# Tensoren

Autor(en): **Arbenz, Benno**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Ingenieur und Architekt**

Band (Jahr): **106 (1988)**

Heft 50

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-85864

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Frequenz der Wellen durch die Intensität des Magnetfeldes bestimmt, die dazu dient, den Strahl der relativistischen Elektronen zu «führen» und dessen Energie in elektromagnetische Energie umgewandelt wird. Der Resonator kann dementsprechend wesentlich grösser dimensioniert werden und die Auskoppelung grösserer Energien ist damit durchaus möglich. Auf dem aktuellen Markt findet man heute Gyrotrons im 70 GHz-Bereich mit Leistungen in der Grössenordnung von 200 kW. Die gegenwärtigen Fusionsexperimente verlangen jedoch Frequenzen von 120–150 GHz und Leistungen von einigen Megawatts. Das gegenwärtig beste Resultat (erreicht am Naval Research Laboratorium, USA) liegt bei 80 kW bei einer Frequenz von 110 GHz und dies während 1 ms. Diese Resultate zeigen, dass diese Hochfrequenzröhre noch weitere Entwicklungen auf dem Gebiet der Physik wie auch auf technologischer Ebene nötig hat. Am CRPP wird, als Bestandteil des europäischen EURATOM-Programmes und in Zusammenarbeit mit dem Laboratoire d'Electromagnétiques et d'Acoustique der EPFL und der Elektronenröhrenabteilung ERR der Firma ABB, die Entwicklung eines Gyrotrons (120–150 GHz, $\lambda$=2,5 mm) durchgeführt, das ein dem Laser verwandtes Prinzip verwendet (Fig. 16). Bei dieser Methode findet die Wechselwirkung zwischen den relativistischen Elektronen und der elektromagnetischen Welle, eine Wechselwirkung, bei der die Energie des Elektronenstrahles auf die Welle übertragen wird, in einem aus zwei Spiegeln bestehendem quasi-optischen Resonator statt. Dies hat den Vorteil, dass selbst bei hohen Frequenzen, also bei kleinen Wellenlängen, die Gesetze der Optik anwendbar sind, deshalb auch der Name quasi-optisch.

Das soeben beschriebene Gyrotron besteht im wesentlichen aus drei Hauptkomponenten: einer «Kanone» zur Erzeugung der relativistischen Elektronen, dem quasi-optischen Resonator und einem System von supraleitenden Spulen zur Erzeugung des die Frequenz bestimmenden Magnetfeldes. Die Elektronenkanone liefert einen ringförmigen Strahl (Durchmesser 4 mm, Ringdicke 0,2 mm). Die im Strahl enthaltene Energie beläuft sich auf 700 kW. Das Magnetfeld ist 50 kG. Der Elektronenstrahl gelangt zu dem aus zwei Spiegeln bestehenden Resonator, wo er einen Teil (40%) seiner Energie in Form von elektromagnetischer Energie abgibt. Anschliessend wird der Elektronenstrahl am Gefässende auf eine gekühlte «Wand» gelenkt.

Auf dem Gebiet des quasi-optischen Resonators wurden 1985–86 grosse theoretische und auch experimentelle Anstrengungen unternommen. Die Beugungsverluste und die Energiekopplung ausserhalb des Resonators wurde durch numerische Simulationen studiert und mit Experimenten verglichen. Die gute Übereinkunft Theorie-Experiment erlaubte die Festlegung der Parameter von verschiedenen zu installierenden Resonatoren. Wie in allen Systemen, die nicht in ihrer Grundschwingung arbeiten, ist das Problem der sogenannten Modentrennung entscheidend. Ein System von verschiedenen Spiegeln im quasi-optischen Resonator ist notwendig, um eine genügende Frequenzselektion zu erreichen.

Numerische Simulationen, in denen die Entwicklung und die Zusammensetzung der verschiedenen Moden zeitabhängig simuliert wurden, zeigten, dass nur ein einziger Mode in einem solchen Resonator erhalten werden kann. Die Entwicklung eines solchen Gyrotrons benötigt eine umfangreiche Infrastruktur, wie sie grösseren Versuchanlagen eigen ist. Ein Versuchsstand, der dazu dienen soll verschiedenste Resonatorensysteme zu testen und um deren physikalische Eigenschaften zu verstehen, ist gegenwärtig in Entstehung in Ecublens. Die notwendigen Einrichtungen sind neben den elektrischen Stromversorgungen (1 MW bei 100 kV) auch eine umfangreiche kryotechnische Installation für die supraleitenden Spulen.

# Tensoren

**Es soll hier eine kurze Erläuterung des Begriffs Tensor gegeben werden. Anschliessend wird anhand eines Beispiels (den Differentialgleichungen für die Bewegung eines beliebigen Kontinuums) gezeigt, wo Tensoren vorkommen können und wie aus diesen sehr allgemein geltenden Gleichungen, die Gleichungen für einen einfach Fall (der eindimensionalen, reibungs- und schwerkraftfreien Strömung mit Wärmezufuhr) erhalten werden. Dies soll zeigen, wie die Gleichungen für konkrete Fälle durch Vereinfachung aus den allgemein geltenden Gleichungen abgeleitet werden können.**

VON BENNO ARBENZ, ZOLLIKON

Die meisten Ingenieure haben den Begriff Tensor im Zusammenhang mit der Beschreibung des Spannungszustandes in einem Körper, wo vom Spannungstensor die Rede ist, kennengelernt. Der Name Tensor kommt auch von der Spannungslehre. Dort wird jedem Flächenelement durch einen festen Punkt eines Kontinuums ein in diesem Element übertragener Spannungsvektor zugeordnet (Bild 1). Im rechtwinkligen, cartesischen Koordinatensystem $x_1$, $x_2$, $x_3$ werden den positiven Koordinatenrichtungen die Vektoren $T_1$, $T_2$, $T_3$ zugeordnet, welche den «Tensor» $T$ bilden. Der «Tensor» $T$ kann in der allgemein bekannten Matrizenform

$$(1) \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

oder in der Form

$$(2) \quad T = T_{ij}$$

wobei i und j die Werte 1 bis 3 durchlaufen, geschrieben werden.

Der Begriff Tensor kann jedoch auch allgemeiner definiert werden. So wie ein Vektor aus Skalaren und ein «Tensor» aus Vektoren gebildet werden kann, kann ein höherer Tensor aus einem oben beschriebenen «Tensor» gebildet werden, indem jeder Koordinatenrichtung ein solcher «Tensor» zugeordnet wird. Es ist daher zweckmäs-

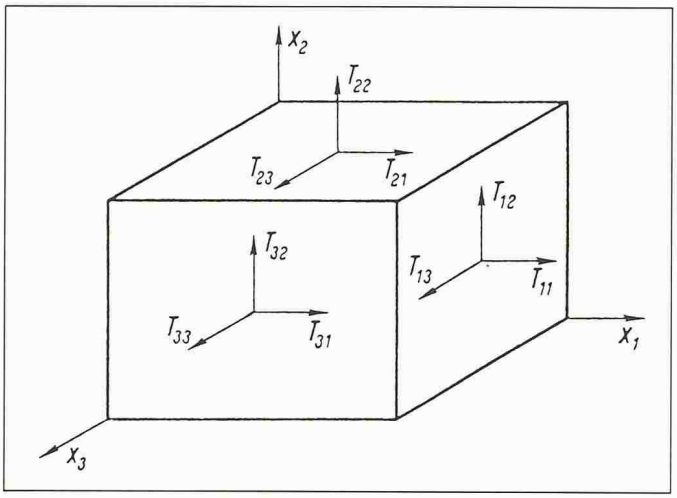



Bild 1

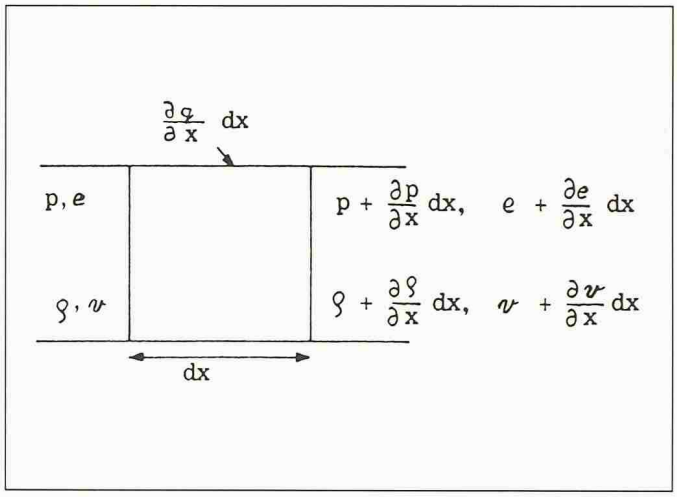



Bild 2

sig die von W. Prager in (1) eingeführte verallgemeinerte Definition zu verwenden. Danach gelten für die bisher verwendeten Begriffe «Skalar», «Vektor» und «Tensor» neu die Bezeichnungen:

«Skalar» = Tensor der Stufe 0
«Vektor» = Tensor der Stufe 1
«Tensor» = Tensor der Stufe 2

Mathematisch lassen sich Tensoren bis zu beliebigen Stufen definieren und wie folgt schreiben:

Tensor der Stufe 0: $T$
Tensor der Stufe 1: $T_i$
Tensor der Stufe 2: $T_{ij}$
Tensor der Stufe 3: $T_{ijk}$
Tensor der Stufe 4: $T_{ijkl}$
usw.

Die Indices i, j, k, l, usw. durchlaufen dabei die Werte 1, 2, 3, für die 3 Koordinatenrichtungen in einem rechtwinkligen, cartesischen Koordinatensystem. Die Tensoren lassen sich jedoch auch für krummlinige Koordinaten definieren. Darauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

Als Anwendungsbeispiel für Tensoren sei darauf hingewiesen, dass sich nach (1) die Bewegung eines beliebigen Kontinuums durch folgende Differentialgleichungen beschreiben lässt:

(3) Kontinuitätsgleichung:
$$\partial_0 \varrho + \partial_j(\varrho v_j) = 0 ;$$

(4) Bewegungsgleichung:
$$\varrho\,(\partial_0 v_k + v_j \partial_j v_k) = \varrho\, K_k + \partial_j T_{jk} ;$$

(5) Energiegleichung:
$$\varrho\,(\partial_0 e + v_j \partial_j e) = T_{jk}\, V_{jk} - \partial_j q_j .$$

In dieser Schreibweise stellt $\partial_j$ den Differentialoperator $\partial/\partial x_j$ und $\partial_o$ den Differentialoperator $\partial/\partial t$ dar. Zudem bedeutet das doppelte Auftreten des gleichen Buchstaben als Index in einem Monom, dass über die Werte 1, 2, 3 des Index zu summieren ist. $\varrho$ stellt das Dichtefeld des Kontinuums, v das Geschwindigkeitsfeld, K das Feld der spezifischen Massenkraft, T das Spannungsfeld, e die spezifische innere Energie, V die Verformungsgeschwindigkeit des Kontinuums und q den Wärmestrom dar. Diese Gleichungen vereinfachen sich z.B. für eine eindimensionale, reibungsfreie Strömung mit Wärmezufuhr und unter Vernachlässigung der Schwerkraft (Bild 2) zu den bekannten Gleichungen:

(6) Kontinuitätsgleichung:
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \cdot v)}{\partial x} = 0$$

(7) Bewegungsgleichung:
$$\varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

(8) Energiegleichung:
$$\varrho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial x} \right) = - p \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}$$

Der Spannungsvektor $T_{ij}$ nimmt hier den Wert $-p$ und das Feld der spezifischen Massenkraft (ohne Trägheitskraft) den Wert 0 an. Wird noch die Grösse (für die Enthalpie)

$$(9) \quad i = e + \frac{p}{\varrho}$$

eingeführt, so wird nach einigem Umformen aus den 3 obenstehenden Gleichungen die Beziehung

(10)
$$\varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \varrho v \frac{\partial i}{\partial x} + \varrho v \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

erhalten, welche in der Strömungslehre bestens bekannt ist. Damit ist gezeigt, wie leicht die Differentialgleichungen für ein konkretes Problem aus den allgemein geltenden Bewegungsgleichungen eines Kontinuums abgeleitet werden können.

Die Bewegungsgleichungen eines beliebigen Kontinuums enthalten Tensoren höherer Stufen. Um diese zu verstehen müssen daher, wie hier gezeigt, einige Grundkenntnisse über Tensoren und ihre mathematische Darstellung bekannt sein. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass es auch noch andere Schreibweisen für Tensoren gibt, als nur die hier verwendeten.

Adresse des Verfassers: Dr. *B. Arbenz*, a. Landstr. 63, 8702 Zollikon.

**Literatur**

(1) *W. Prager:* Einführung in die Kontinuumsmechanik (Birkhäuser-Verlag 1961)