

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizer Ingenieur und Architekt
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	113 (1995)
<b>Heft:</b>	22
<b>Artikel:</b>	Feder-Dämpfer-Massen-Modelle: Berechnung der Baugrund-Bauwerk-Interaktion in der Praxis bei dynamisch belastetem Baugrund
<b>Autor:</b>	Wolf, John P.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-78725">https://doi.org/10.5169/seals-78725</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

John P. Wolf, Lausanne

# Feder-Dämpfer-Massen-Modelle

## Berechnung der Baugrund-Bauwerk-Interaktion in der Praxis bei dynamisch belastetem Baugrund

**Der flexible und in der Regel Energie abstrahlende Baugrund kann in einer dynamischen Bauwerksanalyse als einfaches Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit frequenzunabhängigen Koeffizienten erfasst werden. Für die beiden Grenzfälle des Baugrundes, den homogenen Halbraum und die homogene Schicht auf starrem Fels, werden für verschiedene Parameter wie Verhältnisse der Abmessungen und Poisson's Querdehnungszahl die Koeffizienten in Tabellen angegeben. Starre Fundamente auf der Oberfläche und mit Einbettung werden für alle Translations- und Rotationsfreiheitsgrade berücksichtigt. Für die praktische Berechnung kann dieses dynamische Modell des Baugrundes direkt mit demjenigen des Bauwerkes gekoppelt werden, wobei ein normales dynamisches Tragwerksprogramm zur Anwendung kommt.**

Professor Hugo Bachmann zum 60. Geburtstag gewidmet

### Einführung

#### Aufgabenstellung

Die Aufgabe der dynamischen Baugrund-Bauwerk-Interaktions-Analyse, auch als Boden-Struktur-Wechselwirkungs-Analyse bezeichnet, ist im Bild 1 dargestellt. Ein Bauwerk mit endlichen Abmessungen ist im flexiblen Baugrund eingebettet, welcher unendlich ausgedehnt ist. Oft kann die Kontaktfläche zwischen Bauwerk und Baugrund, im folgenden als Fundament bezeichnet, als starr betrachtet werden. Die zeitabhängige Last wirkt entweder direkt am Bauwerk wie zum Beispiel von rotierenden Maschinen herrührend oder wird über den Baugrund eingeführt wie im Falle von Erdbeben. Die dynamische Beanspruchung des Bauwerkes mit Berücksichtigung der Interaktion mit dem Baugrund soll berechnet werden.

Die Modellierung des Bauwerkes, das sich auch nichtlinear verhalten kann, ist weit entwickelt. Meistens wird die Methode

Tabelle 1.  
Geometrie und Wellengeschwindigkeit des Kegelstumpf-Modells und

Freiheitsgrad	Horizontal	Vertikal	Kippen	Torsion
<b>Äquivalenter Radius <math>r_0</math></b>	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$	$\sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}}$	$\sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}}$
<b>Schlankheit <math>\frac{z_0}{r_0}</math></b>	$\frac{\pi}{8}(2-v)$	$\frac{\pi}{4}(1-v)\left(\frac{c}{c_s}\right)^2$	$\frac{9\pi}{32}(1-v)\left(\frac{c}{c_s}\right)^2$	$\frac{9\pi}{32}$
<b>Poisson's Querdehnungszahl <math>v</math></b>	alle $v$	$\leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < v \leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{3}$
<b>Wellengeschwindigkeit <math>c</math></b>	$c_s$	$c_p$	$2c_s$	$c_s$
<b>Mitschwingende Masse <math>\Delta M \Delta M_0</math></b>	0	0	$2,4\left(v - \frac{1}{3}\right)\rho A_0 r_0$	0
<b>Feder-Dämpfer-Massen-Modell</b>	$K = \rho c^2 \frac{A_0}{z_0}$	$C = \rho c A_0$	$K_0 = 3\rho c^2 \frac{I_0}{z_0}$	$C_0 = \rho c I_0$
			$M_0 = \rho I_0 z_0$	

der finiten Elemente verwendet, welche mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden als verallgemeinerte Federn, Dämpfer und Massen physikalisch gedeutet werden können. Leistungsfähige Computerprogramme zur dynamischen Analyse des Bauwerkes stehen zur Verfügung. Im Gegensatz dazu bereitet die Modellierung des linear sich verhaltenden Baugrundes grosse Schwierigkeiten. Sowohl dessen Flexibilität als auch die Energieabstrahlung ins Unendliche müssen erfasst werden. Zwar ist für anspruchsvolle Spezialaufgaben wie die Erdbebenanalyse von Nuklearbauwerken mit entsprechendem Budget die sogenannten Randelementmethode, beruhend auf der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, entwickelt worden. Diese erlaubt aber wegen der grossen Rechenkosten und Arbeitsaufwandes kaum die notwendige Variation der Baugrundparameter, ist wegen ihrer mathematischen Komplexität nicht anschaulich und gehört eher zur angewandten Mechanik als zum Bauingenieurwesen.

Geeigneter sind für die täglich vorkommenden Berechnungen der Baupraxis einfache physikalische Modelle mit einigen Federn, Dämpfern und Massen und einer kleinen Anzahl von Freiheitsgraden, deren Koeffizienten für die wichtigsten Fälle aus Tabellen bestimmt werden können. Die Modellierung des Baugrundes geschieht somit auf die gleiche Weise wie diejenige des Bauwerkes. Insbesondere ist es möglich, die Modelle des Bauwerkes und des Baugrundes zu koppeln und mit einem normalen Tragwerksprogramm die dynamische Baugrund-Bauwerk-Interaktion in einer Berechnung zu erfassen.

#### Festigkeitslehre des Baugrundes

Die Feder-Dämpfer-Massen-Modelle können als Teil einer Festigkeitslehre des dynamisch belasteten Baugrundes betrachtet werden, analog der technischen Balkenlehre des Statikers mit vereinfachtem Deformationsverhalten (Ebenbleiben der Querschnitte). In dieser Festigkeitslehre des Baugrundes wird der dreidimensionale homogene Halbraum durch einen eindimensionalen Kegelstumpf ersetzt. Wichtig ist, dass dieser Kegelstumpf zur Modellierung eines kreisförmigen Oberflächenfundamentes genau einem

Koeffizienten des Feder-Dämpfer-Massen-Modells des Bildes 5 für das Fundament auf der Oberfläche des homogenen Halbraumes

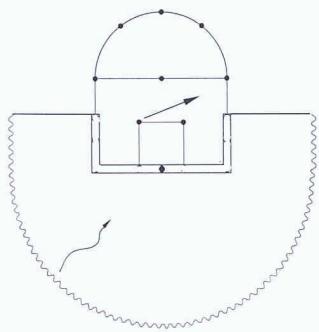


Bild 1.  
Aufgabenstellung der  
Baugrund-Bauwerk-  
Interaktion

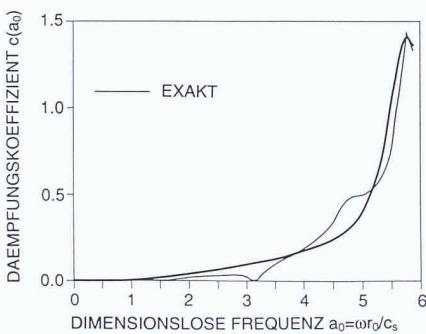
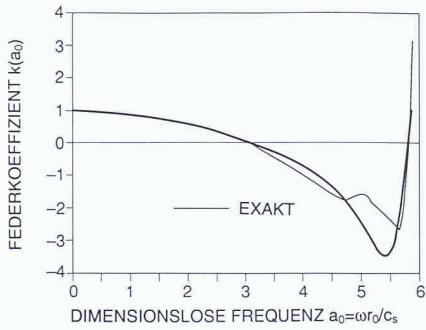


Bild 2.  
Vertikale dynamische  
Steifigkeit des Fun-  
damentes auf der  
Oberfläche der ho-  
mogenen Schicht

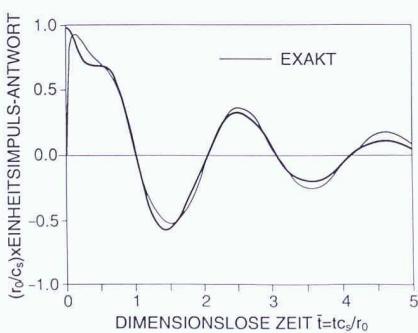


Bild 3.  
Vertikale Verschiebung  
infolge Kraft als Ein-  
heitsimpuls des Fun-  
damentes auf der  
Oberfläche der ho-  
mogenen Schicht

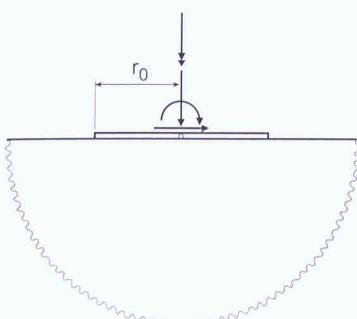


Bild 4.  
Kreisförmiges Fun-  
dament auf die  
Oberfläche des ho-  
mogenen Halbraumes

Feder-Dämpfer-System (und für den Rotationsfreiheitsgrad auch einer Masse mit eigenem Freiheitsgrad) entspricht, wie in der wesentlichen Pionierarbeit [1] bewiesen. Eine ausführliche Beschreibung ist in [2] und [3] enthalten. Die einzige Annäherung besteht somit im Ersetzen des Halbraumes durch einen Kegelstumpf, was physikalisch durch den Ingenieur erklärt werden kann. Ein solches Vorgehen ist dem Einführen einer mathematischen Approximation vorzuziehen, die zum Beispiel darin bestehen kann, dass in den Differentialgleichungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie gewisse Terme mit höheren Ableitungen vernachlässigt werden.

Als nächster Schritt können die Koeffizienten des Feder-Dämpfer-Massen-Modells bei gleicher Anordnung durch Kurvenanpassungen bestimmt werden, anstatt diejenigen des Kegelstumpfes zu verwenden. In einem bestimmten Frequenzbereich wird dadurch erreicht, dass die Abweichung (als Summe der Quadrate) zwischen der Näherungslösung des Feder-Dämpfer-Massen-Modells und den zum Beispiel mittels der oben erwähnten Randelementmethode «genauen» Werten, der Literatur entnommen, oder analytischen Resultaten, falls vorhanden, möglichst klein ausfällt.

Die einfachen, viel verwendeten Modelle [4], [5] und [6] für Fundamente auf der Oberfläche eines homogenen Halbraumes oder darin eingebettete Fundamente können auf diese Weise hergeleitet werden. Als Verallgemeinerung ist ein systematisches Verfahren entwickelt worden [7], um eine ganze Familie von Feder-Dämpfer-Massen-Modellen durch parallele Anordnung des Modells des Kegelstumpfes aufzustellen, wobei nach der Approximation durch eine rationale Funktion keine weiteren Näherungen eingeführt werden. Dies erlaubt, Fundamente auf der Oberfläche einer homogenen Schicht oder darin eingebettete Fundamente auf starrem Fels zu erfassen [8]. Materialdämpfung des Baugrundes kann gemäss [9] direkt in den Berechnungsalgorithmus des Feder-Dämpfer-Massen-Modells eingeführt werden.

Nebenbei bemerkt wurden kürzlich unter direkter Verwendung von Kegelstumpfmodellen eine Festigkeitslehre für die meisten vorkommenden Fälle der Baugrunddynamik, Fundamente auf der Oberfläche und eingebettet in auch geschichtetem Halbraum, entwickelt.

Zur Festigkeitslehre des Baugrundes gehören auch Methoden, in denen in einer horizontalen Ebene ein bestimmtes Wellenbild mit den zugehörigen Verformungen vorgeschrieben wird. Dadurch können Green'sche Funktionen zur Berechnung unregelmässiger Oberflächenfundamente und dynamische Interaktionskoeffizienten zum Erfassen der Pfahlgruppenwirkung bestimmt werden.

Die drei Arten von einfachen physikalischen Methoden der Festigkeitslehre des Baugrundes - die Kegelstumpfmodelle, die darauf basierenden Feder-Dämpfer-Massen-Modelle und die Verfahren mit vorgeschriebenem Verformungsverhalten in der horizontalen Ebene - sind in einem kürzlich erschienenen Buch [10] in allen Einzelheiten beschrieben worden. Einfache, physikalisch motivierte Herleitungen, viele Beispiele und praktische Anwendungen werden erfasst. Zwar führen diese einfachen physikalischen Modelle zu einem gewissen Verlust an Genauigkeit, der aber durch die vielen Vorteile mehr als aufgewogen wird. Die einfachen physikalischen Modelle sind anschaulich, einfach anzuwenden (in vielen Fällen auf der Rückseite des berühmten Briefumschlages ohne Computer), allgemein einsetzbar (was die Geometrie des Fundamentes, den Aufbau des Bodenprofiles und die Einbettung anbetrifft) und genügend genau, so dass sie sich für den Einsatz in der Baudynamik-Praxis eignen. Ebenfalls können diese Methoden zur Kontrolle der Resultate der speziellen Computerprogramme der «genauen» Methoden wie diejenige der Randelemente herangezogen werden.

## Erreichbare Genauigkeit

Um die Abweichungen der Resultate des Feder-Dämpfer-Massen-Modells von den genauen Lösungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie zu belegen, soll der vertikale Freiheitsgrad einer kreisförmigen starren masselosen Fundamentplatte mit Radius  $r_0$  auf der Oberfläche einer homogenen Schicht der Dicke  $d$ , auf starrem Fels gelagert, mit der Poisson's Querdehnungszahl  $v$  untersucht werden (Bild 10). Im folgenden werden  $r_0 = d$  und  $v = 1/3$  gewählt. Das Feder-Dämpfer-Massen-Modell (Bild 11) umfasst neben dem Freiheitsgrad  $u_0$  des Fundamentes auch zwei interne  $u_1$  und  $u_2$ . Es treten vier Federn, drei Dämpfer und eine Masse mit frequenzunabhängigen Koeffizienten auf, wobei diese dimensionslos für den vertikalen Freiheitsgrad,  $r_0 / d = 1$  und  $v = 1/3$  aus der Tabelle 5 entnommen werden. Da das Feder-Dämpfer-Massen-Modell den statischen Fall und den Grenzwert der unendlich grossen Frequenz genau erfasst, sind in Wirklichkeit nur sechs Koeffizienten unabhängig voneinander.

Für eine harmonische Erregung mit der Frequenz  $\omega$  kann der dynamische Steifigkeitskoeffizient, der das Verhältnis der Amplitude der angreifenden Kraft  $P_0(a_0)$  und derjenigen der resultierenden Verschiebung  $u_0(a_0)$  beschreibt, als

$$(1) \quad S(a_0) = K[k(a_0) + i\alpha_0 c(a_0)]$$

dargestellt werden mit der dimensionslosen Frequenz  $a_0 = \omega r_0 / c_s$  ( $c_s$  = Schubwellengeschwindigkeit). In dieser komplexen Schreibweise ist  $K$  der statische Wert,  $k(a_0)$  der dimensionslose frequenzabhängige Federkoeffizient und  $c(a_0)$  der entsprechende Dämpfungs koeffizient. Aus dem Vergleich von  $k(a_0)$  und  $c(a_0)$  der Berechnung mittels dem Feder-Dämpfer-Massen-Modell, als stark ausgezogene Linie im Bild 2 dargestellt, mit der genauen Lösung der Elastizitätstheorie ergibt sich eine gute Übereinstimmung. Die starke Frequenzabhängigkeit wird gut wiedergegeben; insbesondere kann das Feder-Dämpfer-Massen-Modell dem verschwindenden Wert von  $c(a_0)$  im unteren Frequenzbereich (und damit keiner Abstrahlung von Energie im Baugrund) Rechnung tragen.

Als Beispiel einer dynamischen Analyse im Zeitbereich ist die vertikale Verschiebung  $u_0(t)$ , hervorgerufen durch eine Kraft im Zeitpunkt  $t = 0$  als Einheitsimpuls aufgebracht, berechnet worden (Bild 3). Wiederum sind die Abweichungen von der exakten Lösung klein. Eine sehr grosse Anzahl von Vergleichen der Resultate der einfachen physikalischen Modelle mit den genauen Lösungen ist in [10] enthalten.

Bild 5.  
a) Kegelstumpf-Modell  
b) Feder-Dämpfer-Modell für Translation  
c) Feder-Dämpfer-Massen-Modell für Rotation

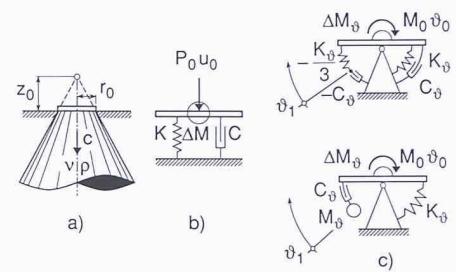


Bild 6.  
Feder-Dämpfer-Massen-Modell ohne internen Freiheitsgrad für a) Translation  
b) Rotation

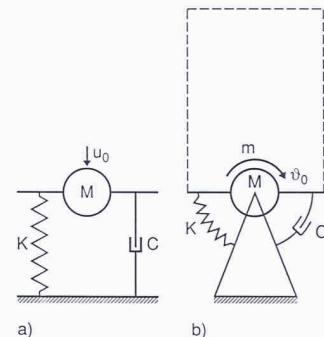


Bild 7.  
Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit einem internen Freiheitsgrad

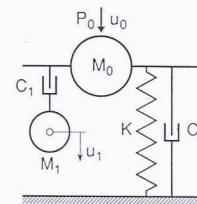


Bild 8.  
Zylindrisches Fundament, eingebettet im homogenen Halbraum

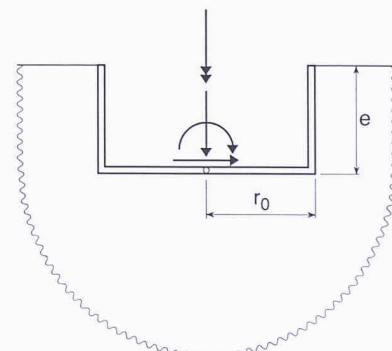


Bild 9.  
Feder-Dämpfer-Massen-Modell für das zylindrische Fundament, eingebettet im homogenen Halbraum mit Kopplung der horizontalen und Kipp-Freiheitsgrade

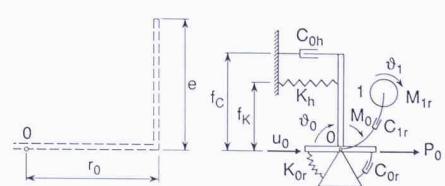


Bild 10.  
Kreisförmiges Fundament auf der Oberfläche der homogenen Schicht

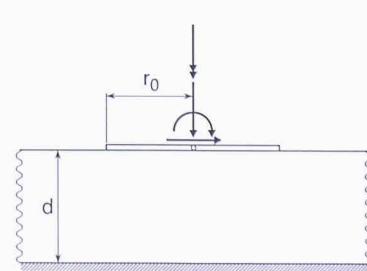


Tabelle 2.

Statische Steifigkeit und dimensionslose Koeffizienten des Feder-Dämpfer-Massen-Modells des Bildes 6 für das kreisförmige Fundament auf der Oberfläche des homogenen Halbraumes

	Statische Steifigkeit $K$	Dimensionslose Koeffizienten
	$\gamma$	$\mu$
<b>Horizontal</b>	$\frac{8G r_0}{2-v}$	0,58
<b>Vertikal</b>	$\frac{4G r_0}{1-v}$	0,85
<b>Kippen</b>	$\frac{8G r_0^3}{3(1-v)}$	$\frac{0,3}{1 + \frac{3(1-v)}{8r_0^5} m}$
<b>Torsion</b>	$\frac{16G r_0^3}{3}$	$\frac{0,433}{1 + \frac{2}{r_0^5} m \sqrt{\frac{m}{r_0^5 p}}}$

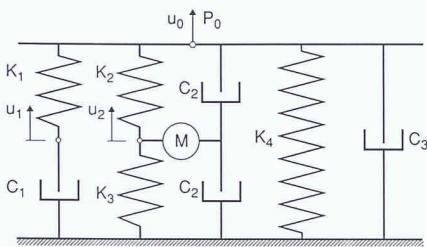


Bild 11.  
Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit zwei internen Freiheitsgraden

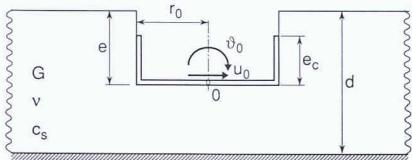


Bild 12.  
Zylindrisches Fundament, eingebettet in der homogenen Schicht

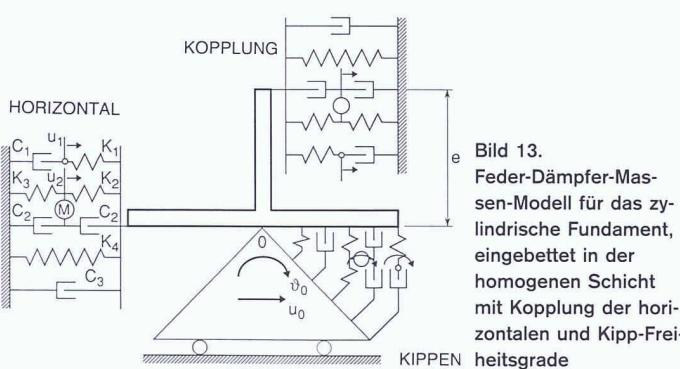


Bild 13.  
Feder-Dämpfer-Massen-Modell für das zylindrische Fundament, eingebettet in der homogenen Schicht mit Kopplung der horizontalen und Kipp-Freiheitsgrade

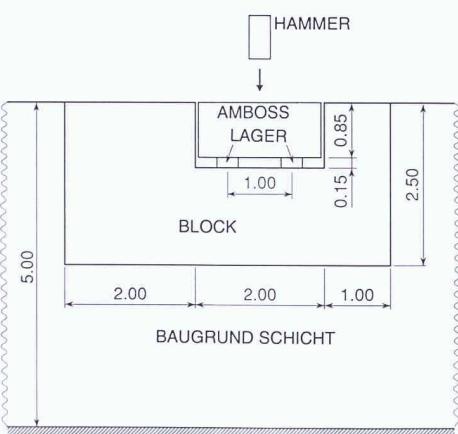


Bild 14.  
Schmiedehammerfundament mit Inertialblock, eingebettet im Baugrund homogene Schicht auf starrem Fels (Abmessungen in m)

Tabelle 3.  
Statische Steifigkeit und dimensionslose Koeffizienten des Feder-Dämpfer-

### Übersicht der Tabellen der Koeffizienten der Feder-Dämpfer-Massen-Modelle

In den folgenden Abschnitten werden für die beiden Grenzfälle des Baugrundes, den homogenen Halbraum und die homogenen Schicht auf starrem Fels, die für das Aufstellen des Feder-Dämpfer-Massen-Modells benötigten Angaben bereitgestellt. Massenlose, starre Fundamente auf der Oberfläche des Baugrundes und mit Einbettung werden für eine umfangreiche Parametervariation behandelt. Die Angaben in Tabellenform umfassen die dimensionslosen Koeffizienten der Federn, Dämpfer und Massen, die statischen Steifigkeitskoeffizienten und Angaben über Exzentrizitäten, falls vorhanden. Wie bereits erwähnt, kann das Feder-Dämpfer-Massen-Modell des Baugrundes mit wenigen internen eigenen Freiheitsgraden direkt an der Unterseite des Fundamentes mit dem dynamischen Modell des Bauwerkes gekoppelt werden und das gesamte dynamische Modell mit einem normalen Tragwerksprogramm berechnet werden. Dieses Vorgehen erlaubt es, die dynamische Baugrund-Bauwerk-Interaktion mit nur geringfügig höherem Aufwand zu erfassen, als wenn nur das Bauwerk berechnet würde.

Im folgenden werden nur die für die praktische Berechnung benötigten Angaben aufgeführt. Als Beispiel wird am Schluss eine Schmiedehammerfundation mit nichtlinearem Verhalten besprochen. Die Herleitungen sowie Annahmen und weitere Beispiele sind in den aufgeführten Referenzen und sehr ausführlich im Buch [10] beschrieben. Es wird vorausgesetzt, dass die dynamische Belastung direkt am Bauwerk angreift. Für Erdbeben und andere über den Baugrund eingeführte Erregungen können die Feder-Dämpfer-Massen-Modelle auch verwendet werden. In diesem Fall muss die Erregung in eine direkt am Fundament und somit am Bauwerk angreifenden dynamischen Belastung umgerechnet werden. Dieses geschieht dadurch, dass die Erregung in Form der so genannten effektiven Fundament-Eingabe-Bewegung dem Feder-Dämpfer-Massen-Modell des Baugrundes aufgezwungen wird. Die zugehörige Reaktionskraft stellt dabei die direkt am Fundament angreifende Last dar. Dieses Vorgehen ist im Abschnitt 6.5 von [10] beschrieben.

### Fundament auf der Oberfläche des homogenen Halbraumes

Im folgenden werden drei Möglichkeiten der Modellierung für ein Fundament auf der Oberfläche des homogenen Halbraumes

Massen-Modelles des Bildes 7 für das kreisförmige Fundament auf der Oberfläche des homogenen Halbraumes

Dimensionslose Koeffizienten					
Statische Steifigkeit Dämpfer		$\gamma_0$	$\gamma_1$	Massen	
<b>K</b>				$\mu_0$	$\mu_1$
<b>Horizontal</b>	$\frac{8G r_0}{2-v}$	$0,78 - 0,4 v$	—	—	—
<b>Vertikal</b>	$\frac{4G r_0}{1-v}$	0,8	$0,34 - 4,3 v^4$	$v < \frac{1}{3}$ 0 $v > \frac{1}{3}$ $0,9(v - \frac{1}{3})$	$0,4 - 4 v^4$
<b>Kippen</b>	$\frac{8G r_0^3}{3(1-v)}$	—	$0,42 - 0,3 v^2$	$v < \frac{1}{3}$ 0 $v > \frac{1}{3}$ $0,16(v - \frac{1}{3})$	$0,34 - 0,2 v^2$
<b>Torsion</b>	$\frac{16G r_0^3}{3}$	— (0,017)	0,29 (0,291)	— (—)	0,2 (0,171)

(Bild 4) mit zunehmender Genauigkeit für jeden Freiheitsgrad (horizontal, vertikal, Kippen, Torsion) beschrieben.

### Kegelstumpfmodell [2, 3]

Für jeden Freiheitsgrad kann ein starres massenloses Fundament mit der Fläche  $A_0$ , dem (polaren) Trägheitsmoment  $I_0$  auf der Oberfläche eines homogenen Halbraumes mit der Poisson's Querdehnungszahl  $v$ , Schub- und Dilatationswellengeschwindigkeiten  $c_s$  und  $c_p$  und Dichte  $\rho$  als Kegelstumpf (Bild 5a und Tabelle 1) mit gleichem Radius  $r_0$ , Schlankheit  $z_0/r_0$  und Wellengeschwindigkeit  $c$  modelliert werden ( $c_s = \sqrt{G/\rho}$ ,  $c_p = \sqrt{E_c/\rho}$  mit Schubmodul  $G$  und Zusammendrückungsmodul  $E_c = G 2(1-v)/(1-2v)$ ). Für die horizontalen und Torsions-Kegelstumpf-Modelle mit Schubbeanspruchung ist die Wellengeschwindigkeit  $c$  gleich  $c_s$ . Für die vertikalen und Kipp-Kegelstumpf-Modelle mit axialer Beanspruchung ist  $c$  gleich  $c_p$  für  $v \leq 1/3$  und  $c$  gleich  $2c_s$  für  $1/3 < v \leq 1/2$ . Das Translations-Kegelstumpf-Modell für die Verschiebung  $u_0$  und die Kraft  $P_0$  entspricht dynamisch exakt dem Feder-Dämpfer-Modell (Bild 5b). Das Rotations-Kegelstumpf-Modell für die Rotation  $\vartheta_0$  und das Moment  $M_0$  ist exakt äquivalent einem Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit einem internen Freiheitsgrad  $\vartheta_1$  (Bild 5c), von dem zwei Möglichkeiten dargestellt sind. Im Modell ohne das Massenträgheitsmoment  $M_0$  sind zwei der Koeffizienten negativ. Alle Koeffizienten (Tabelle 1) sind frequenzunabhängig. Für die vertikale und die Kipp-Bewegungen treten für  $1/3 < v \leq 1/2$  zusätzlich eine mitschwingende gefangene Masse  $\Delta M$  und ein Massenträgheitsmoment  $\Delta M_0$  auf, die direkt dem Fundamentknoten zugeordnet werden.

### Feder-Dämpfer-Massen-Modell ohne internen Freiheitsgrad [4]

Diese einfachste Anordnung dem Bild 5b entsprechend ist für den Translationsfreiheitsgrad  $u_0$  und den Rotationsfreiheitsgrad  $\vartheta_0$  in den Bildern 6a und 6b dargestellt mit den Angaben in der Tabelle 2. Neben der Feder mit dem statischen Steifigkeitskoeffizienten  $K$  treten ein Dämpfer  $C$  und eine Masse  $M$  (Massenträgheitsmoment für Rotation) auf mit den Koeffizienten:

$$(2a) \quad C = \frac{r_0}{c_s} \gamma K$$

$$(2b) \quad M = \frac{r_0^2}{c_s^2} \mu K$$

Es ist zu beachten, dass  $\gamma$  und  $\mu$  der Rotationsfreiheitsgrade auch eine Funktion des Massenträgheitsmomentes  $m$  des Bauwerkes (mitschwingender Teil) sind.

Tabelle 4.

Statische Steifigkeit und dimensionslose Koeffizienten des Feder-Dämpfer-

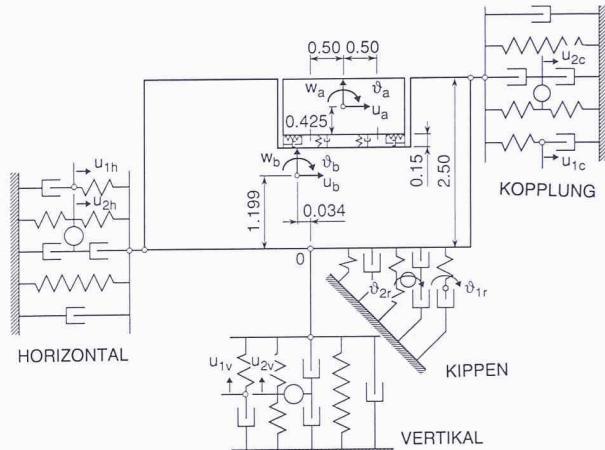


Bild 15.

Dynamisches Modell der Schmiedehammerfundation mit Feder-Dämpfer-Massen-Modell

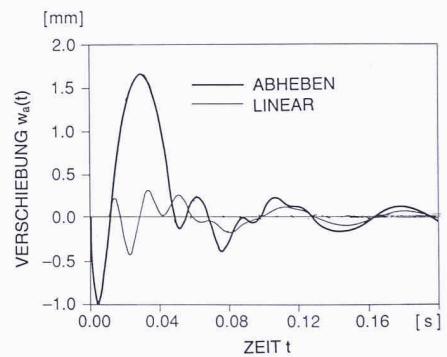


Bild 16.

Vertikale Verschiebung im Schwerpunkt des Ambosses

Massen-Modell des Bildes 9 für das zylindrische Fundament, eingebettet im homogenen Halbraum

	Statische Steifigkeit <b>K</b>	Dimensionslose Koeffizienten		Masse <b>μ</b>
		Dämpfer <b>γ₀</b>	<b>γ₁</b>	
<b>Horizontal</b>	$\frac{8G r_0}{2-v} \left(1 + \frac{e}{r_0}\right)$	$0,68 + 0,57 \sqrt{\frac{e}{r_0}}$	—	—
<b>Vertikal</b>	$\frac{4G r_0}{1-v} \left(1 + 0,54 \frac{e}{r_0}\right)$	$0,80 + 0,35 \frac{e}{r_0}$	$0,32 - 0,01 \left(\frac{e}{r_0}\right)^4$	0,38
<b>Kippen</b>	$K_r = \frac{8G r_0^3}{3(1-v)} \left[1 + 2,3 \frac{e}{r_0} + 0,58 \left(\frac{e}{r_0}\right)^3\right]$ $K_{0r} = K_r - \frac{G r_0^3}{2(2-v)} \left(1 + \frac{e}{r_0}\right) \left(\frac{e}{r_0}\right)^2$	$0,15631 \frac{e}{r_0}$ $-0,08906 \left(\frac{e}{r_0}\right)^2$ $-0,00874 \left(\frac{e}{r_0}\right)^3$	$0,40 + 0,03 \left(\frac{e}{r_0}\right)^2$	$0,33 + 0,10 \left(\frac{e}{r_0}\right)^2$
<b>Torsion</b>	$\frac{16G r_0^3}{3} \left(1 + 2,67 \frac{e}{r_0}\right)$	—	$0,29 + 0,09 \sqrt{\frac{e}{r_0}}$	$0,20 + 0,25 \sqrt{\frac{e}{r_0}}$

### Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit internem Freiheitsgrad [6]

Diese Anordnung vom unteren Teil des Bildes 5c abgeleitet, ist im Bild 7 für den Freiheitsgrad  $u_0$  und die Kraft  $P_0$  dargestellt mit den Angaben in der Tabelle 3. Neben der Feder mit dem statischen Steifigkeitskoeffizienten  $K$  und dem Dämpfer  $C_0$ , welche den Fundamentknoten mit der Masse  $M_0$  (Massenträgheitsmoment für Rotation) mit einem starren Auflager verbinden, wird ein interner Freiheitsgrad  $u_1$  mit eigener Masse  $M_1$  (Massenträgheitsmoment für Rotation) eingeführt, welcher mit einem Dämpfer  $C_1$  am Fundamentknoten befestigt ist. Deren Koeffizienten folgen als:

$$(3a) \quad C_0 = \frac{r_0}{c_s} \gamma_0 K$$

$$(3b) \quad C_1 = \frac{r_0}{c_s} \gamma_1 K$$

$$(3c) \quad M_0 = \frac{r_0^2}{c_s^2} \mu_0 K$$

$$(3d) \quad M_1 = \frac{r_0^2}{c_s^2} \mu_1 K$$

### Fundament eingebettet im homogenen Halbraum (Bild 8)

Für die vertikalen und Torsions-Freiheitsgrade des zylindrischen starren masselosen Fundamentes mit der Einbettung  $e$  wird jedes Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit einem internen Freiheitsgrad des Bildes 7 mit  $M_0 = 0$  verwendet mit den Angaben in der Tabelle 4 und der Gleichung (3) [6].

Um die Kopplung zwischen der horizontalen Verschiebung  $u_0$  mit der Kraft  $P_0$  und der Kipprotation  $\vartheta_0$  mit dem Moment  $M_0$  zu erfassen (Bild 9), wird das Feder-Dämpfer-Modell für den horizontalen Freiheitsgrad  $u_0$  dem Bild 5b entsprechend mit den Exzentrizitäten  $f_K$  und  $f_C$  angeschlossen:

$$(4a) \quad f_K = 0,25 e$$

$$(4b) \quad f_C = 0,32 e + 0,03 e \left( \frac{e}{r_0} \right)^2$$

Die Feder  $K_h$  mit der statischen Steifigkeit  $K$  und der dimensionslose Koeffizient  $\gamma_0$  des Dämpfers sind in der Tabelle 4 aufgeführt mit:

$$(5) \quad C_{0h} = \frac{r_0}{c_s} \gamma_0 K$$

Für den Kippfreiheitsgrad  $\vartheta_0$  wird das Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit einem internen Freiheitsgrad  $\vartheta_1$  des Bildes 7 mit  $M_{0r} = 0$  verwendet. Es ist zu beachten, dass die entsprechenden Koeffizienten bezüglich  $K_r$  (und nicht  $K_{0r}$ ) definiert sind, obwohl  $K_{0r}$  der Koeffizient der Feder ist, welche die Verbindung zum starren Auflager darstellt [10]:

$$(6a) \quad C_{0r} = \frac{r_0}{c_s} \gamma_0 K_r \quad (6b) \quad C_{1r} = \frac{r_0}{c_s} \gamma_1 K_r \quad (6c) \quad M_{1r} = \frac{r_0^2}{c_s^2} \mu_1 K_r$$

Tabelle 5.  
Dimensionslose Koeffizienten des Feder-Dämpfer-Massen-Modells des

Bildes 11 für das kreisförmige Fundament auf der Oberfläche der homogenen Schicht

		Horizontal			Vertikal			Kippen			Torsion
		Poisson's Querdehnungszahl $\nu$			0	1/3	0.45	0	1/3	0.45	
1.00	$k_1$	-109636 E+02	-125658 E+02	-107091 E+02	-185216 E+02	-312572 E+02	-585650 E+02	-538137 E+01	-127100 E+02	-125057 E+02	-920277 E+01
	$k_2$	-199616 E+02	-100143 E+02	-277613 E+02	-689058 E+02	+564651 E+01	+533868 E+02	-118019 E+02	-127000 E+01	-102097 E+02	-488643 E+01
	$k_3$	-596293 E+03	-236814 E+03	-837270 E+03	-803915 E+04	-297570 E+04	-972054 E+05	-370561 E+03	-106411 E+03	-114401 E+05	-762034 E+02
	$k_4$	+262006 E+02	+172890 E+02	+350886 E+02	+781698 E+02	+101028 E+02	-297301 E+02	+152717 E+02	+665102 E+01	+171002 E+02	+104850 E+02
	$c_1$	-423955 E+01	-391585 E+01	-443420 E+01	-564579 E+01	-620122 E+01	-533597 E+01	-152562 E+01	-168764 E+01	-159579 E+01	-209847 E+01
	$c_2$	-144980 E+02	-969345 E+01	-164981 E+02	-573623 E+02	-372925 E+02	-162817 E+03	-511671 E+01	-464871 E+01	-205038 E+02	-424955 E+01
0.50	$c_3$	+176380 E+02	+128349 E+02	+196381 E+02	+618023 E+02	+435725 E+02	+173237 E+03	+622671 E+01	+621871 E+01	+231038 E+02	+581955 E+01
	$m$	-444888 E+02	-177585 E+02	-804875 E+02	-355432 E+03	-896786 E+02	-759400 E+03	-136958 E+02	-294864 E+01	-748688 E+02	-501042 E+01
	$k_1$	-101741 E+02	-756096 E+01	-103098 E+02	-869429 E+01	-178038 E+02	-211241 E+02	-558202 E+01	-315920 E+01	-544861 E+01	-584813 E+01
	$k_2$	-711128 E+01	+221036 E+01	+353643 E+00	-211429 E+02	+869558 E+01	+237930 E+02	-260867 E+01	+429538 E+00	+544528 E+01	+779373 E+00
	$k_3$	-376551 E+02	-183990 E+02	-386290 E+02	-301954 E+03	-648930 E+02	-574768 E+04	-120186 E+02	-563639 E+00	-495529 E+02	-267204 E+01
	$k_4$	+114651 E+02	+370791 E+01	+631911 E+01	+266455 E+02	+167960 E+00	-104560 E+02	+553603 E+01	+268680 E+01	-714571 E+00	+448746 E+01
0.25	$c_1$	-563146 E+01	-169515 E+01	-312323 E+01	-635453 E+01	-300736 E+01	-885920 E+01	-180105 E+01	-217449 E+00	-226588 E+01	-873265 E+00
	$c_2$	-853329 E+01	-484337 E+01	-900332 E+01	-118278 E+02	-967485 E+01	-348879 E+02	-209944 E+01	-485884 E-01	-872006 E+00	-664093 E+00
	$c_3$	+116733 E+02	+798337 E+01	+121433 E+02	+162678 E+02	+159548 E+02	+453079 E+02	+320944 E+01	+161859 E+01	+347201 E+01	+223409 E+01
	$m$	-125108 E+02	-142805 E+02	-222875 E+02	-438319 E+02	-104698 E+02	-156304 E+03	-166034 E+01	-550887 E-01	-105920 E+01	-758683 E+00
	$k_1$	-500393 E+01	-569922 E+01	-635602 E+01	-650348 E+01	-866267 E+01	-939217 E+01	-197103 E+01	-131566 E+01	-185845 E+01	-317223 E+01
	$k_2$	+117908 E+01	+113372 E+01	+126563 E+01	+212837 E+01	+360033 E+01	+591506 E+01	-908392 E+00	-159178 E+01	+140842 E+01	-110204 E+02
0.00	$k_3$	-531658 E+01	-627809 E+01	-861155 E+01	-111486 E+02	-206851 E+02	-294639 E+02	+320667 E+00	+889908 E+00	-198123 E+01	-272014 E+02
	$k_4$	+330564 E+01	+414181 E+01	+444955 E+01	+290606 E+01	+353509 E+01	+239510 E+01	+280516 E+01	+228996 E+01	+228257 E+00	+133791 E+02
	$c_1$	-753687 E+00	-123420 E+01	-118324 E+01	-147587 E+01	-301652 E+01	-652322 E+01	-118191 E+01	-117566 E+01	-166191 E+01	-175255 E+01
	$c_2$	-320391 E+01	-343160 E+01	-476257 E+01	-545496 E+01	-633133 E+01	-153512 E+01	-192001 E+01	-120420 E+00	-608065 E-01	-576183 E+00
	$c_3$	+634391 E+01	+657160 E+01	+790257 E+01	+989496 E+01	+126113 E+02	+119551 E+02	+131920 E+01	+199042 E+01	+266081 E+01	+214618 E+01
	$m$	-197705 E+02	-277938 E+02	-353939 E+02	-202557 E+02	-262470 E+02	-217797 E+01	-496405 E-02	-234838 E-01	-166728 E-01	-408057 E+00

**Fundament auf der Oberfläche der homogenen Schicht**

Für jeden Freiheitsgrad  $u_0$  mit der Kraft  $P_0$  des kreisförmigen starren masselosen Fundamentes auf der Oberfläche der homogenen Schicht (Bild 10) mit der Dicke  $d$  auf starrem Fels [8] wird das Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit zwei internen Freiheitsgraden  $u_1, u_2$  des Bildes 11 verwendet. Es besteht aus vier Federn  $K_i$ , drei Dämpfern  $C_i$  und einer Masse  $M$  mit den Angaben der Tabelle 5. Für die Translationsfreiheitsgrade gilt (Schubmodul  $G$ ):

$$(7a) K_i = k_i G r_0 \quad i=1, \dots, 4 \quad (7b) C_i = c_i G \frac{r_0^2}{c_s} \quad i=1, \dots, 3 \quad (7c) M = m G \frac{r_0^3}{c_s^2}$$

Für die Rotationsfreiheitsgrade wird die rechte Seite der Gleichung (7) mit  $r_0^2$  multipliziert.

**Fundament eingebettet in der homogenen Schicht**

Für die vertikalen und Torsions-Freiheitsgrade des zylindrischen starren masselosen Fundamentes (Bild 12) mit der Kontaktlänge  $e_c$  [8] wird je das Feder-Dämpfer-Massen-Modell mit zwei internen Freiheitsgraden des Bildes 11 verwendet mit den Angaben in der Tabelle 6 und den Gleichungen (7). Um die Kopplung zwischen der horizontalen Verschiebung  $u_0$  und der Kipposition  $\vartheta_0$  einzuführen, wird zusätzlich zu den Feder-Dämpfer-Massen-Modellen dieser beiden Freiheitsgrade ein weiteres mit der Exzentrizität  $e$  eingeführt. Dieses Feder-Dämpfer-Massen-Modell ist im Bild 13 und in der Tabelle 6 mit dem Wort Kopplung bezeichnet.

**Tabelle 6.**  
Dimensionslose Koeffizienten der Feder-Dämpfer-Massen-Modelle der

Bilder 11 und 13 für das zylindrische Fundament, eingebettet in der homogenen Schicht (Verhältnis von Einbettung zu Radius  $e/r_0 = 1$ )

				<b>Vertikal</b>	<b>Horizontal</b>	<b>Kippen</b>	<b>Kopplung</b>	<b>Torsion</b>	
<b>Verhältnis von Radius zu Dicke <math>r_0/d</math></b>	<b>Kontaktverhältnis <math>e_c/e</math></b>	$\frac{1}{2}$	1.00	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.203759 E+02 +.339543 E+01 -.617014 E+01 +.166202 E+02 -.918456 E+01 -.596381 E+00 +.131164 E+02 -.987169 E+00	-.124401 E+02 +.286199 E+01 -.208541 E+02 +.794575 E+01 -.590158 E+01 -.516028 E+01 +.130103 E+02 -.163126 E+02	-.125229 E+02 -.583152 E+00 -.814822 E-01 +.130945 E+02 -.315268 E+01 -.885823 E-01 +.322858 E+01 -.680666 E+00	-.618776 E+01 +.202777 E+01 -.141784 E+02 +.337083 E+01 -.333135 E+01 -.340080 E+01 +.811310 E+01 -.146553 E+02	-.139252 E+02 -.275441 E+01 +.178780 E+01 +.161164 E+02 -.774712 E-02 -.736101 E+00 +.858610 E+01 -.962102 E+00
			0.50	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.190169 E+02 +.102770 E+02 -.256293 E+02 +.480379 E+01 -.803919 E+00 -.378972 E+01 +.131677 E+02 -.364874 E+01	-.123585 E+02 +.382788 E+01 -.116229 E+02 +.697738 E+01 -.129978 E+01 -.357027 E+01 +.102413 E+02 -.820645 E+01	-.918010 E+01 +.934512 E+00 -.466308 E+01 +.821627 E+01 -.212247 E+01 -.316747 E+00 +.266675 E+01 -.342125 E+01	-.311508 E+01 +.786487 E+00 -.869559 E+01 +.184030 E+01 -.715314 E+00 -.208337 E+01 +.326137 E+01 -.888905 E+01	-.150459 E+02 +.149201 E+01 -.230599 E+01 +.132374 E+02 -.513171 E+00 -.403901 E+00 +.511390 E+01 -.515523 E+00
			0.00	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.199866 E+02 +.324059 E+01 -.138239 E+03 +.151110 E+02 -.577181 E+01 -.891247 E+01 +.151425 E+02 -.485815 E+02	-.113528 E+02 +.187819 E+01 -.141228 E+02 +.837372 E+01 -.169786 E+01 -.396633 E+01 +.710633 E+01 -.142894 E+02	-.801960 E+01 +.103933 E+01 -.800817 E+01 +.584466 E+01 -.101867 E+01 -.157192 E+01 +.313092 E+01 -.217586 E+01		-.820959 E+01 +.236828 E+00 -.295213 E+00 +.794727 E+01 -.288545 E+00 -.308176 E-01 +.160082 E+01 -.372596 E-01
			1.00	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.215677 E+02 +.995664 E+01 -.299529 E+02 +.122789 E+01 -.214856 E+01 -.703468 E+01 +.195563 E+02 -.476605 E+01	-.800686 E+01 +.248098 E+01 -.530555 E+01 +.460883 E+01 -.638370 E+01 -.234186 E+01 +.101919 E+02 -.598035 E+01	-.112339 E+02 +.271244 E+01 -.112792 E+02 +.830774 E+01 -.185381 E+01 -.147482 E+01 +.461482 E+01 -.101760 E+02	-.531331 E+01 +.128879 E+01 -.117090 E+02 +.314281 E+01 -.345899 E+01 -.442673 E+01 +.913903 E+01 -.222249 E+02	-.158881 E+02 -.216892 E+01 +.122884 E+01 +.175253 E+02 -.770582 E+00 -.114118 E+01 +.899118 E+01 -.244900 E+01
		$\frac{1}{3}$	1.00	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.236309 E+02 +.106994 E+02 -.415582 E+02 +.391023 E+00 -.734715 E-02 -.101472 E+02 +.195330 E+02 -.674277 E+01	-.105510 E+02 +.323771 E+01 -.101866 E+02 +.579774 E+01 -.691681 E-01 -.475156 E+01 +.114226 E+02 -.148975 E+02	-.812675 E+01 +.327590 E+01 -.183711 E+02 +.434718 E+01 -.831614 E+00 -.272228 E+01 +.507228 E+01 -.147137 E+02	-.258694 E+01 +.487010 E+00 -.708362 E+01 +.155304 E+01 -.752538 E+00 -.265221 E+01 +.383021 E+01 -.128622 E+02	-.164865 E+02 +.162631 E+01 -.359665 E+01 +.138158 E+02 -.786309 E+00 -.129218 E+01 +.600218 E+01 -.159889 E+01
			0.50	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$	-.147108 E+02 +.600489 E+01 -.355109 E+02 +.527313 E+01 -.203850 E+01 -.830045 E+01 +.145304 E+02 -.200705 E+02	-.922525 E+01 +.187933 E+01 -.788239 E+01 +.637232 E+01 -.425306 E-01 -.368700 E+01 +.682700 E+01 -.139626 E+02	-.736535 E+01 -.907967 E+00 -.157724 E+03 +.684877 E+01 -.168579 E+01 -.114538 E+02 +.130128 E+02 -.920928 E+02		-.790274 E+01 +.176502 E-01 -.179897 E-01 +.788488 E+01 -.128670 E+00 -.263292 E-03 +.157125 E+01 -.331649 E-03
			0.00	$k_1$ $k_2$ $k_3$ $k_4$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ $m$					

**Literatur**

- [1] *Meek, J.W. and Veletsos, A.S.*: Simple Models for Foundations in Lateral and Rocking Motion, Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome, 1974, Vol. 2: 2610-2613.
- [2] *Meek, J.W. and Wolf, J.P.*: Cone Models for Homogeneous Soil, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 118 (1992): 667-685.
- [3] *Meek, J.W. and Wolf, J.P.*: Cone Models for Nearly Incompressible Soil, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 22 (1993): 649-663.
- [4] *Whitman, R.V.*: Soil-Platform Interaction, Proceedings of the Conference on the Behaviour of Offshore Structures, Norwegian Geotechnical Institute, Oslo, 1976, Vol. 1: 817-829.
- [5] *Richart, F.E., Hall, J.R. and Woods, R.D.*: Vibrations of Soils and Foundations, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1970.
- [6] *Wolf, J.P. and Somaini, D.R.*: Approximate Dynamic Model of Embedded Foundation In Time Domain, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 14 (1986): 683-703.
- [7] *Wolf, J.P.*: Consistent Lumped-Parameter Models for Unbounded Soil: Physical Representation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 20 (1991): 11-32.
- [8] *Wolf, J.P. and Paronesso, A.*: Lumped-Parameter Model for a Rigid Cylindrical Foundation Embedded in a Soil Layer on Rigid Rock, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 21 (1992): 1021-1038.
- [9] *Meek, J.W. and Wolf, J.P.*: Material Damping for Lumped-Parameter Models of Foundations, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23 (1994): 349-362.
- [10] *Wolf, J.P.*: Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.

**Schmiedehammerfundation**

Als praktisches Beispiel einer nichtlinearen Analyse der Baugrund-Bauwerk-Interaktion wird ein Schmiedehammerfundament, eingebettet in eine Bodenschicht auf starrem Fels, besprochen (Bild 14). Der Hammer schlägt auf den exzentrisch angeordneten Amboss auf. Da die Lager zwischen dem Stahlamboss und dem Betonblock keinen Zug übertragen können, wird sich ein teilweises Abheben des Ambosses einstellen, sobald die vertikale dynamische Kraft im Lager die Eigenlast übersteigt. Die Koeffizienten der Feder-Dämpfer-Massen-Modelle des zylindrischen eingebetteten Fundamentes für die vertikalen und horizontalen Verschiebungen, die Kipprotation und den Kopplungsterm folgen für  $r_0/d = 0,5$  und  $e_c/e = 1$  aus der Tabelle 6 (Bild 15). Im linearen Fall, also ohne Abheben, treten  $4 \times 2$  Freiheitsgrade für die Feder-Dämpfer-Massen-Modelle des Baugrundes und die  $2 \times 3$ -Starrkörperfreiheitsgrade des Blocks und des Ambosses auf. Das totale dynamische Modell des Bildes 15 kann direkt mit einem Tragwerksprogramm, welches lokale Nichtlinearitäten zulässt, verarbeitet werden. Wie erwartet, erhöht das Abheben die vertikale Verschiebung des Ambosses  $w_a$  beträchtlich verglichen mit dem Resultat einer linearen Berechnung (Bild 16).

Adresse des Verfassers:

*John P. Wolf, Dr. sc. techn.*, Abteilung für Bauingenieurwesen, Eidgenössische Technische Hochschule Lausanne, 1015 Lausanne.