Regeln einhalten
- Funktionales und vernetztes Denken fördern

FACHSPEZIFISCHE

- Geometrische Gegebenheiten in Termen festhalten
- Zahlenfolgen aufstellen
- Funktionale Beziehungen in Tabellen eintragen und aus ihnen herauslesen
- Grenzwerte bestimmen

Didaktisch-methodische Hinweise

ALLGEMEINES

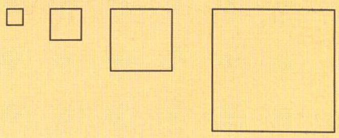
Die Lerninhalte mit den Würfeltreppen können sehr gut in einer Lernwerkstatt verwendet werden. Es ist einfach notwendig, dass genügend Holzwürfel vorhanden sind. Aus Vierkanthölzern können sie im Do-it-yourself-Verfahren hergestellt werden.
Bei diesem Lernbaustein ist deutlich erkennbar, wie abstrakt gefasste Begriffe (Term, Varibale, Funktion) handelnd gewonnen werden können und wie diese auch wieder in Handlungen übersetzbar sind.

BESONDERE HINWEISE

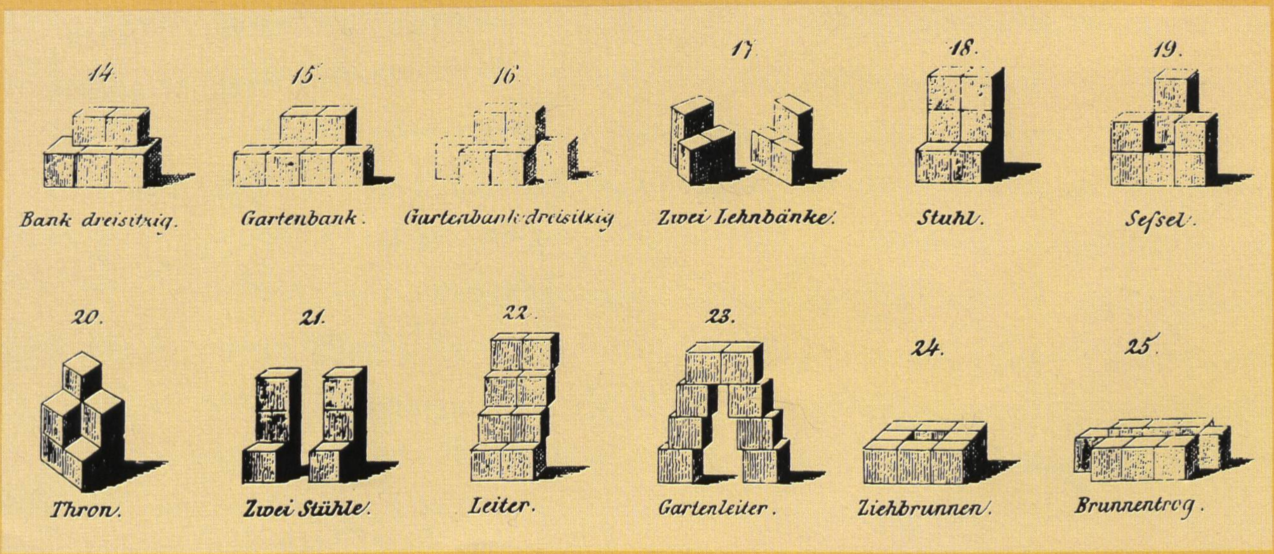
Die Erfahrungen mit den Würfelkörpern können auch auf die Dreieckszahlen übertragen und in Verbindung gesetzt werden. Eine gute Gelegenheit, die vernetztes Denken fördert.
Die Funktion für die Pyramidentreppe strebt gegen den Wert 3. Wir können ihn deuten als Verhältnis zwischen dem Volumen einer Pyramidentreppe und dem umschriebenen Würfel.

WEITERFÜHRENDE AUFGABEN

1. Würfeltreppen nach einem anderen Wachstumsprinzip bauen und entsprechende Untersuchungen anstellen.
2. Für die einzelnen Folgen die allgemeinen Terme aufschreiben und sie erklären.
3. Auf welchen Grenzwert führt eine Annäherung der Dreiecksflächen mit Karos? (→2)



Ein Dutzend Möglichkeiten, mit würfelförmigen Bausteinen Alltagsgegenstände nachzuformen.



Würfeleien

Ecca brocca

Spielanleitung

Material: 3 Würfel; Hunderterzahlenfelder als Spielpläne; für jede Mitspielerin und jeden Mitspieler ein Standblatt für alle je 30 farbige Deckplättchen in der Grösse der Zahlenfelder auf dem Spielplan.

Grundregel: Es wird reihum im Uhrzeigersinn gewürfelt. Die gewürfelten Augenzahlen werden in die erste Spalte des Standblattes eingetragen. Aus diesen drei Ziffern kann eine neue, erwünschte Zahl gebildet werden. Dazu können die Stellenwertschreibweise, alle Operatoren oder Klammern benutzt werden.

Beispiel: Gewürfelt wird eine Drei, Sechs und Fünf. Mögliche Zahlbildungen:

365, 653, 536, …

$(3+6) \cdot 5 = 45$

$(3 \cdot 6) \cdot 5 = 90$

$(3 \cdot 6) - 5 = 13$

$(6 : 3) \cdot 5 = 10$

Die aus den vielen Möglichkeiten gewählte Zahlbildung wird in die 2. Spalte des Standblattes eingetragen. In die 3. Spalte wird die Ergebniszahl eingetragen.

Das entsprechende Zahlenfeld auf dem Spielplan wird dann mit einem Deckplättchen der eigenen Farbe belegt.

Spielziel: Auf dem Spielplan zusammenhängende, gleichfarbige Muster legen. Am Spielende (nach vereinbarten Rundenzahl) wird jedes Deckplättchen, das sich in einem Muster befindet, mit einem Punkt bewertet. Wer am meisten Punkte erreicht, ist Sieger.

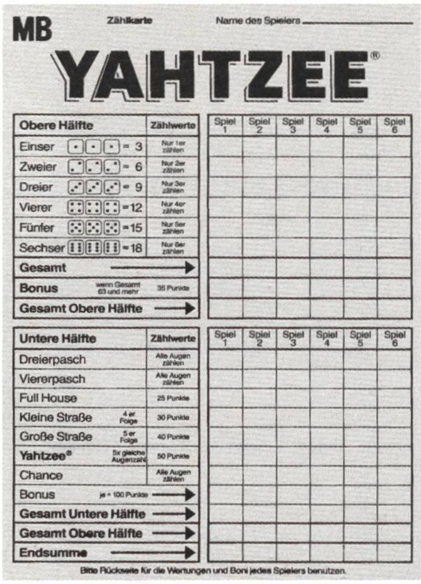
Yahtzee

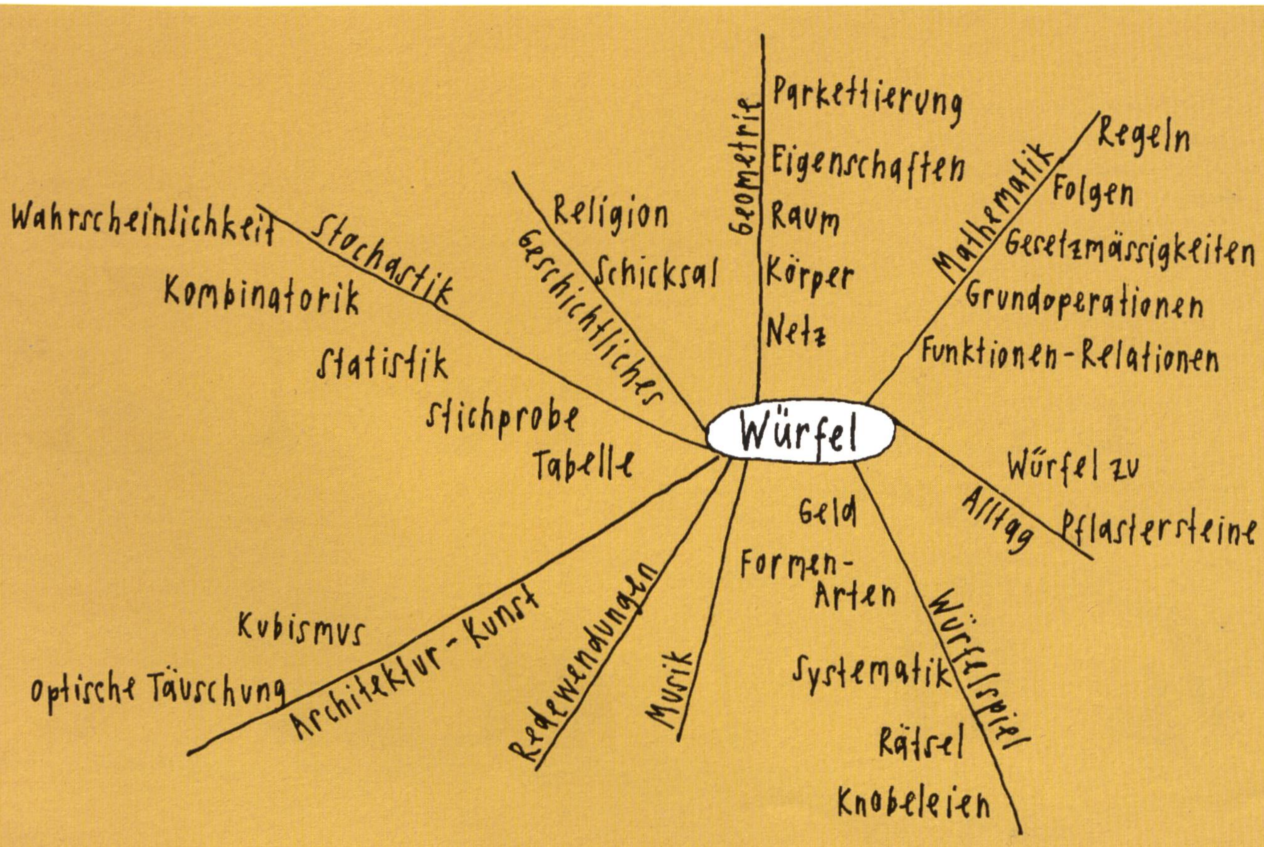
Spielanleitung

Spielziel: Jeden der 13 Durchgänge eines Spiels mit möglichst hoher Punktzahl abzuschliessen.

Grundregel: Jeder Mitspieler hat höchstens drei Würfe pro Durchgang. Er kann aber schon nach dem ersten oder zweiten Wurf den Durchgang beenden.

- Der jeweils erste Wurf muss mit allen 5 Würfeln gemacht werden.
- Für den zweiten oder dritten Wurf kann sie mit allen Würfeln neu werfen, oder sie kann beliebig viele stehen lassen, um die selbst gewählte Vorgabe zu erreichen. Mit den restlichen Würfeln wird neu geworfen. Die Spielstrategie muss nicht im Voraus angekündigt werden.
- Nach dem dritten Wurf zählt der Wurf endgültig.
- Die Spielerin entscheidet nun nach ihren strategischen Absichten, welcher Zeile sie den Wert zuordnet. Jede Zeile darf in jedem Durchgang nur einmal belegt werden ■





Mind map

Lerninhalte

Würfelspiel, Grundoperation, Operator, Stellenwertschreibweise, Strategie

Lernziele

ALLGEMEINE

- Spielregeln einhalten
- Spielzüge planen
- Strategien entwickeln
- Speilfreude wecken

FACHSPEZIFISCHE

- Grundoperationen festigen
- Aus Ziffern mit Hilfe der Stellenwertschreibweise und Operatoren Zahlen bilden
- Auf Hunderterzahlenfelder Muster legen

Didaktisch-methodische Hinweise

ALLGEMEINES

Der Reiz von Würfelspielen besteht im ungewissen Ausgang des Wurfes. Dies macht das Spiel mit Würfeln bei Jung und Alt auch so beliebt. Geschichtlich zurückgeblendet ging es bei solchen Spielen oft um Kopf und Kragen, das heisst um den Tod. Haus und Hof, ganze Ländereien, sein eigenes Leben und das der ganzen Familie wurden verspielt. Wenn auch Kirche und Staat das Spiel mit Würfeln immer versuchten zu verbieten, blieben alle Verbote erfolglos.

Es ist sicher sinnvoll, während einer kurzen Zeit alle Würfelspiele, die in den Familien der Schülerinnen und Schüler gespielt werden, für eine Klassenausstellung zusammenzutragen. Dabei sollte der Versuch nicht ausbleiben, die Funktion des Würfels zu beschreiben und eine einfache Systematik zu versuchen. Weshalb nicht auch einmal einen Spieltag einschalten?

Literatur

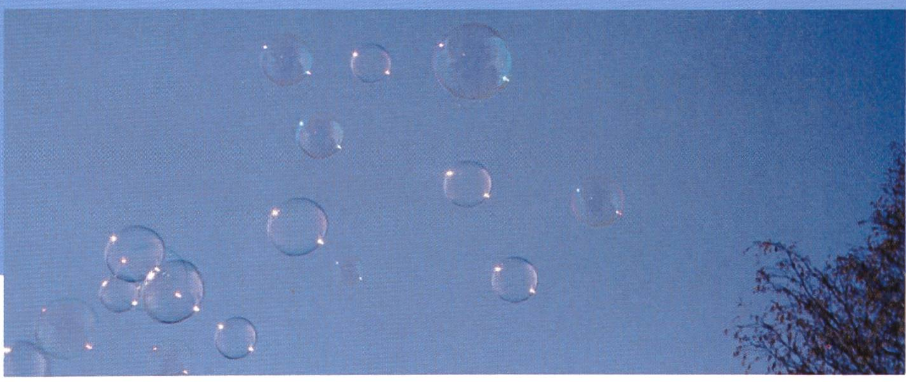
Besuden, H.: Knoten, Würfel, Ornamente. Klett, Stuttgart, 1984.
Grunfeld, F.V.: Spiele der Welt. Frankfurt 1976.
Obermair, G.: Würfel-Spielereien. München, 1976.
Buchenmatth, J.D.: Die 7. Seite des Würfels. Hugendubel, München, 1990.
Gardner, M.: Mathematische Rätsel und Probleme. Vieweg, Braunschweig, 1975.
Schattschneider Doris u.a.: MC Escher Kaleidozyklen. Taschen, Köln 1977.
Jost, D.: Lernlandschaften, kantonaler Lehrmittelverlag, Luzern, 1999.

Die fünf Platonischen Körper

Warum es keine eckigen Seifenblasen gibt

Die fünf Platonischen Körper bilden ein interessantes Betätigungsfeld für mathematische Aktivitäten. Man kann sie herstellen, kann den Eulerschen Polyedersatz studieren, die Dualität, das Vier-Farben-Problem kann zur Sprache kommen, und man kann Berechnungen anstellen.

Dieter Ortner



1. Reguläre Polyeder

Polyeder, zu Deutsch «Viel-Flächner», sind Körper, die von ebenen Vielecken begrenzt sind. Also Körper, deren Oberflächen aus Dreiecken, Vierecken, Fünfecken usw. bestehen. Die Anzahl möglicher Polyeder ist unbegrenzt.

Von einem *regulären Polyeder* spricht man falls...

...die Oberfläche aus lauter gleichen Vielecken zusammengesetzt ist,

...alle Ecken auf einer Kugeloberfläche liegen (reguläre Polyeder besitzen also eine *Umkugel*),

...an jeder Ecke gleich viele Begrenzungsflächen zusammenstossen.

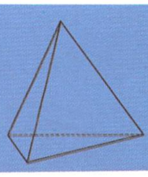
Kegel und Zylinder sind also keine Polyeder, schon gar keine regulären Polyeder. Die Cheops-Pyramide ist ein Polyeder, jedoch kein regulärer Polyeder. Ein Würfel ist ein regulärer Polyeder.

Die grossen griechischen Denker waren stark der Zahlenmystik verhaftet, man suchte die Ordnung, die die Welt beherrscht. Da verwundert es nicht, dass sich bereits Platon (um 428 bis ca. 347 v. Chr.) mit den regulären Polyedern befasste. Also nennt man sie auch *Platonische Polyeder* oder *Platonische Körper.*

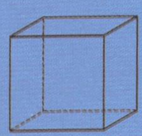
Nach Platon gibt es deren nur gerade fünf: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.
Zu Deutsch: Vierflächner, Sechsflächner, Achtflächner, Zwölfflächner und Zwanzigflächner.

2. Vorstellungsrunde

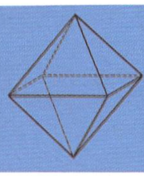
1. Tetraeder oder Vierflächner
Er ist begrenzt durch vier gleichseitige Dreiecke. An jeder Ecke treffen drei Dreiecke zusammen.



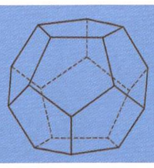
2. Hexaeder oder Sechsflächner (Würfel)
Er ist begrenzt durch sechs Quadrate. An jeder Ecke treffen drei Quadrate zusammen.



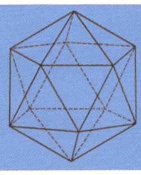
3. Oktaeder oder Achtflächner
Er ist begrenzt durch acht gleichseitige Dreiecke. An jeder Ecke treffen vier Dreiecke zusammen.



4. Dodekaeder oder Zwölfflächner
Er ist begrenzt durch zwölf regelmässige Fünfecke. An jeder Ecke treffen drei Fünfecke zusammen.



5. Ikosaeder oder Zwanzigflächner
Er ist begrenzt durch zwanzig regelmässige Dreiecke. An jeder Ecke treffen fünf Dreiecke zusammen.



3. Warum es nur gerade fünf reguläre Polyeder gibt

Gehen wir systematisch vor. Die Begrenzungsfläche muss mindestens drei Ecken besitzen.

1. Polyeder mit Dreiecken als Begrenzungsflächen:

Falls die Begrenzungsflächen Dreiecke sind, treffen an jeder Ecke drei, vier oder höchstens fünf Dreiecke zusammen. Fügt man nämlich sechs Dreiecke an einer Ecke zusammen, so erhält man bereits einen vollen Winkel – man kann allenfalls eine Ebene damit parkettieren (Abb. 1).

An regulären Polyedern mit Dreiecken als Begrenzungsflächen gibt es also nur den Tetraeder, den Oktaeder und den Ikosaeder.

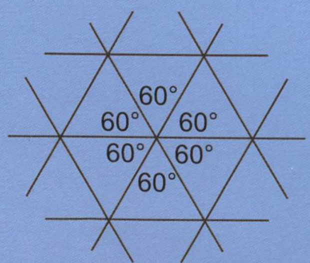


Abb. 1

2. Polyeder mit Quadraten als Begrenzungsflächen:

An jeder Ecke müssen mindestens drei Quadrate zusammenstossen. Es können aber auch nicht mehr als drei sein, denn viermal 90° sind bereits 360°, mit vier an einer Ecke zusammenstossenden Quadraten kann man wiederum höchstens eine Ebene parkettieren.

Es gibt also nur einen regulären Polyeder mit Quadraten als Begrenzungsflächen, den Hexaeder – auch Würfel genannt.

3. Polyeder mit Fünfecken aus Begrenzungsflächen:
Es müssen mindestens drei Fünfecke an einer Ecke zusammentreffen, es können aber auch nicht mehr sein. Bei Fünfecken betragen die Winkel an den Eckpunkten 108°, dreimal 108° liegt noch unter 360°, viermal 108° liegt bereits über 360°. Es gibt also nur einen regulären Polyeder mit regelmässigen Fünfecken als Begrenzungsflächen, den Dodekaeder.

4. Polyeder mit Sechsecken (und mehr) als Begrenzungsflächen:
Überlegt man nun in ähnlicher Weise, ob es reguläre Polyeder mit Sechsecken, Siebenecken usw. geben kann, so muss man das entschieden verneinen.

4. Sich reguläre Polyeder verschaffen

Im Spielwarenhandel gibt es neben den klassischen Würfeln auch Dodekaeder und Ikosaeder als Spielwürfel (Abb. 2).

Abb. 3 zeigt einen Softball aus der Babyabteilung eines Kaufhauses, einen Dodekaeder.

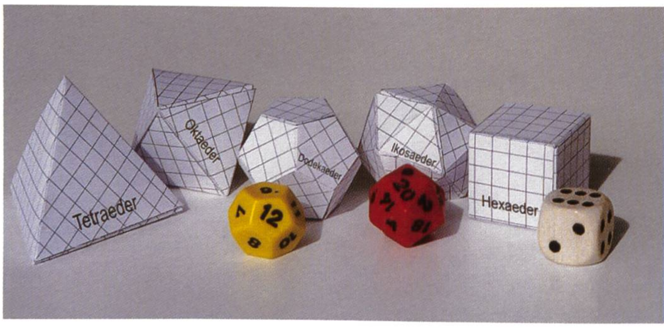


Abb. 2

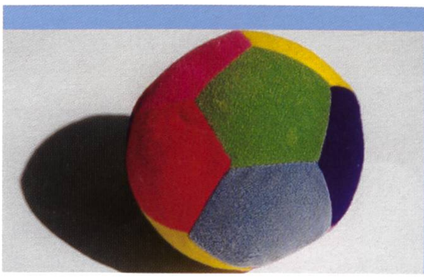


Abb. 3

5. Flechtmodelle

Man kann reguläre Polyeder auch flechten.

Abb. 4 und Abb. 5 zeigen die ersten Schritte beim Zöpfeln des Hexaeders. Auf Abb. 6 sind fertige Körper zu erkennen. Viel Vergnügen! Sie beginnen am besten mit dem Hexaeder:

- Sie kopieren das Netz von Kopiervorlage 2 auf etwas stärkeres Papier.
- An den punktierten Linien mit einem spitzen Gegenstand ein wenig einritzen/eindrücken (an diesen punktierten Linien muss gefaltet werden).
- Das Netz ausschneiden, Einschnitte, wo solche vorgesehen sind.
- An allen punktierten Linien kräftig falten.
- Das Flechten: Wichtig ist der richtige Anfang. Bei allen Polyedern kommt als erster Schritt der Name des Polyeders **Hexaeder** über das in helleren Lettern geschriebene Wort Hexaeder. Dann wird gezöpfelt: Drunter, drüber, drunter, drüber usw., wie beim Zöpfeflechten. Als Hilfe: Die schwarzen Ziffern kommen immer obenauf zu liegen.
- Zuletzt die freien Enden geeignet versorgen.

Die Längen der Seitenkanten der fünf Flechtmodelle sind so gewählt, dass alle Polyeder gleiches Volumen haben (15 cm^3, sofern Sie die Vorlagen nicht verkleinern oder vergrössern).

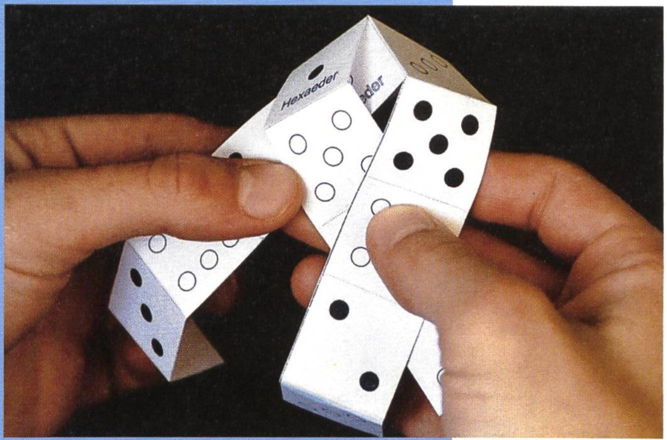


Abb. 4

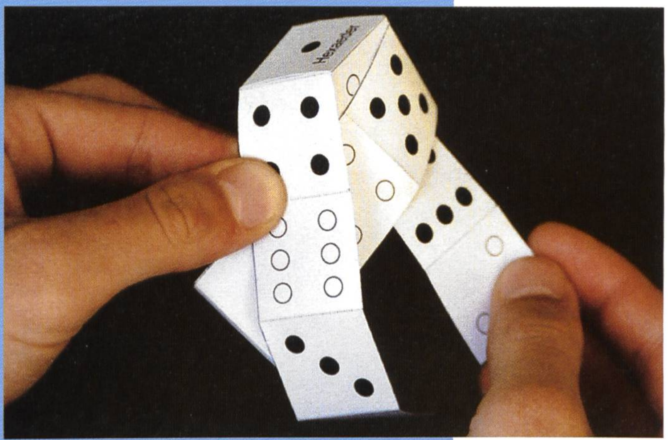


Abb. 5

Abb. 6

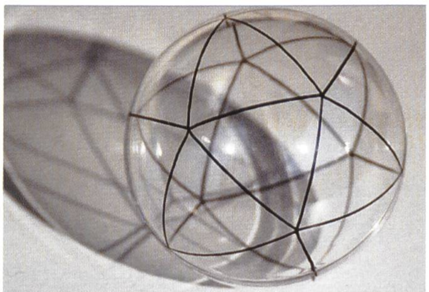


Abb. 7

6. Polyeder auf Luftballons oder Kunstglaskugeln

Luftballone sind überall erhältlich, Kunstglaskugeln erhält man in Bastelläden.

Es ist eine interessante Aufgabe, auf einen Luftballon oder auf eine Kunstglaskugel einen Dodekaeder oder einen Ikosaeder zu zeichnen – auch wenn es nicht perfekt gelingen sollte.

Abb. 7 zeigt einen Ikosaeder auf einer Kunstglaskugel.

7. Polyeder mit GEOMAG

GEOMAG ist ein geometrisches Spielzeug, in Spielzeugläden erhältlich. Der Bausatz besteht aus Eisenkugeln und kräftigen kleinen Stabmagneten als Verbindungsstücken. Damit kann allerhand gebaut werden, unter anderem auch die regulären Polyeder.

Abb. 8 zeigt den Dodekaeder. Er ist etwas schwierig zu bauen, weil er nicht starr ist, sondern deformiert werden kann (und sich manchmal unter dem eigenen Gewicht selbst deformiert).

Tetraeder und Oktaeder sind starre Gebilde. Der Würfel nicht, er kann deformiert werden.

Abb. 9 ist eine Gruppenaufnahme der Familie der regulären Polyeder.

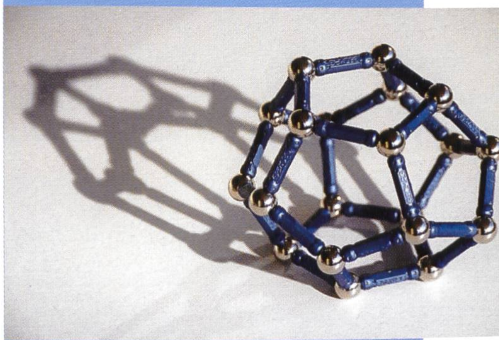


Abb. 8

Abb. 9

8. Ecken, Flächen und Kanten

Hat man einen Polyeder vor sich, können Ecken, Flächen und Kanten gezählt werden. An diesen Zahlen kann Interessantes entdeckt werden.

Tabelle 1

	Anzahl Ecken e	Anzahl Flächen f	Anzahl Kanten k	Anzahl Ecken einer Seitenfläche n	Anzahl Seitenflächen, die in jeder Ecke zusammenstossen z
Tetraeder	4	4	6	3	3
Hexaeder	8	6	12	4	3
Oktaeder	6	8	12	3	4
Dodekaeder	20	12	30	5	3
Ikosaeder	12	20	30	3	5

Die erste und wichtigste Entdeckung ist diese:

Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2
$$e + f = k + 2$$

Diese Beziehung ist als *Eulerscher Polyedersatz* bekannt. Wir kommen auf diesen Satz später noch zurück.

Zwei weitere Beziehungen:
- Multipliziert man die Anzahl der Flächen (f) mit der Anzahl Ecken resp. Kanten der Begrenzungsfläche (n), so erhält man die doppelte Anzahl aller Kanten (k).
  Also: $f \cdot n = 2 \cdot k$.
- Multipliziert man die Anzahl der Ecken (e) mit der Anzahl der an jeder Ecke zusammentreffenden Flächen (z), so erhält man ebenfalls die doppelte Anzahl aller Kanten (k). Also: $e \cdot z = 2 \cdot k$.

9. Dualität

Zwischen Hexaeder und Oktaeder sowie zwischen Dodekaeder und Ikosaeder scheint eine gewisse Verwandtschaft zu bestehen:
- Die Anzahl der Ecken einer Seitenfläche des Hexaeders (n) ist gleich der Anzahl von Seitenflächen, die an einer Ecke zusammenkommen, eines Oktaeders (z) und umgekehrt.
- Die Anzahl Flächen des Hexaeders (f) ist gleich der Anzahl Ecken des Oktaeders (e) und umgekehrt.

In Tabelle 1 sind diese Beziehungen mit Pfeilen angezeigt.

Der Tetraeder hat keinen solchen «Partner». Vermutlich ist er mit sich selber verwandt.

Die Verwandtschaften zeigen sich in Folgendem:

Sucht man in einem Hexaeder die Mittelpunkte aller Flächen und verbindet die Mittelpunkte benachbarter Flächen durch Kanten, so erhält man einen Oktaeder. Umgekehrt erhält man durch Verbinden der Flächenmitten eines Oktaeders einen Hexaeder. Hexaeder und Oktaeder sind miteinander «verwandt», man spricht von einer **Dualität.**

In gleicher Weise erhält man aus dem Dodekaeder den Ikosaeder, die beiden sind ebenfalls **dual zueinander.**

Wie verhält es sich nun mit dem Tetraeder? Verbindet man die Seitenmitten eines Tetraeders miteinander, so erhält man immer wieder einen Tetraeder. Der Tetraeder ist also **dual zu sich selber.**

Mit der Kopiervorlage 4 können Schülerinnen und Schüler diese Dualität «handgreiflich» erleben. Zumindest für Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder ist es nicht allzu schwierig, die Mittelpunkte benachbarter Flächen durch Kanten zu verbinden und so aus dem Hexaeder einen Oktaeder, aus dem Oktaeder einen Hexaeder und aus dem Tetraeder wieder einen Tetraeder zu machen. Kopiervorlage 5 zeigt die Lösung dieser Aufgabe.

Auch mit Hilfe einer Kunstglaskugel kann die Dualität schön gezeigt werden. In Abb. 10 bilden die schwarz ausgezogenen Linien den Dodekaeder, die grünen strichlierten Linien den zugehörigen Ikosaeder.

Die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen des Dodekaeders sind die Eckpunkte des Ikosaeders und die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen des Ikosaeders sind die Eckpunkte des Dodekaeders.

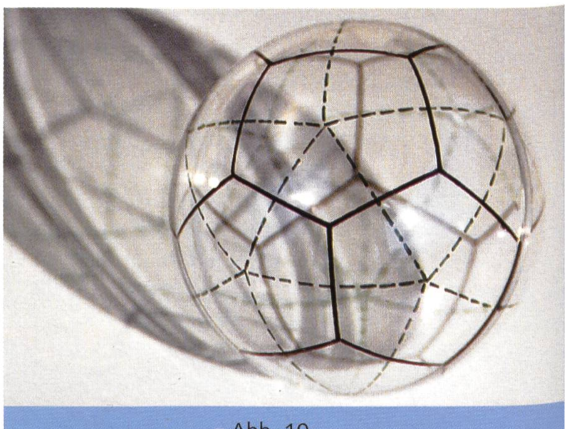


Abb. 10

10. Eulerscher Polyedersatz: $e + f = k + 2$

An den regulären Polyedern haben wir den Eulerschen Polyedersatz bereits kennen gelernt. Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2. Der Satz lautet aber nicht «Satz über reguläre Polyeder», sondern schlicht und einfach «Polyedersatz». Er sollte also für alle Polyeder gelten, nicht nur für reguläre Polyeder.

Wir testen den Polyedersatz zunächst an einigen einfachen Beispielen.
- Eine quadratische Pyramide hat 5 Ecken, 5 Flächen, 8 Kanten.
  5E + 5F = 8K +2

- Ein dreiseitiges Prisma hat 6 Ecken, 5 Flächen und 9 Kanten.
  6E + 5F = 9K + 2
- Ein sechsseitiges Prisma hat 12 Ecken, 8 Flächen und 18 Kanten.
  12E + 8F = 18K + 2

Besorgen Sie sich einen Fussball wie bei Abb. 11. Er ist zusammengesetzt aus Fünfecken und Sechsecken. Zählen Sie die Ecken, Flächen und Kanten, es sind 60 Ecken, 32 Flächen und 90 Kanten.

60e + 32f = 90k + 2

Dieser Fussball entsteht aus einem Ikosaeder, dem man die Ecken abgeschnitten hat. Es entstehen Fünfecke und Sechsecke (Abb. 12).

Auch an einem Volleyball kann man Ecken, Flächen und Kanten zählen (Abb. 13). Er hat 32 Ecken, 18 Flächen und 48 Kanten. 32E + 18F = 48K + 2

Dem Volleyball liegt eigentlich ein Würfel zugrunde, wobei man jede der sechs Würfelseiten in drei Streifen geteilt hat. So entstehen aus 6 Würfelflächen die 18 Flächen des Volleyballes.

Abb. 14 zeigt diesen Volleyball auf einer Kunstglaskugel.

Tabelle 2 fasst die betrachteten nicht regulären Polyeder zusammen.

Man sieht: Der Eulersche Polyedersatz ist auch für nicht reguläre Polyeder erfüllt.

11. Verebnung

Abb. 15 zeigt einen «Würfel» auf einem Luftballon. Zumindest erkennen Sie 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Bitte zählen Sie nach.

Abb. 16 kann man so deuten: Auf einem unendlich grossen Luftballon ist ein Würfel gezeichnet. Die Figur ist eine ebene Figur.

In topologischer Hinsicht ist diese Figur Abb. 16 dem Würfel ebenbürtig: Sie hat 8 Ecken, 6 Flächen und 12 Kanten. Auch der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt. Von jeder Ecke gehen drei Kanten aus und an jeder Ecke stossen drei Flächen zusammen. Beachten Sie, dass jeweils auch das Äussere als eine Begrenzungsfläche anzusehen ist.

Für das Tetraeder müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: Die Figur muss 4 Ecken haben, 4 Flächen, an jeder Ecke müssen 3 Kanten zusammenstossen. Abb. 17 zeigt, wie ein verebnetes Tetraeder aussehen könnte.

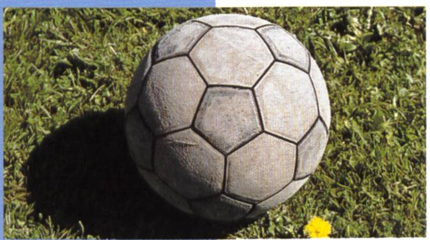


Abb. 11

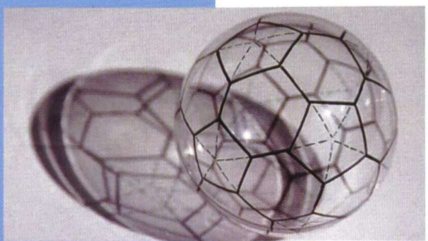


Abb. 12

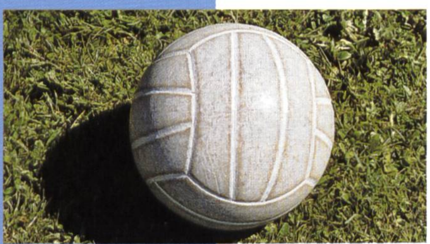


Abb. 13

Abb. 14

	Anzahl Ecken	Anzahl Flächen	Anzahl Kanten
	e	f	k
quadratische Pyramide	5	5	8
dreiseitiges Prisma	6	5	9
sechsseitiges Prisma	12	8	18
Fussball	60	32	90
Volleyball	32	18	48

Tabelle 2

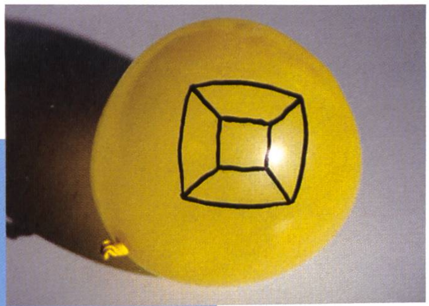


Abb. 15

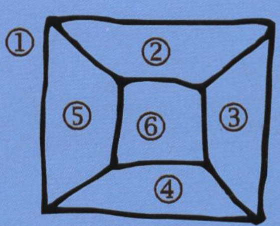


Abb. 16

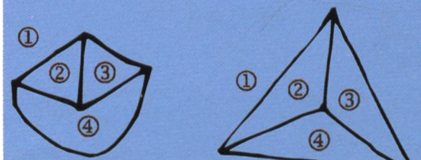


Abb. 17

Abb. 18 zeigt die Verebnung eines Oktaeders. Das kann eine mehr oder weniger «perfekte» Figur sein. Eine der Flächen ist immer das Äussere.

Abb. 19 zeigt Möglichkeiten, ein Dodekaeder und ein Ikosaeder zu verebnen.

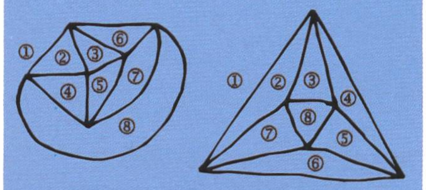


Abb. 18

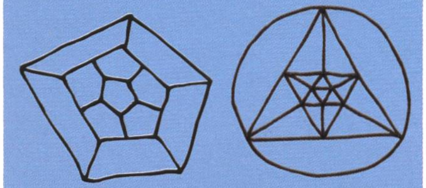


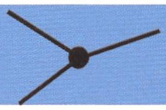
Abb. 19

12. Eulerscher Polyedersatz-Beweis

Ein Eulersches Netz – ich will es so nennen – ist ein Netz eines Polyeders, in dem der Eulersche Polyedersatz gilt: ***Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2.***

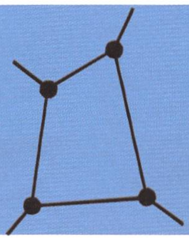
Ein Eulersches Netz besteht aus:

Ecken: Das sind Punkte, von denen mindestens drei Kanten wegführen.



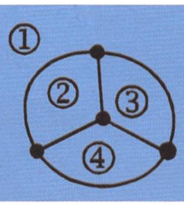
Kanten: Das sind Verbindungslinien zwischen zwei Ecken.

Flächen: Das sind von Kanten umschlossene Gebiete.
Eine Fläche hat mindestens drei Ecken und mindestens drei Kanten.
Das Äussere des Netzes ist immer auch eine Fläche.

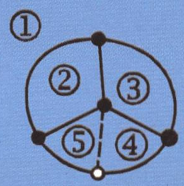


Zum Beweis des Eulerschen Polyedersatzes:

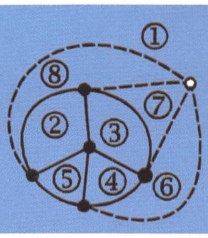
Der **Tetraeder** ist der einfachste Polyeder.
4 Ecken plus 4 Flächen gleich 6 Kanten plus 2.
4E + 4F = 6K + 2



Fügt man eine Ecke und eine Kante hinzu, so erhöht sich die Zahl der Ecken um 1, die Zahl der Flächen ebenfalls um 1 und die Zahl der Kanten nimmt um 2 zu. Es entsteht das Netz der **Cheops-Pyramide.**
5E + 5F = 8K + 2

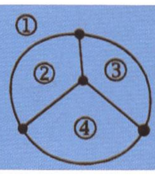


Fügt man einen weiteren Eckpunkt und vier weitere Kanten hinzu, so erhöht sich die Zahl der Flächen um 3 und die Zahl der Kanten um 4.
Es entsteht ein **Oktaeder.**
6E + 5F = 9K + 2

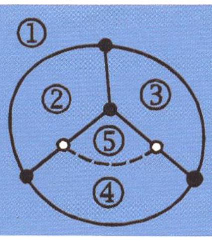


In folgender Weise kann aus dem Netz des Tetraeders das Netz eines Würfels entstehen:

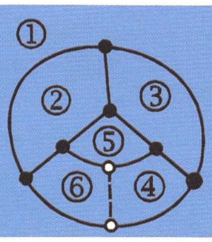
Wir beginnen wieder mit dem **Tetraeder:**
4E + 4F = 6K + 2



Fügt man zwei weitere Ecken und eine Kante hinzu, so erhöht sich die Zahl der Ecken um 2, die Zahl der Flächen um 1 und die Zahl der Kanten um 3.
6E + 5F = 9K + 2



Nochmals zwei Ecken und eine Kante hinzugefügt, ergibt einen **Hexaeder.** Das Netz hat 6 Flächen, jede Fläche hat 4 Ecken, von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus und es hat 12 Kanten. 8E + 6F = 12K + 2



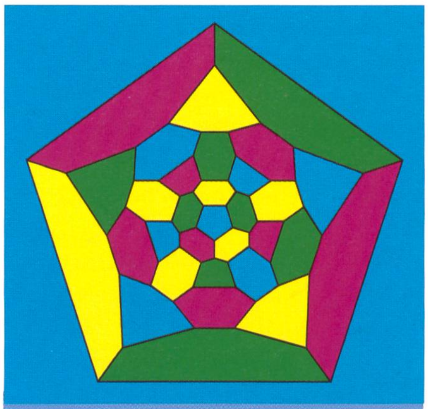


Abb. 20

Man sieht: Geht man von einem Eulerschen Netz aus (in dem der Polyedersatz gilt), so entsteht durch Einfügen von Ecken oder Kanten immer wieder ein Eulersches Netz.

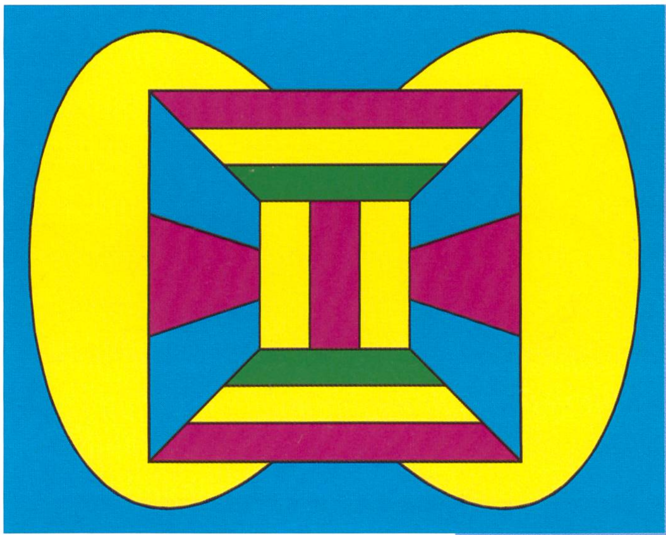


Abb. 21

13. Vierfarbentheorie

Will man die Länder einer Landkarte so unterschiedlich färben, dass niemals an einer Grenze zwei gleiche Farben aufeinander treffen, so kommt man bekanntlich mit maximal vier Farben aus. Diese Vierfarbentheorie war lange Zeit eines der ungelösten Probleme der Mathematik – weder konnte man den Satz beweisen noch durch irgendwelche ausgeklügelte Landkarten widerlegen. Vor Jahren ist es gelungen, den Satz zu beweisen, allerdings nur unter Einsatz eines aufwändigen Computerprogrammes.

Diese Vierfarbentheorie gilt natürlich auch für Polyeder und ihre Netze. Ein Tetraeder benötigt vier Farben, der Würfel drei, ein Oktaeder kommt mit nur zwei Farben aus.

Abb. 20 zeigt das mit vier Farben eingefärbte Netz des Fussballes und Abb. 21 das eingefärbte Netz des Volleyballes.

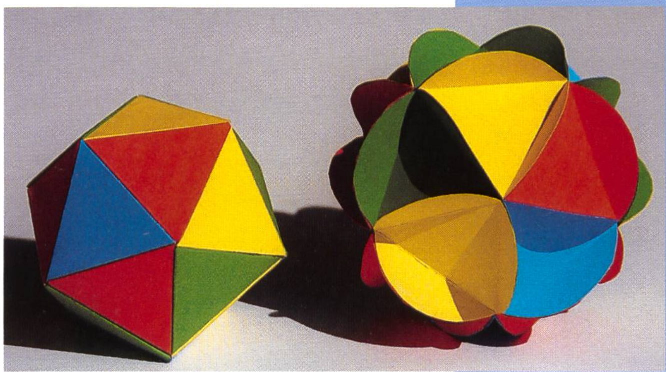


Abb. 22

14. Bastelarbeit

Mit etwas Geduld, aber ohne grosse Schwierigkeiten kann man Ikosaeder (auch Oktaeder) aus Einzelflächen zusammenkleben.

Kopieren Sie Kopiervorlage 6 auf etwas festeres (buntes) Papier. Ziehen Sie die geraden Linien mit einem Lineal und einem Kugelschreiber kräftig nach und schneiden Sie 20 dieser Scheibchen aus. Dann falten Sie die Kleberänder hoch, und die 20 Dreiecke können nun zu einem Dodekaeder zusammengeklebt werden (Abb. 22).

Einen hübschen Blumenstrauss kann man damit machen.

15. Ein Zaubertrick

Sie konstruieren zweimal auf Karton sechs Fünfecke wie in Abb. 23. Längs der strichlierten Linien schneiden Sie mit einem scharfen Messer etwas ein, damit die Teilflächen dort beweglich sind.

Dann legen Sie die beiden Teile «auf Lücke» aufeinander und legen ein Gummiband herum (Abb. 24).

Und nun der entscheidende Moment: Sie werfen das Ding etwas in die Höhe, und, wenn es klappt, halten Sie einen Dodekaeder in der Hand (Abb. 25).

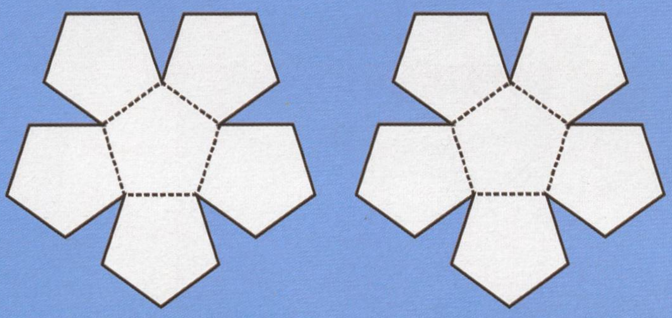


Abb. 23

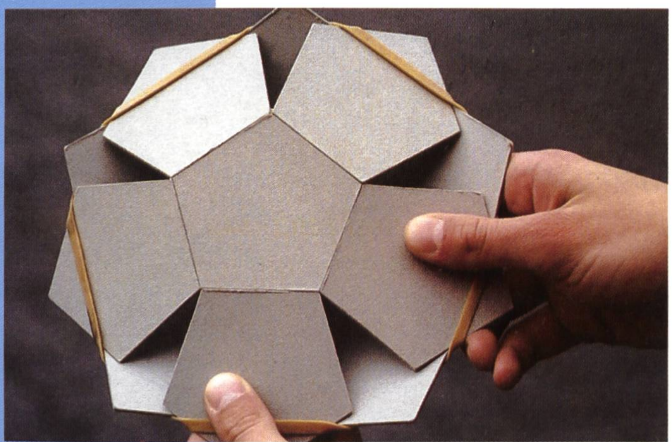


Abb. 24

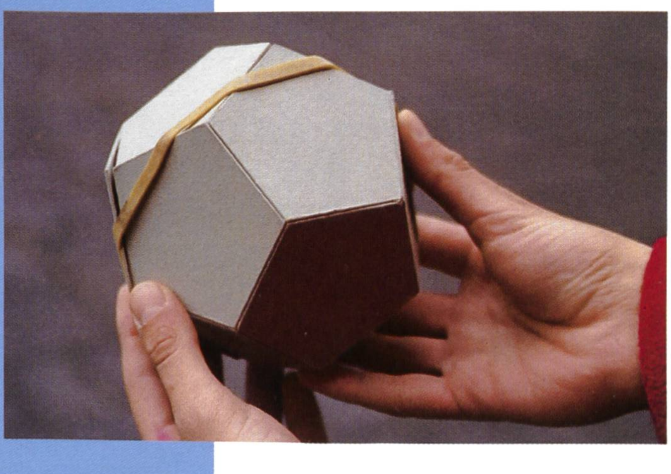


Abb. 25

16. Johannes Kepler und die fünf Platonischen Körper

Johannes Kepler (1571–1630) entdeckte die drei Gesetze der Planetenbewegung, die drei «Kepler'schen Gesetze». Physikalisch konnte er diese Gesetze noch nicht herleiten, Newton war noch nicht einmal geboren. Kepler war stark in Vorstellungen von göttlicher Harmonie verhaftet. Zu seiner Zeit kannte man nur die sechs mit freiem Auge sichtbaren Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. Dass es gerade sechs Planeten sind, konnte kein Zufall sein.

Dazwischen sollten wohl die fünf Platonischen Körper hineinpassen.

In seinem Glauben an platonische Zahlen- und Figurenmystik pröbelte er und meinte herausgefunden zu haben, welche Platonischen Körper zwischen welchen Planetenbahnen einzufügen sind.

Kepler wusste auch, dass die Planetenbahnen nicht genaue Kreise, sondern Ellipsen sind. Also fügte er für jede Planetenbahn noch einen gewissen Spielraum ein. Tabelle 3 zeigt, dass die Bahnradien nach der keplerschen Vorstellung gar nicht so weit von den tatsächlichen Werten abweichen.

	Bahnradien nach Kepler	tatsächliche Bahnradien
Saturn	1305 Mill. km	1427 Mill. km
Hexaeder		
Jupiter	685 Mill. km	778 Mill. km
Tetraeder		
Mars	208 Mill. km	228 Mill. km
Dodekaeder		
Erde	150 Mill. km	150 Mill. km
Ikosaeder		
Venus	108 Mill. km	108 Mill. km
Oktaeder		
Merkur	57 Mill. km	57 Mill. km

Tabelle 3

Abb. 27 zeigt eine Darstellung des Keplerschen Weltsystems aus seinem Mysterium Cosmographicum.

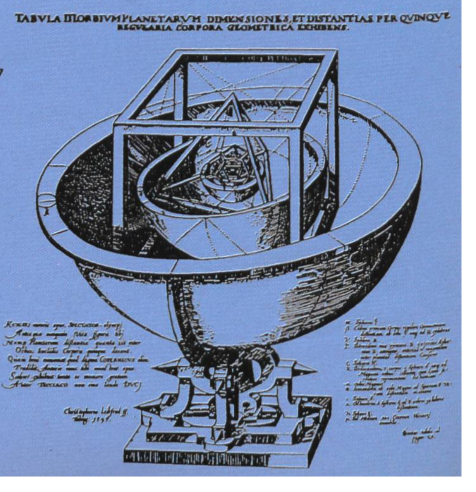


Abb. 27

17. Warum es keine eckigen Seifenblasen gibt

Reguläre Polyeder bieten Gelegenheit für Berechnungen. Für Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder ist die Berechnung von Volumen und Oberfläche nicht allzu schwierig. Man braucht lediglich gute Abbildungen, den Pythagoreischen Lehrsatz und natürlich auch die Hilfe der Lehrperson. Dann sollte das wohl zu schaffen sein.

Die Berechnungen für Dodekaeder und Ikosaeder hingegen sind sehr anspruchsvoll.

Tabelle 4 enthält eine Reihe von Formeln. Neben den regulären Polyedern ist auch die Kugel mit aufgenommen.

Zeile 1:
Berechnung von r bei gegebenem a.
Zeile 2:
Berechnung von a bei gegebenem r.
Zeile 3:
Berechnung von V bei gegebenem a.
Zeile 4:
Berechnung von V bei gegebenem r.
Zeile 5:
Berechnung von O bei gegebenem a.
Zeile 6:
Berechnung von O bei gegebenem r.

Nun zu den **Seifenblasen**. Interessant ist die Berechnung der Oberfläche O bei gegebenem Volumen V.

In Tabelle 5 ist angenommen, dass alle Polyeder (und auch die Kugel) das Volumen V = 1 besitzen. Man berechnet als ersten Schritt die Seitenkante a (bei der Kugel geht das natürlich nicht) und daraus die Oberfläche O.

Man sieht: Unter allen Polyedern mit gleichem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche. Das weiss natürlich die Seifenblase und nachdem sie auf Grund ihrer Oberflächenspannung bestrebt ist, ihre Oberfläche möglichst klein zu halten, formt sie sich zu einer Kugel.

Würfelförmige Seifenblasen zu erzeugen, wäre wohl ein Ding der Unmöglichkeit. Oder gehts am Ende doch?

a = Seitenkante, r = Radius der Umkugel, V = Volumen, O = Oberfläche

		Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder	Kugel
Zeile 1	r =	$a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$	$a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$	$a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$	$a\cdot\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$	$a\cdot\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	
Zeile 2	a =	$r\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}$	$r\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$	$r\cdot\sqrt{2}$	$r\cdot\frac{4}{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}$	$r\cdot\frac{4}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$	–
Zeile 3	V =	$a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$	a^3	$a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}$	$a^3\cdot\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$	$a^3\cdot\frac{5\cdot(3+\sqrt{5})}{12}$	–
Zeile 4	V =	$r^3\cdot\frac{8}{9\sqrt{3}}$	$r^3\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$r^3\cdot\frac{4}{3}$	$r^3\cdot\frac{2}{9}\sqrt{30(3+\sqrt{5})}$	$r^3\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$r^3\cdot\frac{4\pi}{3}$
Zeile 5	O =	$a^2\cdot\sqrt{3}$	$a^2\cdot 6$	$a^2\cdot 2\sqrt{3}$	$a^2\cdot 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$a^2\cdot\sqrt{3}$	–
Zeile 6	O =	$r^2\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$r^2\cdot 8$	$r^2\cdot 4\sqrt{3}$	$r^2\cdot\frac{8}{3+\sqrt{5}}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$r^2\cdot\sqrt{3}\cdot(10-2\sqrt{5})$	$r^2\cdot 4\pi$

Tabelle 4

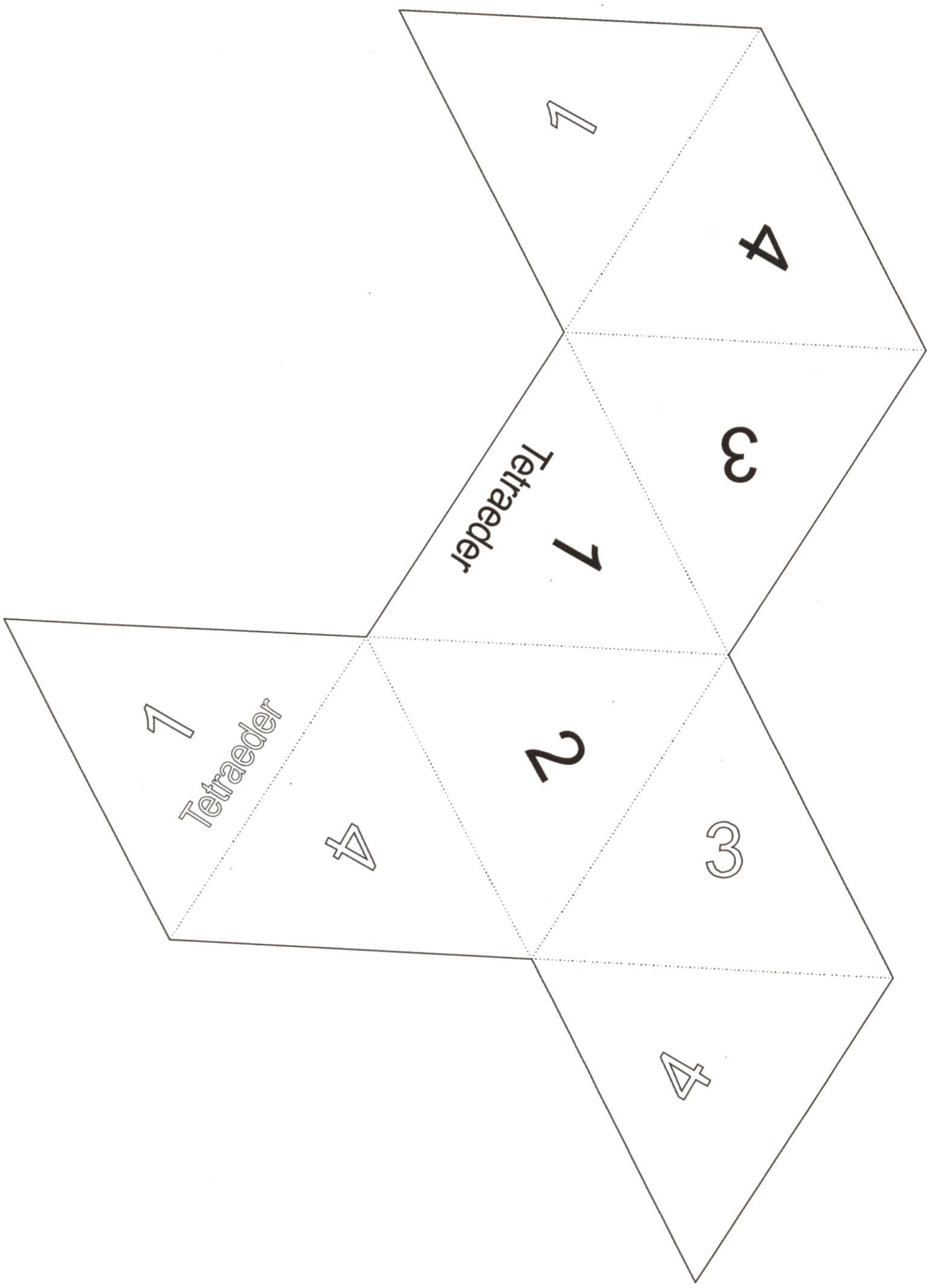
	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder	Kugel
V =	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a =	2.0396	1.0000	1.2849	0.5072	0.7710	—
r =	1.2490	0.8660	0.9086	0.7107	0.7333	0.6204
O =	7.2056	6.0000	5.7191	5.3116	5.1483	4.8360

Tabelle 5

Kopiervorlage 1

A1

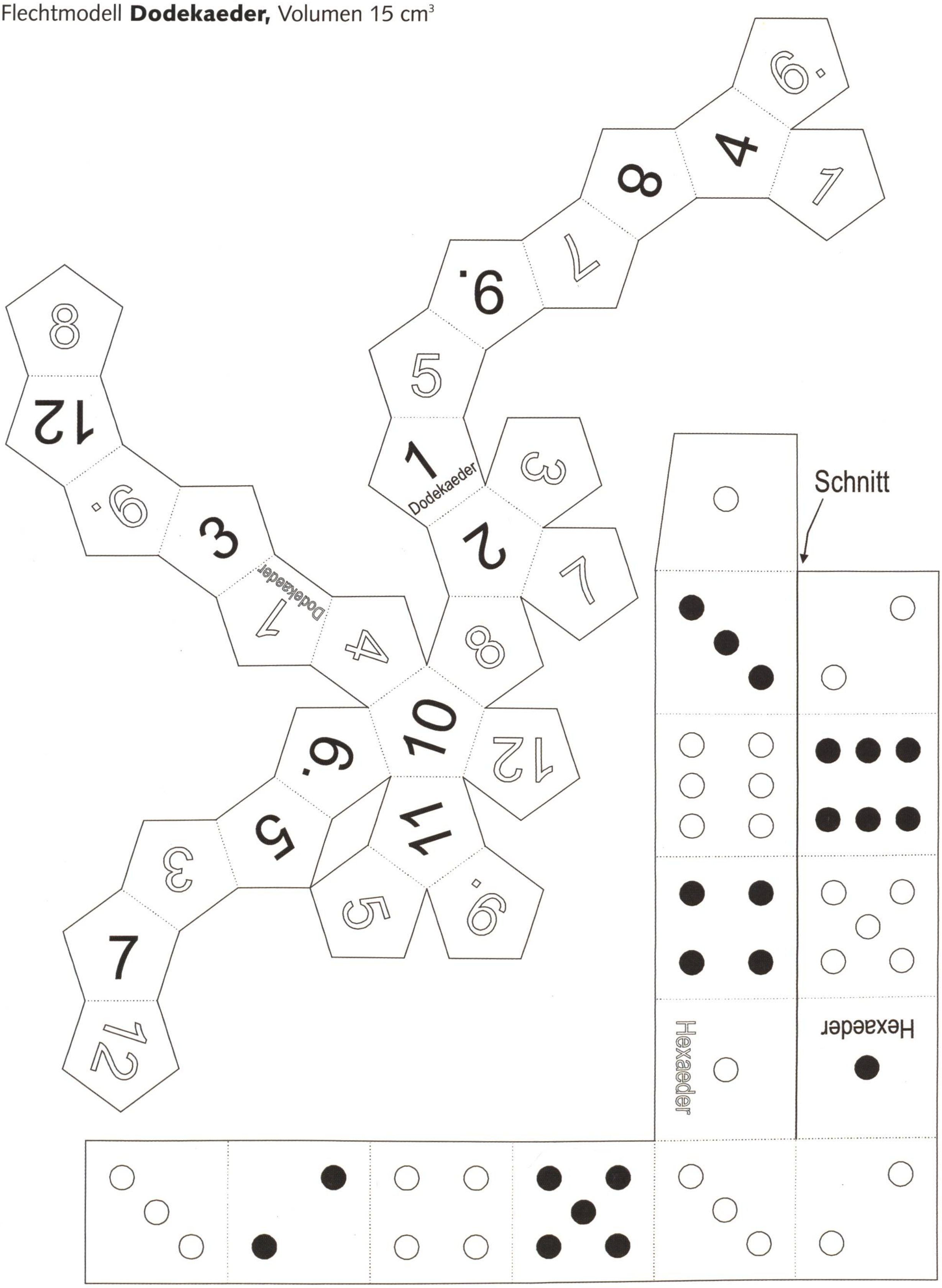
Flechtmodell **Tetraeder,** Volumen 15 cm^3



Kopiervorlage 2

A2

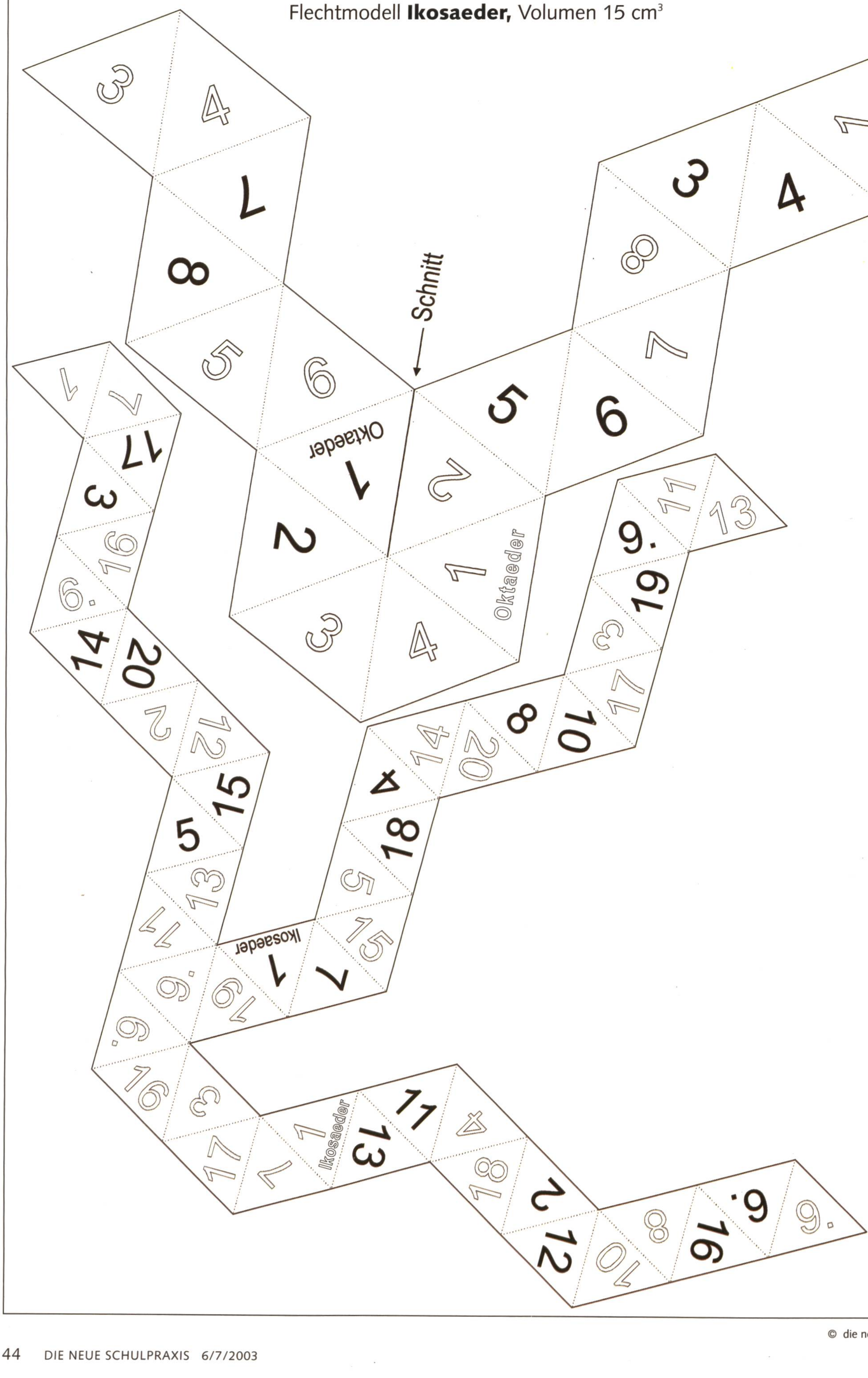
Flechtmodell **Hexaeder,** Volumen 15 cm³
Flechtmodell **Dodekaeder,** Volumen 15 cm³



Kopiervorlage 3

A3

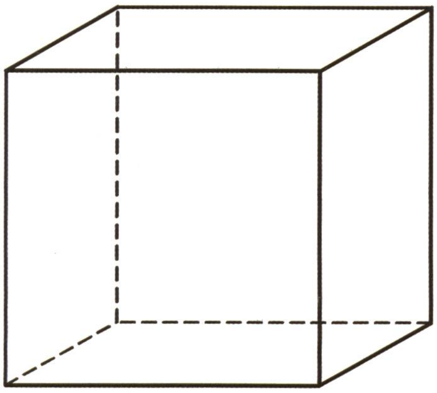
Flechtmodell **Ikosaeder,** Volumen 15 cm^3



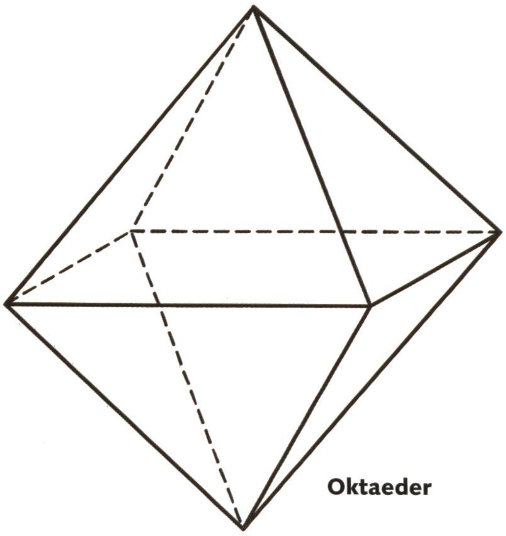
Kopiervorlage 4

A4

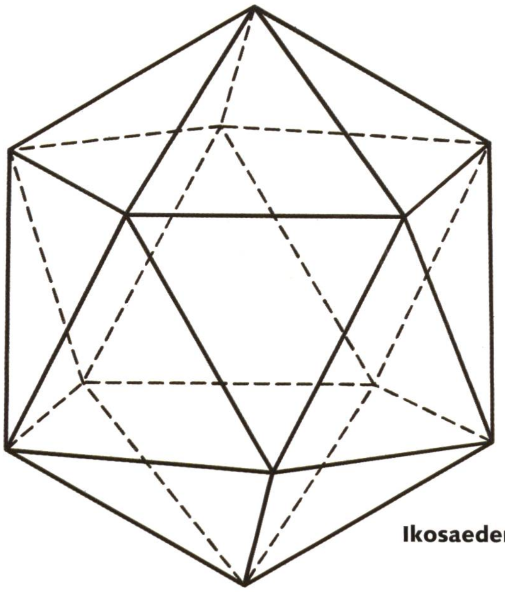
Dualität: Verbinden Sie die Mittelpunkte benachbarter Flächen



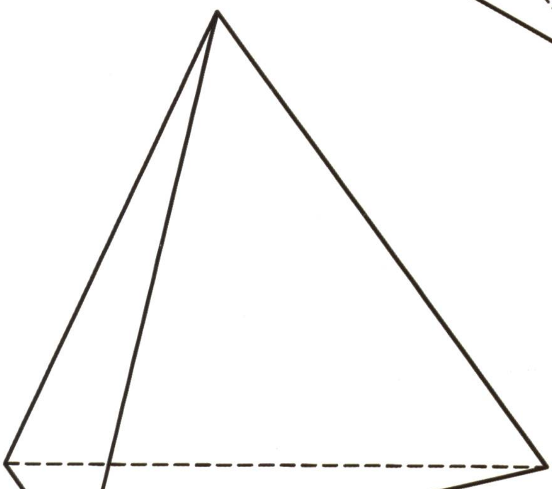
Hexaeder (Würfel)



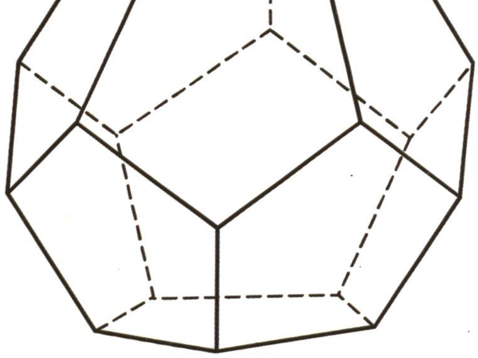
Oktaeder



Ikosaeder



Tetraeder

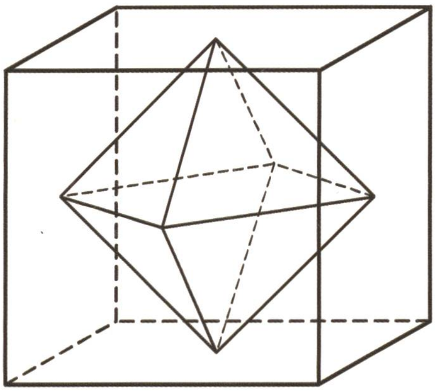


Dodekaeder

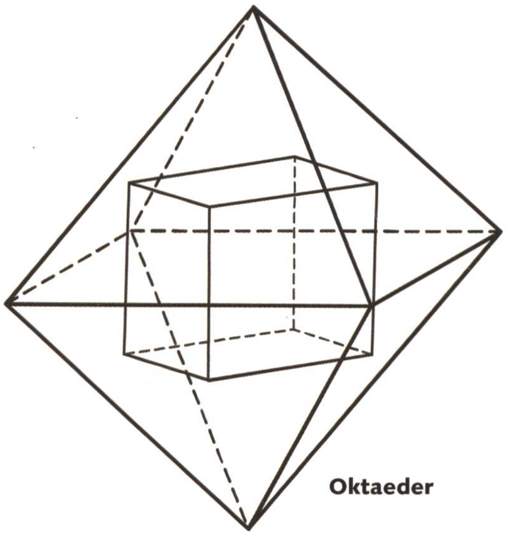
Kopiervorlage 5

A5

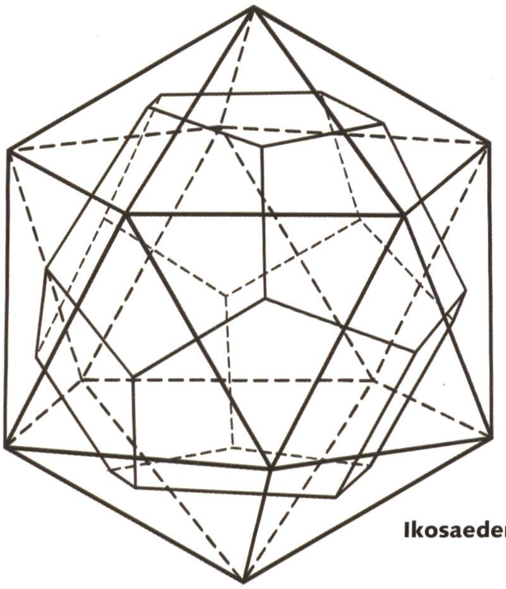
Dualität: Lösung



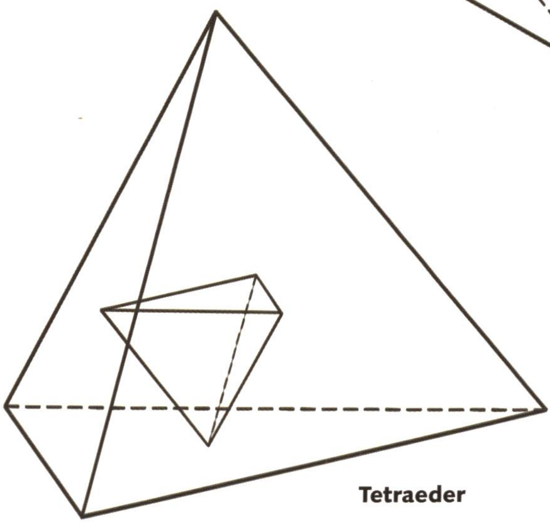
Hexaeder (Würfel)



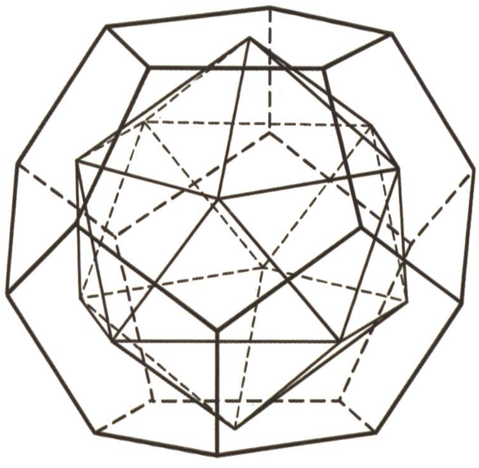
Oktaeder



Ikosaeder



Tetraeder

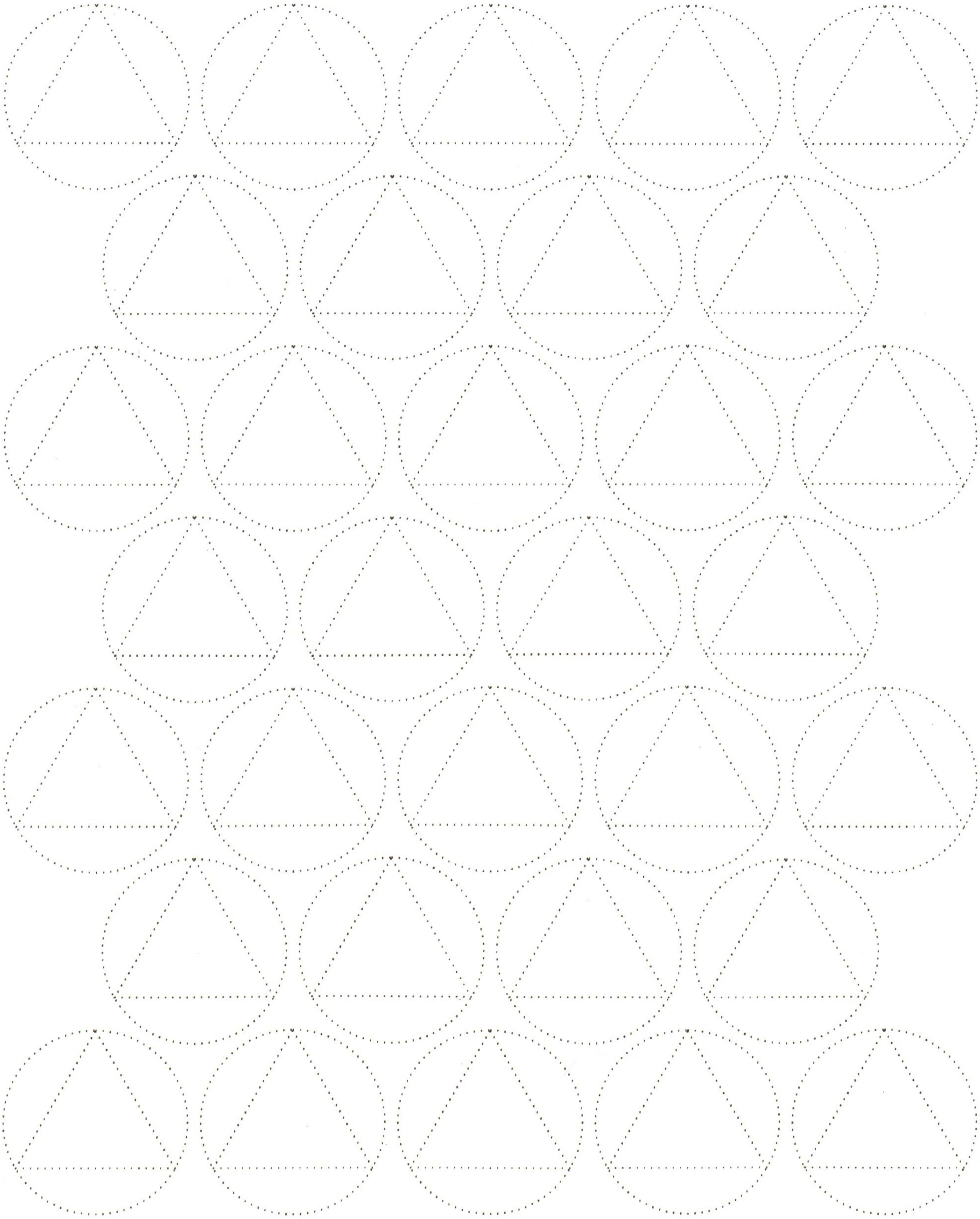


Dodekaeder

Kopiervorlage 6

A6

Kopieren Sie auf festeres (buntes) Papier, ziehen Sie die Konturen der Dreiecke mit einem Kugelschreiber kräftig nach, schneiden Sie 20 Scheibchen aus, falten Sie entlang der nachgezogenen Linien und kleben Sie die Einzelelemente zu einem Ikosaeder (oder Oktaeder) zusammen.



Origamics

Papierfalten mit mathematischem Spürsinn

Hans-Wolfgang Henn, Dortmund

Sicher kennen Sie alle die wunderschönen Gebilde, die kundige Hände aus farbigem Papier falten können. Es handelt sich um die uralte japanische Kunst des Origami, einem Wort, das die beiden Wortteile ori für Falten und kami für Papier hat. Das Wort kami wandelt sich in Verbindung mit dem ori zu gami. Traditionell wird das Kunstwerk aus einem quadratischen Stück Papier ohne Schneiden, nur durch Falten erzeugt. So werden aus einem simplen Stück farbigem Papier hüpfende Frösche, prachtvolle Blumen und vielerlei andere Figuren.

Im Jahr 2000 war der grosse internationale Kongress für Mathematikdidaktik in Tokio. Es gab natürlich auch eine riesige Origami-Ausstellung (Abb. 1 und 2 zeigen einige Beispiele) und, noch schöner, eine Origami-Werkstatt, wo wir unter fachkundiger Anleitung falten durften. So ist z.B. die gefaltete Schnecke entstanden. Dort habe ich meine Liebe zu Origami entdeckt!

Ganz bestimmt haben Sie selbst schon einmal Papierflieger gefaltet und sind damit selbst Origami-Künstler geworden. Am 22.11.2002 ist in Bulgarien sogar die in Abb. 3 gezeigte Origami-Briefmarke erschienen: Eine aus Papier gefaltete Friedenstaube erinnert an den 30. Jahrestag der KSZE (Konferenz für Sicherheit und Zusammenarbeit in Europa).

Beachten Sie die Symmetrieachsen, die beim Falten von Papierfliegern auftreten – schon sind wir mitten in der Geometrie! Diese Verbindung zur Mathematik ist so fruchtbar, dass sich eine eigene Origami-Tradition hierfür gebildet hat, die Kunst des Origamics: Dies ist eine Abkürzung für die Verbindung Origami and Mathematics. Der Pionier für mathematisches Papierfalten ist der in der Zwischenzeit pensionierte japanische Biologieprofessor Haga Kazuo, der sehr viele mathematische Phänome beim Papierfalten studiert hat. Herr Kazuo hatte beim zweiten internationalen Kongress für «Origami Science and Scientific Origami» im Jahr 1994 das Wort Origamics vorgeschlagen.

Betreten Sie mutig das Land des mathematischen Origami! Erleben Sie den Spass am Falten und den Reiz, mathematische Zusammenhänge aufzuspüren! In den folgenden Abschnitten sind Origamics-Aufgaben, zum Teil einfach, zum Teil etwas komplizierter, enthalten. Zu allen Aufgaben finden Sie am Ende dieses Beitrags Lösungshinweise, die Sie aber erst dann zu Rate ziehen sollten, wenn Sie selbst lange genug geknobelt haben.

Abbildung 1

Abbildung 3

Abbildung 2

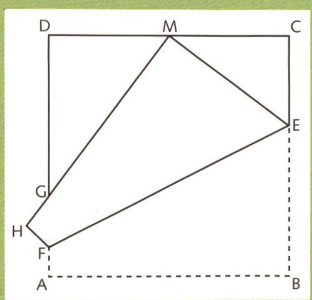


Abbildung 4

Der Satz von Haga

Unter den Jüngern des mathematischen Papierfaltens wird immer wieder eine Faltkonstruktion von Haga Kazuo als der Satz von Haga zitiert: Sie beginnen mit einem quadratischen Papierstück ABCD (vgl. Abb. 4). Markieren Sie durch einen leichten Faltknick die Mitte M der oberen Seite und falten dann, wie in der Abbildung gezeigt, die rechte untere Ecke B auf M. Der Satz von Haga behauptet nun, dass die drei entstehenden Dreiecke MEC, GMD und FGH ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit dem Seitenverhältnis $3 : 4 : 5$ sind. Ausserdem beträgt die Streckenlänge $\overline{AG}$ ein Drittel der Seitenlänge $\overline{AD}$ des Ausgangsquadrats. Wenn Sie die Faltkonstruktion sorgfältig nachvollziehen und analysieren, können Sie ganz bestimmt den Satz von Haga beweisen!

Wenn der Satz von Haga stimmt, können Sie damit exakt eine Seite in drei gleich lange Stücke teilen. Markieren Sie jetzt auf einem neuen quadratischen Blatt zuerst M wie eben und dann die Mitte N der Strecke MC. Dann falten Sie B auf N. Was beobachten Sie jetzt?

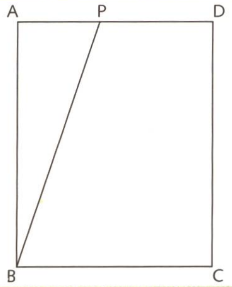


Abbildung 5a

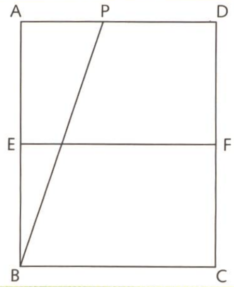


Abbildung 5b

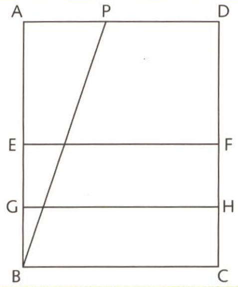


Abbildung 5c

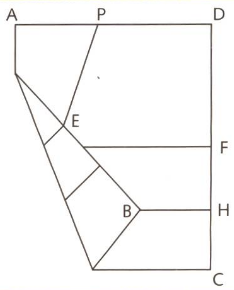


Abbildung 5d

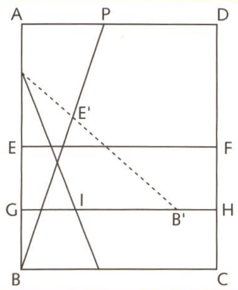


Abbildung 5e

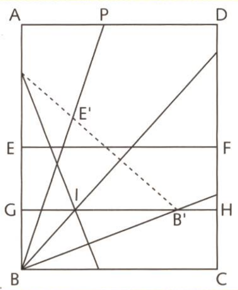


Abbildung 5f

Abbildung 7

Die Drittelung eines beliebigen Winkels

Origamics ist ein Wunderland: Die alten Griechen versuchten vergeblich, nur mit Zirkel und Lineal einen gegebenen Winkel zu dritteln. Über mehr als 2000 Jahre verzweifelten Berufs- und Hobby-Mathematiker an dieser Aufgabe, bis endlich im 19. Jahrhundert der Beweis gelang, dass diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal unlösbar ist! Kein Problem für uns! Die folgende Anleitung zeigt Ihnen, wie Sie einen beliebigen Winkel durch eine Faltkonstruktion exakt dritteln können!

Nehmen Sie ein rechteckiges Blatt (DIN A4-)Papier ABCD und falten Sie den zu drittelnden Winkel $\alpha = \sphericalangle$ CBP (Abb. 5a). Falten Sie dann eine beliebige Parallele EF zu BC (Abb. 5b) und die Mittelparallele GH von EF und BC (Abb. 5c). Falten Sie anschliessend eine Ecke so ab, dass E auf BP und gleichzeitig B auf GH liegt (Abb. 5d). Markieren Sie die Bildpunkte als B' und E' und falten zurück (Abb. 5e). Die letzte Faltkante schneidet GH in I. Die Linien BI und BB' dritteln dann den Ausgangswinkel α (Abb. 5f).

Jetzt müssen Sie nur noch durch elementargeometrische Schlüsse beweisen, dass tatsächlich der Winkel gedrittelt wurde. Natürlich sollten Sie auch überlegen, wieso diese Faltkonstruktion nicht mit Zirkel und Lineal nachvollziehbar ist!

Das Delische Problem der Würfelverdopplung

Auch dieses Problem gehört zu den berühmten Aufgaben der griechischen Antike. Der Name beruht nach antiken Berichten auf dem Orakel von Delphi, das den Deliern aufgab, zur Abwehrung einer Pest den würfelförmigen Altar ihres Tempels zu verdoppeln. Es handelt sich also um die geometrische Aufgabe, einen Würfel mit doppeltem Rauminhalt eines gegebenen Würfels zu konstruieren. Hat der Ausgangswürfel die Kantenlänge 1 (in irgendeiner Einheit gemessen), so hat der grössere Würfel die Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$. Das Delische Problem besteht somit in der Konstruktion dieser dritten Wurzel. Seit dem 19. Jahrhundert weiss man von der prinzipiellen Unmöglichkeit, diese Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Mit Origamics ist das dagegen kein Problem: Sie beginnen, wie in Abb. 6a gezeigt, mit einem quadratischen Stück Papier, das zuerst in drei gleiche parallele Teile gefaltet wird. Da hilft der Satz von Haga! Nun müssen Sie so falten, dass die Ecke B als B' auf die Seite AD und gleichzeitig der Punkt E als E' auf die Strecke HG kommt. Abb. 6b zeigt das Faltergebnis. Jetzt müssen Sie nur noch beweisen, dass nach dem Falten die Ecke B' die Seite AD im gewünschten Verhältnis teilt:

$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}$$

Abschliessend können Sie noch weiter mit Zirkel und Lineal, etwa unter Verwendung der Strahlensätze, eine einzelne Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren.

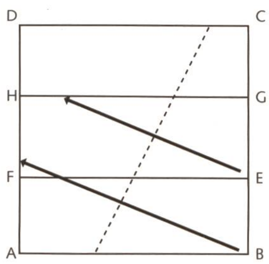


Abbildung 6a

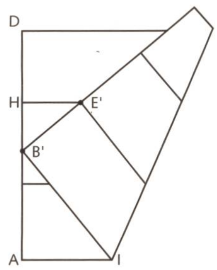


Abbildung 6b

Regelmässige n-Ecke

Schon immer waren möglichst symmetrische Figuren und Körper für Künstler, Kunsthandwerker und natürlich auch für Mathematiker besonders interessant. Nach dem Kreis weisen die regelmässigen n-Ecke die meisten Symmetrieachsen auf, also n-Ecke, die gleich lange Seiten und gleich grosse Innenwinkel haben. Der grosse Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), er ist in Abb. 7 auf einer deutschen Briefmarke aus dem Jahr 1955 abgebildet, hat als Erster eine vollständige Theorie

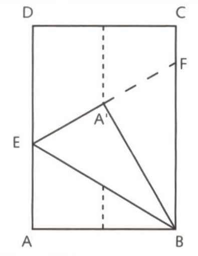


Abbildung 8a

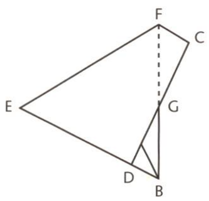


Abbildung 8b

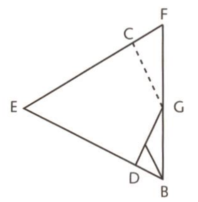


Abbildung 8c

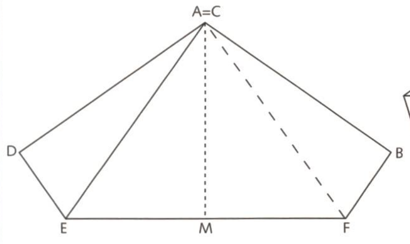


Abbildung 10a

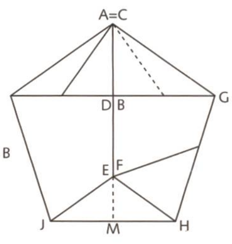


Abbildung 10b

Abbildung 9

dieser regelmässigen n-Ecke geschaffen und beschrieben, welche man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann und welche nicht. Wir beschäftigen uns hier mit den einfachsten regelmässigen n-Ecken und versuchen, gleichseitige Dreiecke, Quadrate und regelmässige Fünfecke zu falten.

a. Für ein gleichseitiges Dreieck beginnen Sie mit einem DIN-A4-Blatt ABCD. Sie falten zuerst die Mittellinie zur längeren Seite und dann die Kante BE so, dass die Ecke A als A' auf die Mittellinie kommt (Abb. 8a). Nun falten Sie weiter zunächst an der Faltkante EA' so, dass D auf die Seite EB kommt (Abb. 8b). Am Ende falten Sie noch das überstehende Stückchen an der Kante GF, bis Sie ein gleichseitiges Dreieck BFE wie in Abb. 8c haben. Dass dies eine exakte Faltkonstruktion ist, können Sie sicher begründen! Jetzt sehen Sie auch, dass Sie mit einem beliebigen Stück rechteckigem Papier beginnen können, die längere Seite muss nur lang genug sein (wie lange?). Ein quadratisches Papierstück würde nicht genügen.
Frage am Rande: Beim DIN-Format verhalten sich die Seiten wie $1 : \sqrt{2}$. Dass man gerade dieses Verhältnis gewählt hat, hängt auch mit Papierfalten zusammen! Wie?

b. Ein Quadrat aus einem DIN-A4-Blatt zu falten, ist zu einfach für Sie. Nehmen Sie irgendein möglichst unregelmässiges, z.B. aus einem grossen Zeitungsblatt gerissenes Papierstück und falten Sie ein Quadrat!

c. Das regelmässige Sternfünfeck ist auch als Pentagramm bekannt. Das Pentagramm besteht also aus den Diagonalen des regelmässigen Fünfecks, die sich in einem Zug zeichnen lassen, und war das geheime Erkennungszeichen der Pythagoreer (Abb. 9). Bei ihnen hat das regelmässige Fünfeck vermutlich eine entscheidende Rolle bei der Entdeckung der Inkommensurabilität gespielt. Sie kennen wahrscheinlich zur Einführung der irrationalen Zahlen den Beweis, dass die Seite und die Diagonale eines Quadrats inkommensurabel sind. Das Pentagramm kommt auch schon auf alten Münzen Kleinasiens und Galliens vor. Den Kelten war das Pentagramm heilig, und es heisst nach den Druiden, den keltischen Priestern, auch Drudenfuss. Dieser Drudenfuss blieb im Mittelalter das Kennzeichen aller geheimen Gesellschaften und kam in den Ruf, dass man mit ihm den Teufel bannen könne. Auf diese Bedeutung wird an der bekannten Stelle in Goethes «Faust» angespielt: Mephistopheles als «ein Teil von jener Kraft, die stets das Böse will und stets das Gute schafft», hat Schwierigkeiten bei der Überwindung des Drudenfusses in Fausts Studierzimmer. In der Architektur der gotischen Masswerke kommen viele regelmässige n-Ecke, so auch das Fünfeck, vor.

Zum Falten eines Fünfeckes sollten Sie folgende sehr schnelle Methode versuchen. Sie beginnen wieder mit einem DIN-A4-Blatt ABCD. Falten Sie zunächst die Diagonale AC und dann das Blatt wieder auf. Nun wird die Ecke A auf die Ecke C gefaltet (Abb. 10a). Werden jetzt die Seiten ED und FB auf die Diagonale MA gefaltet, so entsteht ein Fünfeck (Abb. 10b). Leider ist es nicht ganz ein regelmässiges Fünfeck; prüfen Sie nach, wie stark das gefaltete Fünfeck von der Regelmässigkeit abweicht.

Der Fünfeckknoten

Wir können aber ein regelmässiges Fünfeck auch exakt falten. Die Abbildung 11 zeigt, wie einfach dies geht: Nehmen Sie einen langen und schmalen Papierstreifen und machen aus ihm einen Knoten. Wenn Sie ihn sorgfältig platt drücken, so entsteht ein Fünfeck. Führen Sie dies durch und begründen Sie, dass es sich um ein regelmässiges Fünfeck handelt!

LÖSUNGSHINWEISE

Der Satz von Haga

Der Einfachheit halber sei die Kantenlänge des Ausgangsquadrats 8 Längeneinheiten, also ist $\overline{MC} = 4$. Weiter seien $x = \overline{EC}$ und $y = \overline{EM} = \overline{EB}$. Die Gleichung $x + y = 8$ und der Satz des Pythagoras im Dreieck ECM, also $y^2 = 4^2 + x^2$ liefern zusammen sofort $x = 3$ und $y = 5$. Die drei fraglichen rechtwinklige Dreiecke haben alle die gleichen Winkel, sind also ähnlich. Angewandt auf die Dreiecke GMD und ECM folgt $\overline{DG} : 4 = 4 : 3$, also wie behauptet

$$\overline{DG} = \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \cdot 8 \text{ und}$$

$$\overline{AG} = 8 - \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot \overline{AD}$$

Wenn wir in der Variante des Satzes von Haga den «Viertelpunkt» N zum Falten verwenden, so liefert die identische Überlegung, dass der dann dem Punkt G entsprechende Punkt die Seite AD im Verhältnis 2 : 3 teilt, was damit zur regelmässigen Fünfteilung dieser Seite führt.

Die Drittelung eines beliebigen Winkels

In Abb. 5f steht BI aufgrund der letzten Faltung senkrecht auf der gestrichelten Linie. Daher teilt BI das Dreieck BB'E' in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Das Lot von B' auf BC schneidet BC im Punkt R. Dann ist BRB' ein drittes zu den beiden ersten kongruentes rechtwinkliges Dreieck. Also sind die drei Winkel bei B, wie behauptet, gleich!

Das Einschieben der Punkte B und E in Abb. 5d ist keine mit Zirkel und Lineal mögliche Konstruktion.

Das Delische Problem der Würfelverdopplung

Zur einfacheren Rechnung setzen wir in Abb. 6b die Seitenlänge des Ausgangsquadrats als 3 an. Dann ist z.B. $\overline{B'E'} = 1$. Weiter seien $x := \overline{DB'}$, $y := \overline{AB'}$, $a := \overline{AI}$ und $b := \overline{IB'}$. Damit gilt zunächst $x + y = a + b = 3$. Da die Dreiecke AIB' und B'E'H ähnlich sind, gilt weiter

$\frac{a}{b} = \frac{x-1}{x}$, woraus sofort

$a = \frac{3x-3}{x}$ und $b = \frac{3}{x}$ folgt.

Ausserdem gilt $y = 3 - x$. Setzt man dies in die Pythagoras-Gleichung im rechtwinkligen Dreieck AIB' ein, so erhält man nach einigen Umformungen folgende Gleichung dritten Grades für x:
$3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0$.

Diese Gleichung wird nun etwas trickreich zum behaupteten Ergebnis umgeformt:
$x^3 = -2x^3 + 18x^2 - 54x + 54 =$
$2\,(27 - 27x + 9x^2 - x^3) = 2(3 - x)^3 = 2y^3$.

Wieder ist das Einschieben der Strecke BE eine Konstruktion, die nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist.

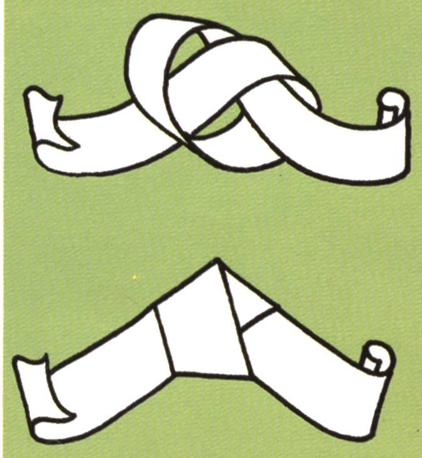


Abbildung 11

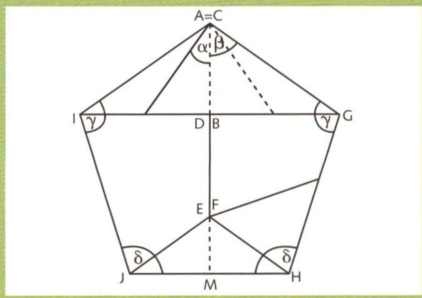


Abbildung 12a

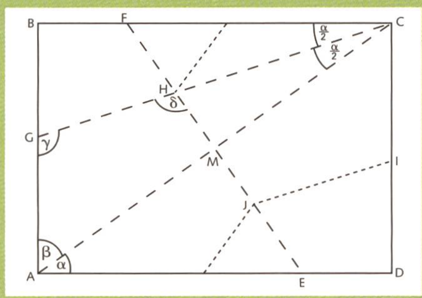


Abbildung 12b

Gleichseitiges Dreieck

In Abb. 8a sind die Dreiecke ABE und EBA' wegen der Faltung kongruent. Weiter ist A' die Mitte von EF, sodass auch die Dreiecke EBA' und A'BF kongruent sind. Zusammen folgt, dass das Dreieck EBF gleichseitig ist. Die weiteren Faltschritte beziehen sich auf dieses Dreieck.

Quadrat

Für diese leichte Aufgabe brauchen Sie bestimmt keine Anleitung!

Näherungskonstruktion für das Fünfeck

Für diese Konstruktion ist es wesentlich, dass wir DIN-A-Papier verwenden. Ein DIN-A0-Blatt ist definiert als Rechteck mit Flächeninhalt 1 m^2 und einem Seitenverhältnis von $1 : \sqrt{2}$. Es hat also die Seiten

$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}m}\, m \approx 841 \text{ mm und}$$

$$b = \sqrt[4]{2}m \approx 1189 \text{ mm}$$

Das DIN-A0-Blatt wird an der kürzeren Seite zusammengefaltet, und man erhält zwei DIN-A1-Blätter mit halbem Flächeninhalt und wieder dem gleichen Seitenverhältnis und so weiter. Beim DIN-A4-Blatt sind dann die entstehenden Seiten auf mm gerundet 210 mm und 297 mm lang.

Um die Fünfeckkonstruktion zu untersuchen, werden auf dem nach Abb. 10b gefalteten Blatt alle Ecken und die Fünfeckwinkel eingezeichnet, wobei gleich verwendet wird, dass die Winkel bei G und I und die Winkel bei H und J aus Symmetriegründen gleich sind (Abb. 12a). Dann wird das Blatt wie in Abb. 12b aufgefaltet. Aus dem Seitenverhältnis ergeben sich sofort die ersten beiden Winkel:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \beta = \arctan(\sqrt{2}).$$

Hieraus ergibt sich der erste Fünfeckwinkel bei der oberen Ecke «A = C» in Abb. 12a zu
$\varepsilon = 2\beta = 2 \cdot \arctan(\sqrt{2}) \approx 109{,}47°$.

Unter Beachtung, dass CG als Faltlinie die Winkelhalbierende des Winkels BCA ist und unter Verwendung des Winkelsummensatzes im Dreieck und im Viereck folgt, dass alle anderen vier Fünfeckwinkel gleich sind:

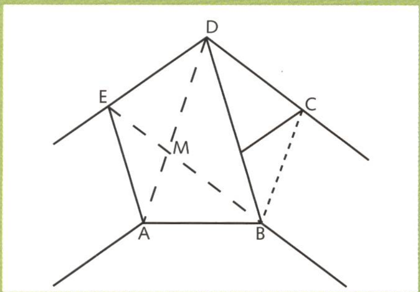


Abbildung 13

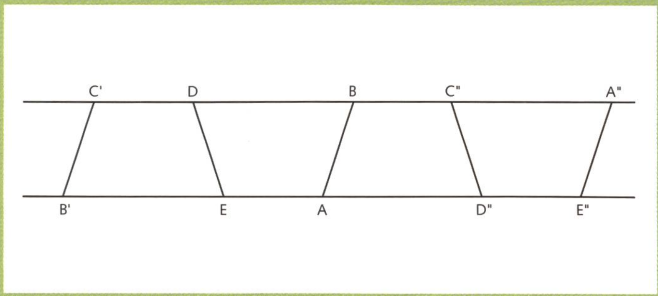


Abbildung 14

$$\gamma = \delta = 90° + \frac{\alpha}{2} = 90° +$$

$$90° + \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 107{,}63°$$

Der Grössere ist also ca. 1,7 % grösser als der Kleinere. Im Vergleich dazu hat das regelmässige Fünfeck Winkel von 108°. Aus Abb. 12b kann man auch leicht durch Winkelbetrachtungen in den verschiedenen Dreiecken die Seitenlängen des Fünfecks berechnen, wobei wir die kürzere Seite des Rechtecks auf 1 und damit die längere auf $\sqrt{2}$ normieren. Es gilt mit α wie oben

$$\overline{AG} = \overline{AI} = \overline{JH} = \sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 0{,}5505,$$

$$\overline{GH} = \overline{IJ} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx 0{,}5752,$$

d. h. die längere Seite ist ca. 4,5% länger.

Der Fünfeckknoten

Man geht zunächst davon aus, dass ABCDE wirklich ein reguläres Fünfeck ist. Dann ist das Viereck ABDE in Abb. 13 ein gleichschenkliges Trapez mit Winkeln von 108° bei A und E und von 72° bei B und D und mit Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED}$. Der Winkelsummensatz in den gleichschenkligen Dreiecken ADE und ABE liefert, dass AD Winkelhalbierende bei D und BE Winkelhalbierende bei B ist. Also sind die Dreiecke ABD und EBD kongruente gleichschenklige Dreiecke mit Winkeln von 72° bei A und B und von 36° bei D und analog beim zweiten Dreieck. Nun sollten Sie bei Ihrem Fünfeckknoten noch die Linien AE und BC markieren, den Knoten wieder auffalten und Ecken, die «übereinander» liegen, mit demselben Buchstaben bezeichnen. So erhalten Sie eine Figur wie in Abb. 14.

Jetzt wird die Konstruktion klar: Man beginnt auf einem neuen Papierstreifen mit dem Konstruieren eines gleichschenkligen Trapezes ABDE mit den Winkeln von 108° bei A und E und von 72° bei B und D und mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED}$. Die anderen drei zum ersten kongruenten Trapeze entstehen wie in Abb. 14. Nun faltet man zuerst an der Kante AB, dann an der Kante C"D" und schliesslich an der Kante DE. Aufgrund der Winkel passt alles exakt zum regulären Fünfeckknoten zusammen. Um einen «richtigen» Knoten zu erhalten, muss noch das eine freie Ende des Papierstreifens geeignet durch eine Schlaufe gezogen werden.

Freie Unterkünfte für Klassen- und Skilager

Legende: V: Vollpension, H: Halbpension, G: Garni, A: Alle Pensionsarten

Bahn	Postauto	Bergbahn	Sessellift	Skilift	Langlaufloipe	Hallenbad	Freibad	Minigolf	Finnenbahn	Region	Adresse / Kontaktperson	noch frei 2003	Lehrerschlafzimmer	Schlafräume	Betten	Matratzen(lager)	Selbst kochen	Pensionsart	Aufenthaltsraum	Discoraum	Cheminéeraum	Spielplatz
■	■	■	■	■	■	■				**Airolo**	Funivie del San Gottardo, Rolf Albertin, CH-6780 Airolo Tel. 091 873 30 40, Fax 091 873 30 41	**auf Anfrage**	5	3		24		V H	■			
■	■		■	■	■					**Amden SG**	Naturfreundehaus Tscherwald, 1361 m ü. M., J. Keller Tel. 01 945 25 45	**nach Absprache**	■	■	21	40	■	A	■			■
■		■	■	■	■	■	■	■	■	**Bergün GR**	Jugendhaus Plazi Bergün, c/o Esther Fitze, Sardonastr. 5, 7000 Chur Tel./Fax 081 284 13 70, info@jugendhaus-plazi.ch	**auf Anfrage**	4	6	54		■		3			■
■	■	■	■	■	■	■	■	■		**Berner Oberland**	Alpenlodge, Under the Rock, 3860 Rosenlaui/Meiringen Tel. 079 311 16 38, Fax 033 971 62 38, www.alpenlodge.ch	**auf Anfrage**	2	4		24	■		■		■	■
	■	■				■	■			**Berner Oberland**	Alpinhütte Bäregg, beim Grimselpass Tel. 033 982 20 11, E-Mail: kwo@kwo.ch	**auf Anfrage**	1	4	2	60	■		■			
■				■	■					**Berner Oberland**	Gruppenunterkunft Moos, 3765 Oberwil i.S. Tel. 033 783 13 53, Fax 033 783 13 02	**auf Anfrage**	2	2		100	■		■			
■	■					■	■			**Berner Oberland**	Militärunterkunft Alp Scheidwegen, 3766 Boltigen, Tel. 033 773 64 08	**auf Anfrage**	3	3	8	150	■		■			
■	■		■	■	■					**Berner Oberland**	Ski- und Ferienhaus Kiental, Rumpf Ernst Tel. 033 676 21 46	**auf Anfrage**	3	4	5	70	■		■			■
■	■	■	■	■	■					**Bürchen VS**	Ferienhaus Stadt Luzern, Obergrundstrasse 1, 6002 Luzern Tel. 041 208 87 59, Fax 041 208 87 66, marta.roeoesli@stadtluzern.ch	**auf Anfrage**	3	12	54		■		■	■		■
■	■			■	■					**Engadin**	CVJM-Ferienheim, La Punt Chamues-ch, Tel. 071 222 98 39, Fax 071 222 98 24, stiftung.cvjm.lapunt@bluewin.ch	**auf Anfrage**	4	12	80	72	■		■			■
■	■		■	■						**Graubünden**	Berghaus Canetg, 7138 Surcuolm, Primarschulpflege, 8622 Wetzikon Tel. 01 931 23 01, Fax 01 931 32 94	**auf Anfrage**	4	8			■		■		■	■
	■	■	■	■	■					**Graubünden**	Ferienhaus «auf dem Sand», 7435 Splügen Tel. 081 650 90 30, Fax 081 650 90 31	**auf Anfrage**	2	8		36	■		■	■	■	
■	■	■		■	■	■		■		**Gruyère-Fribourg**	Haus der Begegnung, 1637 Charmey, Ferien, Seminare, Weiterbildung Tel. 026 927 58 18, Fax 026 927 58 19	**auf Anfrage**	5	21	100		A	■	■		■	
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	**Klosters Dorf**	Ferienhaus der Schule Dietikon, Gruoberhus, Guaweg 10, 7252 Klosters Dorf, Tel. 01 744 36 69, Fax 01 744 36 59	**auf Anfrage**			30		■		■		■	■
■		■	■	■	■					**Langwies/Arosa**	Ferienhaus Stadt Luzern, Obergrundstrasse 1, 6002 Luzern Tel. 041 208 87 59, Fax 041 208 87 66, marta.roeoesli@stadtluzern.ch	**auf Anfrage**	19		69			V/H	■			■

Freie Unterkünfte für Klassen- und Skilager

Legende: V: Vollpension, H: Halbpension, G: Garni, A: Alle Pensionsarten

Bahn	Postauto	Bergbahn	Sessellift	Skilift	Langlaufloipe	Hallenbad	Freibad	Minigolf	Finnenbahn	Region	Adresse / Kontaktperson	noch frei 2003	Lehrerschlafzimmer	Schlafräume	Betten	Matratzen(lager)	Selbst kochen	Pensionsart	Aufenthaltsraum	Discoraum	Cheminéeraum	Spielplatz
■	■	■		■	■				■	**Marbachegg LU**	Berghaus Eigerblick, Hr. Schumacher, 6196 Marbach Tel. 034 493 32 66	**auf Anfrage**	4	15	68	1	■		■	■	1	■
	■	■		■			■			**Oberrickenbach**	Ferienheim Stadt Luzern, Obergrundstrasse 1, 6002 Luzern Tel. 041 208 87 59, Fax 041 208 87 66, marta.roeoesli@stadtluzern.ch	**auf Anfrage**		31	98		■		■			■
	■		■	■	■					**Obersaxen Mundaun**	Bergbahnen Piz Mundaun AG, 7138 Surcuolm E. Senn, Tel. 081 933 13 44	**auf Anfrage**	2	4	4	44		A	■			■
■	■	■	■	■	■	■	■			**Oberwallis**	Adolf Anthamatten, Rosenheim, 3910 Saas-Grund Tel. 027 957 26 69, Natel 079 220 78 71	**auf Anfrage**	8	20	60		■		■	2		■
■	■	■		■	■	■				**Quinto**	Municipio di Quinto, 6777 Quinto Tel. 091 868 11 56, Fax 091 868 13 71	**auf Anfrage**			120		■					■
■	■	■	■	■	■	■	■			**Scuol**	Ferienheim «Gurlaina», Scuol, Nicole Rüttimann, Schachenstrasse 13 6010 Kriens, Tel. 041 329 63 42, Fax 041 329 64 98	**auf Anfrage**	1	1		76	■		■			■
■	■	■		■	■					**Splügen GR**	Wädenswiler Ferienhaus Splügen, Tel. 081 664 13 34 oder 01 789 74 40	**auf Anfrage**	3	6		50		V	■			■
	■	■	■	■	■	■		■		**Sörenberg LU**	Schulhaus Sörenberg, Familie Pius Stadelmann, 6174 Sörenberg Tel. 041 488 15 22	**auf Anfrage**	5	4	15	64	■		■			■
■	■			■		■			■	**Schüpfheim LU**	Haus an der Emme, Ruth Navoni, Schächli 28, 6170 Schüpfheim Tel. 041 484 17 71, Tel./Fax 041 484 23 14, www.hausanderemme.ch	**auf Anfrage**	3	4	130		■		2	1		■
	■	■				■			■	**Tessin**	Hotel Serpiano, 6867 Serpiano, Tel. 091 986 20 00 Fax 091 986 20 20, www.serpiano.ch, info@serpiano.ch	**auf Anfrage**	■	■		■		A	■		■	■
■	■						■			**Thunersee Berner Oberland**	Gwatt-Zentrum, Hans Kipfer, Geschäftsführer, 3645 Gwatt Tel. 033 334 30 30, Fax 033 334 03 31	**auf Anfrage**					■	A	■	■	■	■
	■	■	■	■	■					**Wallis Kippel**	Ferienheim «Maria Rat» Kippel Nicole Rüttimann, Schachenstrasse 13, 6010 Kriens, Tel. 041 329 63 42	**auf Anfrage**	3	6		50	■		3	■		■
■		■		■						**Wallis**	Gruppenunterkunft Gspon, 3933 Staldenried, Abgottspon Selina Tel. 027 952 16 94, Fax 027 952 16 44, E-Mail: selina.abgottspon@gmx.ch www. staldenried.ch	**auf Anfrage**	6	6	34	86	■		■			■
■		■	■	■	■	■	■	■	■	**Wallis**	Berghaus der Gemeinde Möriken-Wildegg, 3992 Bettmeralp Tel. 062 887 11 12, Fax 062 887 11 55, Hauswartin Frau Drobac Tel. 027 927 38 40, E-Mail Brigitte.Frei@moeriken-wildegg.ag.ch	**auf Anfrage**	4	16	13	58	■		■	■	■	■

Fenster zum Lehren und Lernen in verschiedenen Unterrichtskulturen

Videobasierte Unterrichtsforschung

Anlässlich einer Fachtagung an der ETH Zürich präsentierte eine Forschungsgruppe des Pädagogischen Instituts der Universität Zürich unter Leitung von Prof. K. Reusser am 10. Mai 2003 erstmals die Ergebnisse einer schweizerisch-internationalen Videostudie zum Mathematikunterricht. Untersucht wurde die Gestaltung und Qualität des Unterrichts in der Schweiz im Vergleich zu sechs Ländern. Die schweizerische Videostudie stellt erstmals Daten über die Praxis des schweizerischen Mathematikunterrichts auf nationaler Ebene zur Verfügung. *Jo*

Dr. Kurt Reusser

1. Einleitung

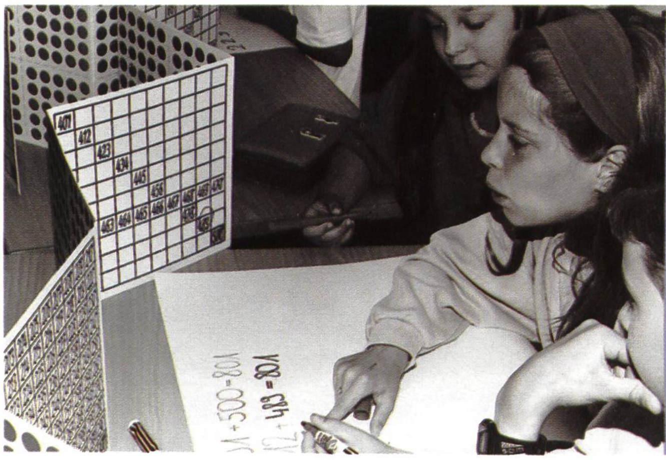
Die schweizerisch-internationale Videostudie zum Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I beginnt da, wo die grossen internationalen Schulleistungsvergleiche wie TIMSS und PISA aufhören: Anders als diese Studien befasst sie sich nicht in erster Linie mit den Kompetenzen und Leistungen der Schüler und Schülerinnen und damit mit den Ergebnissen des Bildungssystems, sondern mit den Prozessen, die diesen Ergebnissen zugrunde liegen. Sie stellt damit in zweifacher Weise eine wichtige Ergänzung der internationalen Leistungsvergleiche dar: Zum einen können erstmals Merkmale, Trends und Besonderheiten der aktuellen Unterrichtspraxis in drei Sprachregionen der Schweiz anhand einer repräsentativen Stichprobe von videografierten Mathematiklektionen beschrieben werden. Solche Daten, die wichtige Informationen für die Qualitätssicherung und -entwicklung und für die Aus- und Weiterbildung des Lehrpersonals darstellen, waren bisher auf nationaler Ebene nicht verfügbar.

2. Einige Schlussfolgerungen aus den internationalen Ergebnissen

Die Ergebnisse der internationalen TIMSS-1999-Videostudie machen deutlich, dass es den *Königsweg des erfolgreichen Mathematikunterrichts* nicht gibt, wenn man das erfolgreiche Abschneiden der Schülerinnen und Schüler in internationalen Leistungsvergleichen als Kriterium betrachtet.

- Der Unterricht aller sieben Länder, also auch der USA, die im internationalen Leistungsvergleich mittelmässig abschneiden, weist erstaunlich viele Gemeinsamkeiten auf.
- Gleichzeitig unterscheidet sich die Unterrichtspraxis auch unter den erfolgreichen Ländern, wobei sich nicht alle Länder gleichermassen deutlich durch ein besonderes Profil abheben.
- Am deutlichsten hebt sich der japanische Unterricht ab: Japanische Lernende arbeiten z.B. im Durchschnitt länger an wenigen, aber an komplexeren und anspruchsvolleren Aufgaben als die Lernenden in allen anderen Ländern.
- Die übrigen Länder unterscheiden sich weniger stark voneinander, obwohl jedes Land den Unterricht in seiner eigener Art und Weise gestaltet.
- Auch die Schweiz teilt viele Merkmale mit andern Ländern und ist in diesem Sinne unauffällig (vgl. weiter unten).

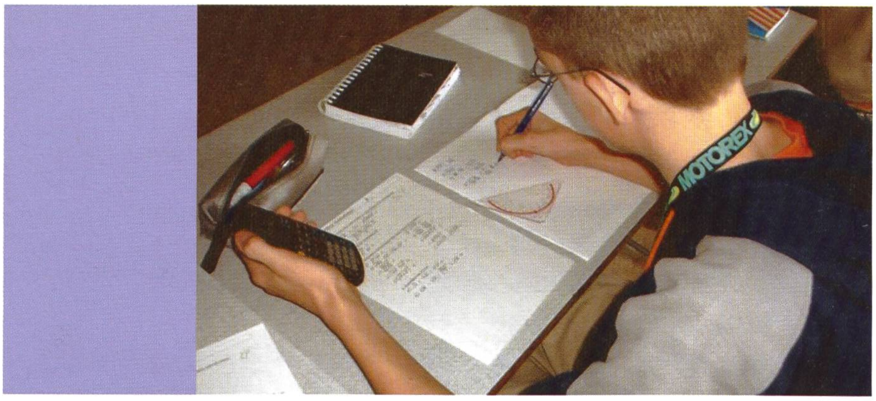
Erstaunlich ist, dass die Ergebnisse insgesamt zeigen, *dass mit Ausnahme von Japan in allen erfolgreichen Ländern ebenso wie in den USA im Mathematitkunterricht in erster Linie Aufgaben gelöst werden, die eine geringe Komplexität aufweisen und die in einer repetitiven Beziehung stehen, wobei das Einüben von mathematischen Prozeduren im Vordergrund steht. Ein Befund, der überrascht, denn diese Unterrichtsgestaltung entspricht keineswegs den Empfehlungen der neueren fachdidaktischen Literatur.* Kommt hinzu, dass mathematische Beweise als eine genuin mathematische Tätigkeit in allen Ländern relativ selten vorkommen.



Die Schweiz im internationalen Vergleich

Insgesamt teilt die Schweiz viele Merkmale des Unterrichts mit anderen Ländern und hebt sich also nicht durch ein besonders auffälliges Profil von *allen* anderen Ländern ab. Das drückt sich auch darin aus, dass die Schweizer Mathematiklektionen bei einer ganzen Reihe von Merkmalen eine mittlere Position einnehmen. Dies kann auch als Hinweis auf eine ausgewogene oder ausbalancierte Unterrichtsgestaltung interpretiert werden. Eine Mittelposition nimmt die Schweiz z.B. in Bezug auf folgende Merkmale ein:

- Aufteilung der Unterrichtszeit auf die drei didaktischen Grobziele *Wieder-*



holung von früherem Stoff, Einführung von neuem Stoff, Üben und Anwenden von neuem Stoff (für alle Grobziele werden annähernd gleiche Zeitanteile eingesetzt).
- Aufteilung der Lektion in *Klassenunterricht und selbstständige Schülerarbeit* (weder der Klassenunterricht noch die selbstständige Schülerarbeit ist wirklich dominant).
- In der selbstständigen Schülerarbeit werden auch in der Schweiz mehrheitlich *einfache Übungsaufgaben* gelöst. Der Anteil an anspruchsvolleren Aufgaben ist zwar etwas grösser als z.B. in den USA, allerdings immer noch wesentlich geringer als in japanischen Lektionen.
- Auch bezüglich Alltagsbezug der gelösten mathematischen Aufgaben (versus rein abstrakte, symbolsprachliche Aufgabenstellungen) nimmt die Schweiz eine Mittelstellung ein.
- Wie in den meisten anderen Ländern werden in den schweizerischen Mathematiklektionen eher selten mathematische Beweise durchgeführt. Die Zahl der Lektionen, in denen mindestens ein Beweisverfahren vorkommt, ist immerhin grösser als in den Niederlanden, den USA und Australien, jedoch immer noch kleiner als in Japan.

Besonderheiten des schweizerischen Mathematikunterrichts im internationalen Vergleich

- *Ausbildung und Berufsfeld der Lehrpersonen:* Eine Besonderheit der Schweiz wurde in der schriftlichen Lehrerbefragung sichtbar. Verglichen mit anderen Ländern verfügen in der Schweiz *deutlich weniger Lehrpersonen über ein Mathematikstudium (oder auch nur Teilstudium!) auf universitärer Stufe.* Zudem sind Schweizer Mathematiklehrpersonen im internationalen Vergleich *weniger spezialisiert* als ihre Kollegen und Kolleginnen in den anderen Ländern: Neben Mathematik unterrichten Schweizer Lehrpersonen im Durchschnitt deutlich mehr *auch andere Fächer* als ihre Kollegen und Kolleginnen in allen anderen Ländern.
- *Tendenz zu Schülerorientierung und Verstehensorientierung:* Einige Indikatoren deuten darauf hin, dass im schweizerischen Mathematikunterricht die *Schülerorientierung* eine bedeutsame Rolle spielt. Dies im Gegensatz zu Ländern wie Hongkong oder Tschechien, deren Mathematiklektionen das Bild eines straff geführten Frontalunterrichts vermitteln. Zudem gibt es Hinweise darauf, dass der Schweizer Mathematikunterricht in der Tendenz *verstehensorientiert* ist.
- Variable Unterrichtsgestaltung: Innerhalb der schweizerischen Mathematiklektionen ist die *Heterogenität* grösser als in einigen anderen Ländern. Hier wird sichtbar, dass es in der Schweiz durchaus *unterschiedliche Lern- und Unterrichtskulturen* des Mathematikunterrichts gibt. Die Ergebnisse der nationalen Videostudie können hier näheren Aufschluss geben. Insbesondere zwei Ergebnisse sind interessant:
- *Problemorientiertes, entdeckendes Lernen:* Rund ein Drittel der Schweizer Lehrpersonen gibt an, dass sie bei der Erarbeitung von neuem Stoff normalerweise ein Verfahren wählen, das von den Lernenden in höherem Masse eigenständiges Problemlösen verlangt als der traditionelle Unterricht.

3. Ergebnisse der nationalen Videostudie

Die nationale schweizerische Videostudie baut auf den Ergebnissen der internationalen Videostudie auf und beantwortet weiter gehende Fragestellungen. An der Tagung wurden Ergebnisse zu drei Teilprojekten präsentiert:

- *Differenzen innerhalb der Schweiz:* Was steckt hinter der im internationalen Vergleich erscheinenden Heterogenität des schweizerischen Mathematikunterrichts? Unterscheiden sich die drei Sprachregionen? Unterscheiden sich die Schultypen?
- *Erweiterte Lehr- und Lernformen* im Deutschschweizer Mathematikunterricht (Verbreitung, Ausprägung, Qualitätswahrnehmung)
- Wie sieht der Mathematikunterricht in *besonders erfolgreichen Schulklassen* aus?

Erweiterte Lehr- und Lernformen im schweizerischen Mathematikunterricht

Die «Erweiterten Lehr- und Lernformen», abgekürzt ELF, bezeichnen eine Unterrichtsreform, die seit den 1980er-Jahren zunehmende Verbreitung im schweizerischen Unterricht gefunden hat (im deutschsprachigen Raum spricht man auch von «offenem Unterricht»). Die Reform zielt auf eine vermehrte Schülerorientierung des Unterrichts durch den Einbezug offener, aktivierender Lernformen, die den Lernenden auch mehr Spielraum für eigene Entscheidungen und die Steuerung und Reflexion des eigenen Lernens gewähren. Solche Lehr- und Lernformen sind z.B. Wochenplanunterricht, Werkstattunterricht, Arbeit mit Lernverträgen und verschiedene kooperative Lernformen. Traditioneller Klassenunterricht soll dadurch *nicht ersetzt,* sondern *ergänzt* werden. Angestrebt wird neben der Unterstützung des fachlichen Lernens eine verstärkte Förderung fachlicher und überfachlicher Lernkompetenzen und Lernbereitschaften – das Lernenlernen – der Schülerinnen und Schüler. Die Praxis der Erweiterten Lehr- und Lernformen beschränkt sich nicht auf die Erweiterung des Methodenrepertoires, sondern umfasst auch ein verändertes Rollenverständnis der Lehrperson und eine veränderte «Unterrichtsphilosophie».

Haben die Erweiterten Lehr- und Lernformen auch im Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe 1 Spuren hinterlassen? Da ELF als definiertes Reformmodell vor allem in der Deutschschweiz verbreitet ist, beschränkte sich die Untersuchung vorerst auf den deutschschweizerischen Teil der Stichprobe, obwohl auch im Tessin und in der Westschweiz offene

Unterrichtsformen wie z.B. Wochenplanunterricht durchaus vorkommen.

– *Verbreitung des ELF-Unterrichts:* 42% der befragten Deutschschweizer Lehrpersonen geben an, in ihrem Mathematikunterricht «häufig» oder «(fast) immer» nach Prinzipien von ELF zu unterrichten. Diese 42% werden im Folgenden als ELF-Lehrpersonen bezeichnet, im Gegensatz zu «traditionell unterrichtenden» Lehrpersonen, die nach eigenen Angaben nie oder nur ab und zu nach ELF-Prinzipien unterrichten. Verbreitet sind Erweiterte Lehr- und Lernformen vor allem in den beiden tieferen Schultypen (Real- und Sekundarschule), deutlich weniger am Gymnasium.
– *Lehr- und Sozialformen im ELF-Unterricht:* ELF-Lehrpersonen setzen im Mathematikunterricht tatsächlich *seltener Ganzklassenunterricht* (Frontalunterricht), dafür häufiger *offene Formen wie Wochenplan- oder Werkstattunterricht* ein, ebenso Lehrformen, die auf die Reflexion des Lernens sowie auf kooperatives Lernen ausgerichtet sind. Einige Lehr- und Sozialformen werden von ELF- und traditionell unterrichtenden Lehrpersonen gleich häufig eingesetzt, z.B. Gruppen- und Partnerarbeit.
– *ELF-Unterricht ist kein einheitliches Konzept:* Weiter gehende Analysen der Lehrerantworten zeigen, dass Erweiterte Lehr- und Lernformen kein einheitliches Konzept in den Köpfen der Deutschschweizer Lehrpersonen sind. ELF-Unterricht kann unterschiedlich gestaltet werden.
– *ELF-Unterricht wird von den Schülern positiv beurteilt:* Schulklassen von ELF-Lehrpersonen beurteilen ihren Mathematikunterricht im Durchschnitt etwas positiver als Klassen von traditionell unterrichtenden Lehrpersonen. Günstiger beurteilt wird der Unterricht unter anderem hinsichtlich Klarheit und Strukturiertheit, Aspekten der Adaptivität und Mitbestimmung, hinsichtlich individueller Lernunterstützung durch die Lehrperson sowie deren Fähigkeit, den Mathematikunterricht motivierend zu gestalten, und hinsichtlich der Vermittlung von Argumentationsstrategien für mathematische Diskussionen.
– *Schüler fühlen sich wohl im ELF-Unterricht:* ELF-Klassen schätzen ihr Wohlbefinden im Unterricht durchschnittlich höher ein als traditionell unterrichtete Klassen.
– *Mathematikstunden von ELF-Lehrpersonen werden von Beobachtern positiv beurteilt:* Die Lektionen der ELF-Lehrpersonen werden von geschulten Beobachtern im Durchschnitt *positiver* beurteilt als die Lektionen von traditionell unterrichtenden Lehrpersonen, und zwar in Bezug auf Unterrichtsqualitätsmerkmale, die den Bereichen *«Instruktionseffizienz»*, *«Schülerorientierung»* und *«Kognitive Aktivierung»* zugeordnet werden können. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend und bemerkenswert, als das Urteil der Experten auf nur einer *einzigen, zufällig ausgewählten, videografierten Mathematikstunde beruht* und als die Unterrichtsgestaltung von ELF-Lehrpersonen, wie oben gezeigt wurde, keineswegs einheitlich ist.
– *Kein Unterschied in Bezug auf Leistungen und Interesse:* Vergleicht man die durchschnittlichen Mathematikleistungen und das durchschnittliche fachliche Interesse von ELF-Klassen mit jenen von traditionell unterrichteten Klassen, zeigen sich in unserer Studie keinerlei Unterschiede zwischen den beiden Unterrichtsstilen.

Wie viele Gesichter hat «guter» beziehungsweise erfolgreicher Unterricht?

Die am Lehrstuhl Pädagogische Psychologie & Didaktik (Prof. Dr. Kurt Reusser) in Verbindung mit nationalen und internationalen Forschungspartnern durchgeführte schweizerisch-internationale «Best-Practice-Studie» verfolgt die folgenden Ziele:

- Explorieren der Variationsbreite von «erfolgreichem Mathematikunterricht» im internationalen Massstab;
- Ähnlichkeiten und Unterschiede des Unterrichts zwischen den USA und sechs «erfolgreichen» Ländern auf verschiedenen Dimensionen identifizieren;
- Charakteristika des Unterrichts in den Ländern herausarbeiten;
- den Unterricht der Schweiz mit einem «frischen Blick» wahrnehmen: Wie einheitlich ist er? Wie unterscheidet er sich von andern Ländern?
- Aufschluss darüber gewinnen, wie der schweizerische Unterricht von den Beteiligten – und von aussen stehenden Experten – wahrgenommen wird;
- Zusammenhänge suchen zwischen Unterrichtsmustern, (wahrgenommener) Unterrichtsqualität und (multikriterial verstandenen) Bildungswirkungen;
- methodische Zugänge und Instrumente entwickeln, die auf der Basis von Videos ein tieferes Verständnis von Unterrichtsprozessen und -qualität erlauben;
- Aufbau einer Bibliothek öffentlich zugänglicher Videos für die Lehrerbildung.

Stichprobe und Datenerhebung

- national repräsentative Stichproben von Mathematikunterricht des 8. Schuljahres in sieben Ländern;
- eine Lektion pro Lehrperson;
- gefilmt über das ganze Schuljahr (ausser Japan);
- japanische Lektionen aus der ersten Studie von 1995;
- standardisierte Kameraskripts;
- insgesamt gegen 700 Lektionen (156 aus der Schweiz);
- Einsatz eines Lehrerfragebogens sowie (nur in der Schweiz!) von Schülerfragebogen, Leistungs- und Fähigkeitstests;
- zusätzlich zehn öffentliche Videos pro Land.

Fazit

Im Zusammenhang mit ELF-Unterricht ist bisweilen die *Befürchtung* laut geworden, dass eine *Öffnung des Unterrichts* zwangsläufig zu *Leistungseinbussen* führen müsse. Unsere Ergebnisse zeigen, dass diese Befürchtung ***unbegründet*** ist. Auch die Befürchtung, Erweiterte Lehr- und Lernformen gingen zwangsläufig *auf Kosten der Klarheit und Strukturiertheit des Unterrichts,* wird durch unsere Ergebnisse ***nicht gestützt.*** Umgekehrt sind aber auch *übertriebene Hoffnungen,* die teilweise an Erweiterte Lehr- und Lernformen geknüpft werden – z.B. in Bezug auf eine grundsätzlich bessere Förderung von fachlichen Leistungen und Fachinteresse –, *nicht berechtigt. Insgesamt erscheint der ELF-Unterricht aufgrund unserer Ergebnisse trotzdem in einem günstigen Licht – unter anderem mit Blick auf die positive Schülerwahrnehmung des Unterrichts und auf das höhere Wohlbefinden der Schüler und Schülerinnen.*

Erfolgreiche Mathematikklassen – besonderer Unterricht?

Unterscheidet sich der Mathematikunterricht in Klassen, die ein besonders *positives Leistungs- und Interessenprofil* aufweisen, vom Unterricht in anderen, weniger erfolgreichen Klassen? Diese Frage ist insofern von Interesse, als sie Anhaltspunkte bei der Suche nach Merkmalen eines wirksamen und effizienten Mathematikunterrichts geben kann.

Im schweizerischen Videoprojekt wurde deshalb die Qualität des Mathematikunterrichts der «erfolgreichsten» Klassen (Optimalklassen) verglichen mit der Unterrichtsqualität in weniger erfolgreichen Klassen. Als «erfolgreich» gelten hier Klassen, die *sowohl überdurchschnittliche Mathematikleistungen* erbringen *als auch überdurchschnittliches Interesse an Mathematik* zeigen. Die *Unterrichtsqualität* konnte zum einen anhand der *Schülerwahrnehmung* und zum andern anhand der *Beurteilungen der gefilmten Mathematikstunden durch geschulte Beobachter* erfasst werden. Die Auswertungen führten zu interessanten Ergebnissen:

– *Schülerurteil:* Die Schülerinnen und Schüler der Optimalklassen beurteilen ihren Mathematikunterricht *günstiger* als ihre Kollegen und Kolleginnen in den weniger erfolgreichen Klassen, und dies in Bezug auf eine ganze Reihe von Merkmalen, wie z.B. die wahrgenommene individuelle Unterstützung der Lernenden durch die Lehrperson, die Gestaltung anspruchsvoller Übungsformen, die Verstehensorientierung des Unterrichts sowie die Fähigkeit der Lehrperson, die Schüler und Schülerinnen für Mathematik zu motivieren.

– *Beobachterurteil:* Die Unterrichtsqualität in den Optimalklassen wird auch von den Beobachtern mehrheitlich günstiger beurteilt als in den weniger erfolgreichen Klassen, was umso erstaunlicher ist, als die Experten zu ihrem Urteil aufgrund einer einzelnen, zufällig ausgewählten Mathematiklektion gelangt sind. Offenbar kann an einer einzelnen Lektion mehr an Qualitätsmerkmalen abgelesen werden als bisher gemeinhin angenommen wurde.

Sowohl die Schüler und Schülerinnen als auch die Beobachter/innen nehmen also Unterschiede wahr beim Vergleich des Unterrichts von erfolgreichen mit demjenigen weniger erfolgreicher Klassen. Die nationale Videostudie ermöglicht somit eine detaillierte Beschreibung von Merkmalen der Unterrichtsgestaltung und der Unterrichtsqualität in Klassen, die sich durch besonders erfolgreiche Leistungs- und Interessenprofile auszeichnen. Allerdings: Auch unsere Daten erlauben *keinen Nachweis von Ursache und Wirkung,* das heisst, es bleibt offen, ob die guten Leistungen und das ausgeprägte Interesse durch die wahrgenommenen Differenzen im Unterricht *bewirkt* werden.

Adresse:
Prof. Dr. Kurt Reusser
Universität Zürich
Pädagogisches Institut
Gloriastrasse 18a, 8006 Zürich
Telefon: +41 (0)1 634 27 53
reusser@paed.unizh.ch
www.didac.unizh.ch

Lieferantenadressen für Schulbedarf

Aktive Schul- und Freizeitgestaltung

Audio / Visuelle Kommunikation

Autogen-Schweiss- und Schneideanlagen

Bienenwachs / Kerzengiessformen

- **Bienen-Meier,** R. Meier Söhne AG, 5444 Künten, 056 485 92 50, Fax 056 485 92 55

Bücher

- **Buchhandlung Beer,** St. Peterhofstatt 10, 8022 Zürich, 01 211 27 05, Fax 01 212 16 97

Dienstleistungen

Fernseh- und Computerwagen

Handarbeiten / Kreatives Schaffen / Bastelarbeit

- Bastel-Gips, Gips-Kurse, **ADI***Kom*, 052 659 61 68, www.adikom.ch
- **Blacho-Tex AG,** Blachenmaterial für Taschen, Hüllen etc. 5607 Hägglingen, Tel. 056 624 15 55, www.blacho-tex.ch
- **Peddig-Keel,** Peddigrohr und Bastelartikel, 9113 Degersheim, 071 371 14 44, www.peddig-keel.ch

Holzbearbeitungsmaschinen

Informatik und Lernprogramme

Keramikbrennöfen / Glasfusionsöfen

Klebestoffe / Konstruvit

- Konstruvit Klebstoffe von **Geistlich Ligamenta**
  Vertrieb für die Schweiz: **Carfa AG,** Seestrasse 110, 8805 Richterswil, Tel. 01 787 44 44, Fax 01 787 44 45, E-Mail: info@carfa.ch

Kopiervorlagen

- **Verlag Persen GmbH,** 8546 Islikon, Tel./Fax 052 375 19 84
- **Kohl-Verlag,** Lehrmittel-Vertrieb Gisler, Zug, Tel. 041 741 51 36, Fax 041 741 51 39, www.lvg.ch

Künstlermaterialien

Lehrmittel

- **Orell Füssli Verlag,** Postfach, 8036 Zürich, Tel. 055 418 89 89, Fax 055 418 89 19

Neue Lernformen

- **SI TZT AG,** Rainstr. 57, 8706 Meilen, Tel. 01 923 65 64, www.tzt.ch

Modellieren / Tonbedarf

Physikalische Demonstrationsgeräte

- **Steinegger+Co.,** Rosenbergstr. 23, 8200 Schaffhausen, Tel. 052 625 58 90, Fax 052 625 58 60, www.steinegger.de

Schnittmuster / Stoffe / Nähzubehör

- **Création Brigitte,** B. Petermann, 6252 Dagmersellen, Tel./Fax 062 756 11 60, Tel. Anfragen: Di–Fr 15.00–18.00 Uhr E-Mail: creation-birgitte@gmx.ch

Schulfotografie

- **SASJF,** J. Frigg, Realschule, 9496 Balzers, 00423 384 31 53

Schulmaterial / Lehrmittel

- **Schule und Weiterbildung Schweiz,** www.swch.ch, Kurse, Zeitschriften «Schule» und «Ecole romande», Bücher, Tel. 061 956 90 71, Fax 061 956 90 79
- **Verlag ZKM,** Postfach, 8353 Elgg, Tel./Fax 052 364 18 00, www.verlagzkm.ch

www.biwa.ch
BIWA Schulbedarf AG Tel. 071 988 19 17
9631 Ulisbach-Wattwil Fax 071 988 42 15

bürli
Spiel- und Sportgeräte AG
Postfach 3030
6210 Sursee LU
Telefon 041 925 14 00
Fax 041 925 14 10
www.buerliag.com
- Spiel- und Sportgeräte
- Fallschutzplatten
- Drehbare Kletterbäume
- Parkmobiliar
LGA GS geprüfte Sicherheit

Lernmedien von SCHUBI
Fordern Sie den Katalog 2003 an bei:
SCHUBI Lernmedien Tel. 052 644 10 10
Breitwiesenstrasse 9 Fax 0800 500 800
8207 Schaffhausen www.schubi.ch
SCHUBI

Sicherer Schwung auf dem Pausenplatz
Hinnen Spielplatzgeräte AG
BIMBO
6055 Alpnach Dorf T 041 672 91 11 www.bimbo.ch

Schulmobiliar / Schuleinrichtungen

MERWAG
SCHULEINRICHTUNGEN
Schüler-und Lehrerarbeitsplätze
Industrie Eschmatt CH-8498 Gibswil
Tel. 055 – 265 60 70 merwag@bluewin.ch

FUCHS THUN AG
Spielplatzgeräte mit Pfiff !
Fuchs Thun
Kombi-Geräte - drehbare Kletterbäume - Fuchsteller
Tempelstrasse 11 Tel. 033 334 30 00 www.fuchsthun.ch
3608 Thun Fax 033 334 30 01 info@fuchsthun.ch

Schuleinrichtungen
Wandtafeln
Tische und Stühle
Embru-Werke
8630 Rüti
Tel. 055 251 11 11
Fax 055 251 19 30
info@embru.ch, www.embru.ch
embru

GTSM-Magglingen
Aegertenstr. 56 8003 Zürich
☎ 01 461 11 30 Fax 01 461 12 48
www.lappset.com E-Mail: gtsm@bluewin.ch
- Spielplatzgeräte
- Pausenplatzgeräte
- Tischtennistische
- Bänke

hunziker
schulungseinrichtungen
Hunziker AG Thalwil
Tischenloostrasse 75
Postfach
CH-8800 Thalwil
Telefon 01 722 81 11
Telefax 01 720 56 29
www.hunziker-thalwil.ch
info@hunziker-thalwil.ch

Rüegg, Spielplatzgeräte GmbH
Weidhof 266, Postfach
8165 Oberweningen
Tel. 01 856 06 04, Fax 01 875 04 78
www.rueggspielplatz.ch
info@rueggspielplatz.ch
Spielplatzgeräte aus Holz
Fallschutzplatten
Parkmobiliar
Multisport- und Freizeitanlagen

NOVEX MÖBELBAU
NOVEX AG
Schuleinrichtungen
Baldeggstrasse 20
6280 Hochdorf
Telefon: 041 914 11 41
Fax: 041 914 11 40
E-Mail: info@novex.ch
www.novex.ch

Stoffe und Nähzubehör

- **M. Erni & Co.,** Landstrasse 33, 5415 Nussbaumen, Tel. 056 282 52 48, Fax 056 282 52 49 E-Mail: erni.stoffe@dplanet.ch

Schulzahnpflege

- **Profimed AG,** Dorfstrasse 143, 8802 Kilchberg, Tel. 0800 336 411, Fax 0800 336 410, E-Mail: info@profimed.ch, www.profimed.ch

Theater

Schultheater – alle Stufen
MASKENSCHAU
Dauer: 1 Stunde
Auskunft und Unterlagen:
Pello, Mülhauserstr. 65, 4056 Basel
Telefon/Fax 061 321 86 96
Homepage: www.pello.ch
E-Mail: pello@freesurf.ch
PelLo

Spiel- und Sportgeräte

silisport ag Tel. 052 385 37 00 / www.silisport.com

Holz-Hoerz
Holz-Hoerz GmbH
Postfach 11 03
D-72521 Münsingen
Tel. 0049-7381/93570 Fax 935740
www.pedalo.de E-Mail: Holz-Hoerz@t-online.de
Entwicklung und Herstellung von psychomotorischen Übungsgeräten, original pedalo®-System, Balanciergeräten, Rollbretter, Kinderfahrzeugen, Laufrad, Geräten und Material für den Werkunterricht.

eichenberger electric ag
ebz
Bühnentechnik · Licht · Akustik
Projektierung · Verkauf · Vermietung
Sonnentalstrasse 5, 8600 Dübendorf
Tel. 043 355 22 66, Fax 043 355 22 77
E-Mail ebz@ebzlighting.ch
www.ebzlighting.ch

Spielplatzgeräte

- **UHU Spielschüür AG,** 8909 Zwillikon, Tel. 0900 57 30 59, *www.uhu-spielscheune.ch,* Spielgeräte aus eigener Produktion, *kein Import*

Maximilian
Der Zauberer für die Schule
Telefon 01 720 16 20
www.maximilians-zauberschau.ch

die neue schulpraxis

72. Jahrgang
erscheint monatlich,
Juni/Juli Doppelnummer

Über alle eingehenden Manuskripte freuen wir uns sehr und prüfen diese sorgfältig. Wir bitten unsere Mitarbeiter, allfällige Vorlagen, Quellen und benützte Literatur anzugeben.
Für den Inhalt des Artikels ist der Autor verantwortlich.

Internet: www.schulpraxis.ch
E-Mail: schulpraxis@tagblatt.com

Redaktion
Unterstufe
Marc Ingber, (min)
Wolfenmatt, 9606 Bütschwil,
Tel. 071/983 31 49, Fax 071/983 32 49
E-Mail: mingber@schulpraxis.ch

Mittelstufe
Prof. Dr. Ernst Lobsiger, (Lo)
Werdhölzli 11, 8048 Zürich,
Tel./Fax 01/431 37 26
E-Mail: elobsiger@schulpraxis.ch

Oberstufe/Schule + Computer
Heinrich Marti, (Ma)
alte Gockhauserstrasse 1c, 8044 Zürich,
Tel. 076/399 42 12 (Combox),
Fax 076/398 42 12
E-Mail: hmarti©schulpraxis.ch

Unterrichtsfragen
Dominik Jost, (Jo)
Zumhofstrasse 15, 6010 Kriens,
Tel. 041/320 20 12
E-Mail: djost@schulpraxis.ch

Lehrmittel/Schulentwicklung
Norbert Kiechler, (Ki)
Tieftalweg 11, 6405 Immensee,
Tel. 041/850 34 54
E-Mail: nkiechler@schulpraxis.ch

Abonnemente, Inserate, Verlag:
St.Galler Tagblatt AG
Fürstenlandstrasse 122
9001 St.Gallen, Tel. 071/272 78 88
Fax 071/272 75 29 (Abonnemente:
Tel. 071/272 73 47, Fax 071/272 73 84)

Verlagsleiter: Thomas Müllerschön
E-Mail: tmuellerschoen@tagblatt.com

Druck und Versand:
Zollikofer AG, 9001 St.Gallen

Abonnementspreise:
Inland: Privatbezüger Fr. 82.–,
Institutionen (Schulen, Bibliotheken)
Fr. 122.–, Ausland: Euro 65.–/Euro 92.–
Einzelpreis: Fr. 16.–, Ausland: Euro 12.–

Inseratpreise:

1/1 Seite	s/w	Fr. 1620.–
1/2 Seite	s/w	Fr. 904.–
1/4 Seite	s/w	Fr. 508.–
1/6 Seite	s/w	Fr. 421.–
1/8 Seite	s/w	Fr. 275.–
1/16 Seite	s/w	Fr. 154.–

(zuzüglich 7,6% Mehrwertsteuer)