Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 113 (1995)
Heft: 19

Artikel: Überfallstrahlen
Autor: Hager, Willi H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-78712

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Willi H. Hager, Zürich

Überfallstrahlen

Das heutige Wissen über den Verlauf von Überfallstrahlen bei scharfkantigen Wehren wird mitgeteilt. Dabei handelt es sich hauptsächlich um experimentelle Resultate, ist es doch erst in letzter Zeit gelungen, solche komplexe Abflüsse mit zwei freien Oberflächen rechnerisch zu modellieren. Die Angaben sind so aufbereitet, dass sie sich direkt auf praktische Problemstellungen etwa im Zusammenhang mit Strahlen von Bogenmauern oder auf Belüftungsprobleme anwenden lassen. Der Frage der Modellähnlichkeit wird speziell nachgegangen, da solche Strahlen sowohl durch die Viskosität als auch durch die Oberflächenspannung beeinflusst werden können.

Strahlen bilden in der Fluidmechanik eine spezielle Klasse von Strömungen, welche sich durch eine konzentrierte Impulsballung mit Diffusionseigenschaften auszeichnen. Üblicherweise denkt man bei Strahlen an störende Luftmassen, die bei offenem Fenster in ein Zimmer eintreten, oder an Strahlen im Wasserbad. Wasserstrahlen stellen sich bei der Bewässerung ein mit dem Unterschied zu den erwähnten Strahlen, dass sie eine freie Oberfläche besitzen, an der Atmosphärendruck herrscht.

Strahlen wurde in diesem Jahrhundert ein ausserordentliches Interesse entgegengebracht, man denke dabei an Flugzeug- und Raketenantrieb, an Wärme-, Gas- und Wasserstrahlen sowie an die Misch- und Verbrennungstechnik. Die Berechnung solcher Strahlen ist massgeblich von Prandtl (1875-1953) sowie seinen Schülern um 1930 entwickelt worden. Dabei ist ein homogenes inkompressibles Fluid vorausgesetzt worden, und anhand einer Abschätzung von Grössenordnungen in den Gleichungen von Navier-Stokes folgten die *Grenzschichtgleichungen*. Danach ist die Mischbreite (Grenzschichtdicke) im Vergleich zur Strahlenausdehnung klein und der Geschwindigkeitsgradient in Querrichtung viel grösser als in Strahllängsrichtung. Wird weiterhin die *Strahlähnlichkeit* in Rechnung gestellt, so lässt sich das ebene Problem in ein eindimensionales reduzieren, welches mit ausgewählten Versuchen einer Lösung zugeführt werden kann.

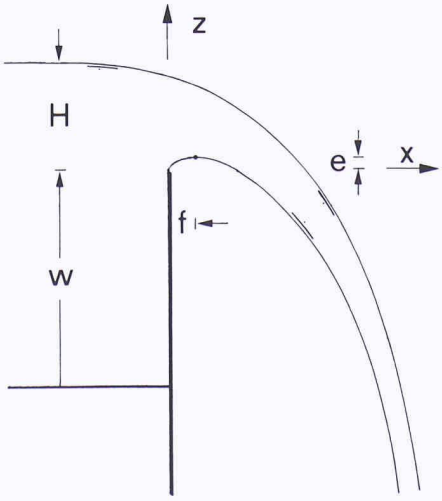
Überfallstrahlen sind damit verglichen sehr viel komplexer, da sie weder dem Strahlähnlichkeitsgesetz folgen, noch sich durch die Grenzschichtgleichungen approximieren lassen. Sieht man sogar von der Viskosität und der Kapillarität ab, so werden sie durch die Potentialgleichung mit Quellentermen beherrscht. Infolge der freien Oberfläche ist üblicherweise die Ähnlichkeit nach Froude massgebend, aber kombinierte Effekte der Reynolds- und Weberzahl können bei kleinen - etwa im Labor bei Modellversuchen sich ergebenden - Abmessungen das Basisgesetz stören. Über diese Modelleffekte sind einige Kenntnisse vorhanden, welche mitgeteilt werden sollen.

Überfallstrahlen sind in der Praxis relevant, so bei Hochwasserentlastungen von Bogenstaumauern und bei der Definition des Strahlaufprallgebietes zur Kolksicherung oder bei der Anordnung von Belüftungskanälen zur Verhinderung von hydromechanisch angeregten Vibrationen. Sie bilden aber insbesondere die Grundlage zur Geometrie des unterdruckfreien Wehrprofils, welches im Bemessungfall exakt mit der unteren Strahltrajektorie übereinstimmen soll. Nachfolgend sollen die heutigen Kenntnisse besprochen werden.

Frühere Resultate

Der erste seriöse Versuch, die Geometrie des Überfallstrahls zu erfassen, unternahm Bazin (1890). Henry Bazin (1829-1917) darf schlechthin als der erste Experimental-Hydrauliker bezeichnet werden, hat er doch massgeblich zum Fliessgesetz um 1860 und zur Schwallfortpflanzung beigetragen. Während rund 10 Jahren nahmen ihn dann Rechtecküberfälle in Bann, die gesammelten Resultate legte er 1898 nieder. Anhand von zwei scharfkantigen, vollbelüfteten Überfällen der Wehrhöhen $w = 0.35$ m und 1.13 m wies er nach, dass die auf die Überfallhöhe H bezogenen Koordinaten der oberen und unteren Strahlbegrenzung unveränderlichen Kurven entsprechen. Die obere Kurve ist bei vertikalem Wehr ausgezeichnet durch den Anfangspunkt von 0.85 bis 0.86 H über der Wehrkrone. Die untere Kurve steigt von der Wehrkrone her auf den Maximalwert 0.112 H an der Stelle $x/H = 0.25$, um dann bei $x/H = 0.68$ wieder auf Kronenhöhe zu fallen (Bild 1). Der Einfluss der Wehrneigung auf die untere Strahlbegrenzung wurde systematisch erfasst und die entsprechenden Kurven dimensionslos ausgewertet.

Bazin ging gar soweit, auch die Geschwindigkeits- und Druckverteilung im kontraktierten Strahlquerschnitt zu erfassen. Die Druckhöhe wächst von den Oberflächen mit Atmosphärendruck auf den Maximalwert 0.18 H auf der Höhe $z/H = 0.34$ über der Wehrkrone an. Die Geschwindigkeit nimmt vom Wert $0.50(2gH)^{1/2}$ an der Oberfläche ($z/H = 0.76$) hyperbolisch zu bis auf den Maximalwert von $0.89(2gH)^{1/2}$ an der Strahlunterseite. Dabei bedeutet g die Erdbeschleunigung. Diese Experimente wurden durch Berechnungen von Boussinesq erhärtet. Obwohl Bazin den Wert seiner Experimente noch nicht in die Praxis umsetzte und er keine eigentliche technische Anwendung erwähnte, hat er ein ausgezeichnetes Bild des Überfallstrahls gezeichnet. Auch Boussinesq ging es offensichtlich weniger um eine praktische Anwendung der Resultate, sondern um eine



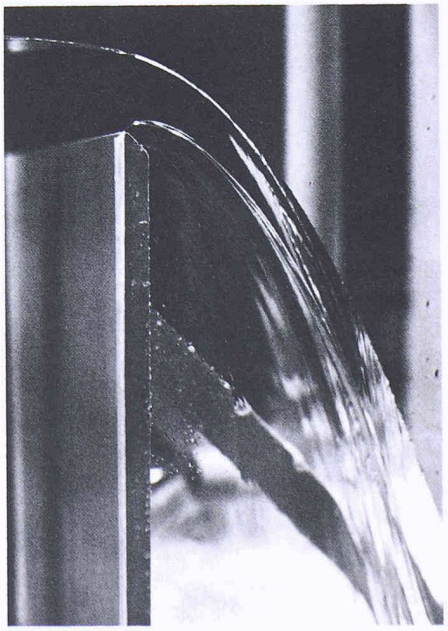


Bild 1.
a) Definition der Überfallgeometrie, b) entsprechende Foto

Verifikation physikalischer Gesetzmässigkeiten, die er an hervorragenden Experimenten testen wollte. Mit Bazin hatte er dabei auf den Besten seiner Zeit gesetzt.

Eine einfache, wenn auch unrichtige Berechnung des «Aufprallpunktes» eines Überstrahls wurde von Deischa (1923) abgeleitet. Er betrachtete den Überfallstrahl als Massenpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von rund $(gH)^{1/2}$ und erhielt als Aufprallabstand vom vertikalen Überfall der Wehrhöhe w den Wert $(3/2)(wH)^{1/2}$.

Stevens (1928) schlug erstmals Belüfterelemente in der Form von Strahlaufreissern auf überströmten Bogenmauern vor (Bild 2). Damit soll eine vollständige Strahlbelüftung sichergestellt und Vibrationen auf das Bauwerk verhindert werden. Der Aufprallpunkt des Strahls soll so weit ins Unterwasser geführt werden, dass der Kolk der Sperre keinen Schaden zuführt. Durch solche Belüfter wird die ebene Strahlgeometrie natürlich gestört und der Lufteintrag in den Strahl verändert. In der Folge soll jedoch ausschliesslich der ebene Fall betrachtet werden.

De Marchi (1928), später Professor am Politecnico in Mailand und grösster Hydrauliker Italiens des 20. Jahrhunderts, hat sich intensiv mit dem scharfkantigen Überfall beschäftigt. Seine Zielsetzung war klar, wollte er doch die optimale Kronenform für Überfallbauwerke ermitteln. Aufbauend auf der Kronenform von Bazin erstellte er einen sogenannten *Standardüberfall*, d. h. ein Überfallbauwerk, dessen Krone eine für eine gegebene Überfallhöhe H identische Geometrie wie die untere Strahlbegrenzung besass. Er wies nach, dass für eine Überfallhöhe gleich der Bemessungshöhe der Sohldruck praktisch atmosphärisch ist, d. h. längs der Krone sich keine Unterdrücke ergeben. Weiter wurden der Überfallbeiwert μ sowie die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im Kronenquerschnitt für variable Überfallhöhe ermittelt.

Die erste umfangreiche Studie über das im Wasserbau relevante vertikale scharfkantige und vollständig belüftete Wehr, das sogenannte Standardwehr führte Scimemi (1930) durch. Der Versuchskanal hatte eine Breite und eine Höhe von 0.50 m, und die Wehrhöhe betrug 0.35 m. Ingesamt wurden die Strahlbegrenzungen für neun Durchflüsse mit Überfallhöhen zwischen 35 und 132 mm ermittelt. Als erstes stellte Scimemi fest, dass die Einflüsse von Zuflussgeschwindigkeit und Überfallhöhe auf die Strahlbegrenzung klein sind. Dann wurden die obere, mittlere und untere Strahlkoordinate im Bereich $0 \leq x/H$ 6.5, $0 \leq z/H \leq 17$ angegeben. Wird das rechnerische Strahlprofil $(x/H)^2 = 1.8(z/H)$ nach Creager (1917) auf die Höhe 0.4 H über der Wehrkrone bezogen, so stimmt es ausgezeichnet

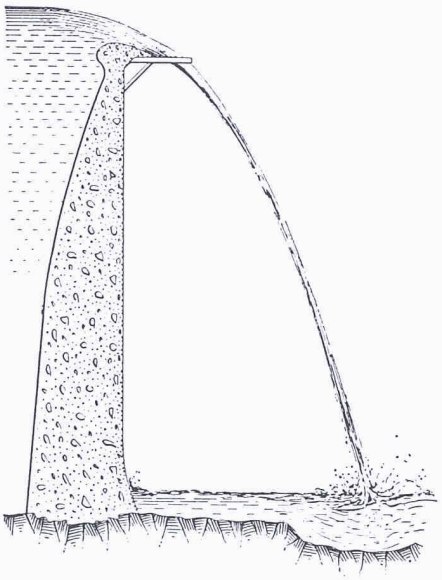


Bild 2.
Anordnung der Strahlaufreisser nach Stevens (1928)

mit den Messungen überein. Ohne den Beitrag von Boussinesq zum Strahlproblem zu kennen, versuchte Vitols (1936) die Strahlkoordinaten theoretisch zu ermitteln. Statt eines handfesten Resultats verstieg er sich jedoch in ein mathematisches Labyrinth (Fischer 1937).

Amerikanische Beiträge

Das Bureau of Reclamation in Denver (USBR) hat sicherlich das umfassendste Projekt zur Ermittlung der Überfallströmung durchgeführt. Anlass dazu bildete der ausserordentliche Hoover-Damm in Nevada/Arizona. Während mehr als 15 Jahren wurden rechteckige Überfälle aller Art getestet, so etwa die Einflüsse der Zuflussgeschwindigkeit, der Wehrneigung gegenüber der Vertikalen, von sogenannten Überhängern und die Anwendung auf typische Bauwerke, eben etwa auf den Hoover-Damm. Das Hauptinteresse des Projekts bestand in der Festlegung der unteren Strahlkoordinaten, daneben wurden ebenfalls Überfallbeiwerte, Druckverteilung auf die Wehrplatte usw. ermittelt. Alle Resultate sind nicht nur graphisch ausgewertet, sondern auch numerisch in Tabellen zusammengestellt. Es handelt sich deshalb bei diesen Zahlenwerten um das Standardwerk für Überfallstrahlen. Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich nur auf den Standardüberfall.

Der Einfluss der *Zuflussgeschwindigkeit* zeigt sich deutlich auf den Maximalwert der unteren Strahlbegrenzung. Bedeutet $V_o = Q/[b(h_o+w)]$ die Zuflussgeschwindigkeit im rechteckigen Zulaufkanal der Breite b, so ist deren Einfluss für $V_o^2/(2gH) < 0.01$ vernachlässigbar. Für eine grössere Geschwindigkeit liegt das Strahlmaximum unter dem Wert 0.110 H (-2%).

Der *Durchfluss* Q wird definiert durch

$$Q = C_d\, b\, (2gH^3)^{1/2} \qquad (1)$$

mit C_d als Durchflussbeiwert. Schliesst man kleine Überfallhöhen H aus, so verändert sich C_d nur mit der relativen Wehrhöhe w/H. Nach den Messwerten hat dieser Parameter keinen Einfluss auf C_d, falls $H/w < 1$ ist. Danach nämlich gilt $C_d = 0.413 \pm 0.005$.

Der Einfluss der *Wehrneigung* wurde an Überfällen mit 1:3, 2:3 und 3:3 getestet, d. h. bei Winkeln gegenüber der Vertikalen von 18.4°, 33.7° und 45°. Als Schlussresultat liegen Tabellen vor, die sowohl die untere als auch die obere Strahlbegrenzung für verschiedene Zuflussgeschwindigkeiten $V_o^2/(2gH) < 0.20$ und Wehrneigungen beinhalten. Die Aussagen bezüglich Zuflussgeschwindigkeit als auch Wehrhöhe lassen sich direkt auf den geneigten Überfall übertragen. Bild 3 zeigt die maximale Strahlerhöhung und den auf die Überfallhöhe H-e bezogenen Durchflussbeiwert.

Da die Daten von USBR (1948) tabellenhaft und nicht formelhaft mitgeteilt wurden, begann bereits 1954 durch Blaisdell der Versuch, einfache Bemessungsbeziehun-

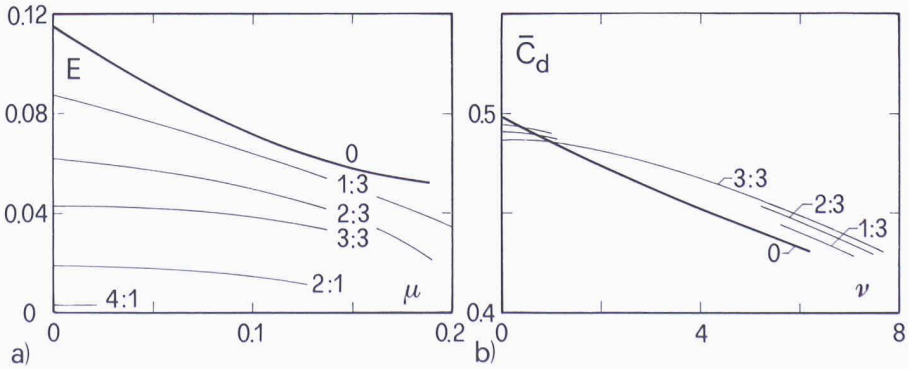


Bild 3.
Gemittelte Experimente a) Maximum der unteren Strahlbegrenzung E = e/H in Abhängigkeit der relativen Zuflussgeschwindigkeit $\mu = V_o^2/(2gH)$, b) Durchflussbeiwert $\bar{C}_d = Q/b[2g(H-e)^3]^{1/2}$ in Abhängigkeit von $\nu = (1-E)/(W+E)$ mit W = w/H

gen abzuleiten. Dabei ging er wie bereits seine Vorgänger vom Prinzip der konstanten Horizontalgeschwindigkeit aus, d.h. der parabolischen Strahl-Begrenzungskurven. Da sich im Nahbereich der Überfallkrone eine beträchtliche Druckumlagerung einstellt, gelten die so erhaltenen Resultate nur für den Fernbereich. Mit $\mu = V_o^2/(2gH)$ als Zuflussgeschwindigkeitswert und $X = x/H$, $Z = z/H$ erhielt Blaisdell (1954) für die untere (Index «u») und obere (Index «t») Strahlbegrenzung und $X > 0.50$

$$Z_u = 0.150 - 0.45\mu + [0.411 - 1.603\mu - \sigma]X - [0.425 - 0.25\mu]X^2 \quad (2)$$

$$Z_t = Z_u + 0.57 - \frac{1}{50}(10m)^2 \, exp(10m) \quad (3)$$

mit $\sigma = [1.568\mu^2 - 0.892\mu + 0.127]^{1/2}$ und $m = \mu - 0.208$. Für vernachlässigbare Zuflussgeschwindigkeit ($\mu < 0.01$) folgt daraus $\sigma = 0.356$ und $m = -0.208$, also

$$Z_u = 0.150 + 0.055X - 0.425X^2, \quad (4)$$

$$Z_t = Z_u + 0.559. \quad (5)$$

Die *Ähnlichkeit* der oberen und unteren Strahlbegrenzungen für alle experimentell ermittelten Anordnungen $V_o^2/(2gH) \leq 0.20$ wurde von Rajaratnam et al. (1968) für den vertikalen Überfall nachgewiesen. Für den aufsteigenden unteren Strahlabschnitt dienen dabei die Koordinaten f und e als Massstabslängen, welche sich näherungsweise angeben lassen zu

$$f/H_o = F = 0.25 - 0.40\mu \quad (6)$$

$$e/H_o = E = 0.112 - 0.40\mu. \quad (7)$$

Sind x_1, z_1 die vom Strahlmaximum an gerechneten Horizontal- und Vertikalkoordinaten, und $X_1 = x_1/f$ sowie $Z_1 = z_1/e$ die entsprechenden dimensionslosen Koordinaten, so folgt als aufsteigende *untere Strahlbegrenzung* (Bild 4)

$$Z_1 = 1 - (1 - X_1)^{3.2 - X_1}. \quad (8)$$

Dasselbe Prozedere lässt sich auf den fallenden Strahlbereich anwenden. Bezeichnet das Strahlmaximum wiederum den Koordinatensprung (Bild 4a), x_2 und z_2 die Koordinaten der *fallenden Strahlunterseite* und $X_2 = x_2/m$, $Z_2 = z_2/n$ die dimensionslosen Grössen mit

$$m/H_o = 1.45 - 2.5\mu, \quad (9)$$

$$n/H_o = 10e/H_o, \quad (10)$$

so gilt für $X_2 \leq 2.3$ die einfache Beziehung

$$Z_2 = X_2^{1.86}. \quad (11)$$

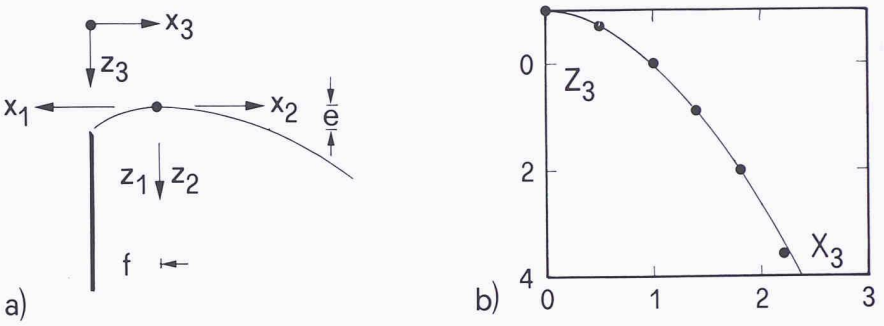


Bild 4.
a) Definition der Koordinatensysteme nach Rajaratnam, et al. (1968), b) Vergleich (•) gemittelte Beobachtung mit Gl.(14)

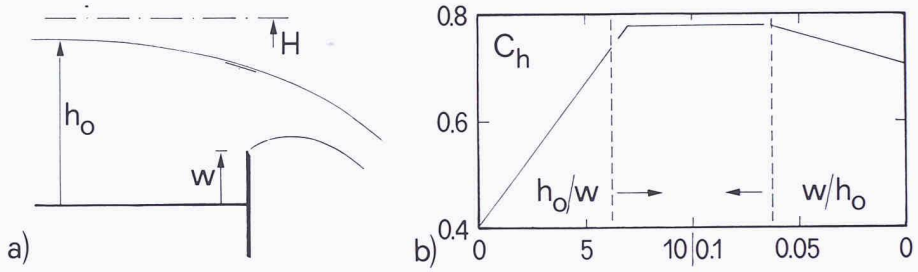


Bild 5.
Überfall und Schwelle bei strömendem Zufluss
a) Bezeichnungen, b) Durchflussbeiwert C_h in Abhängigkeit der Relativwehrhöhe nach Kandaswamy und Rouse (1957)

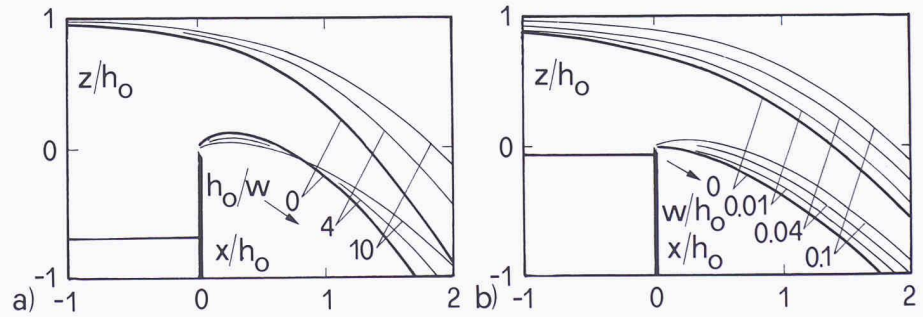


Bild 6.
Strahlbegrenzungen für a) Überfälle und b) Schwellen

Die *obere Strahlbegrenzung* wird durch die Koordinaten $X_3 = x_3/p$, $Z_3 = z_3/q$ bezüglich der Wehrkrone erfasst mit

$$p/H_o = 1.34 - 0.30\mu, \quad (12)$$

$$q/H_o = 0.85 - 0.83\mu, \quad (13)$$

$$Z_3 = 1 - X_3^{1.86}. \quad (14)$$

Damit lässt sich also die Methode von Blaisdell (1954) einfach auf den gesamten Überfallbereich für $\mu < 0.2$ ausdehnen.

Eine Ausdehnung der Resultate für relativ *kleine Wehrhöhen* und strömenden Zufluss im Rechteckkanal präsentierten Kandaswamy und Rouse (1957). Es liegen die Profile sowohl für Überfälle ($h_o/w < 6$) als auch für als Schwellen ($w/h_o < 0.06$) bezeichnete Bauwerke vor (Bild 5a). Der auf die modifizierte Überfallgleichung

$$Q = C_h \, b \, (2gh_0^3)^{1/2} \quad (15)$$

bezogene Beiwert C_h lässt sich für Überfälle nach Rehbock ausdrücken durch

$$C_h = 0.404 + 0.053(h_o/w) \quad (16)$$

und für Schwellen nach Rouse (1936)

$$C_h = 0.707\left(1 + \frac{w}{h_o}\right)^{3/2}. \quad (17)$$

Im Übergangsbereich der zwei Abflusstypen ist $C_h \cong 0.78$ nach Bild 5b).

Die verallgemeinerten Strahlbegrenzungen sowohl für Überfälle als auch für Schwellen gehen aus Bild 6 hervor. Die un-

tere Strahlbegrenzung besitzt demnach das höchste Strahlmaximum für $h_o/w = 0$. Mit zunehmender Überfallhöhe wird dieses kleiner, bis der Strahl für $w/h_o = 0$ tangential zum Boden steht. Dann spricht man von einem Endüberfall.

Hay und Markland (1958) ermittelten die Strahlbegrenzungen von scharfkantigen Überfällen mit Hilfe des sogenannten elektrolytischen Tanks. Diese auf der Analogie von Potentialströmungen aufbauende Methode gibt die hydraulische Lösung durch experimentelle Anordnung im elektrischen Feld. Die Berechnungsresultate stimmten gut mit den Experimenten von USBR (1948) überein, obwohl bei zunehmender Zuflussgeschwindigkeit eine systematische Abweichung auftritt. Diese wird den unten genauer erläuterten Einflüssen der Viskosität und der Oberflächenspannung zugeschrieben.

Die erste mathematische Lösung des Überfallproblems wurde numerisch von Strelkoff (1964) durchgeführt. Er bezog sich ebenfalls auf die Potentialströmung und löste diese als Randwertproblem. Die Übereinstimmung der Resultate mit den Experimenten von Kandaswamy und Rouse war hervorragend. Ein klassisches Problem der Hydraulik von Freispiegelströmungen wurde damit einer Lösung zugeführt.

Einfluss der Oberflächenspannung

Eine wohl einmalige Untersuchungsreihe über den Einfluss der Kapillarität auf Überfallstrahlen stammt vom Hydraulikinstitut der Universität von Padua (Italien). Vorerst unter der Leitung von Prof. Augusto Ghetti, wurde dieses Projekt später von Prof. Luigi D'Alpaos über einen Zeitraum von 30 Jahren durchgeführt. Nachfolgend sollen die wichtigsten Ergebnisse besprochen werden.

Der Einfluss der Oberflächenspannung wird durch die *Weberzahl*

$$\mathbf{W} = \frac{V}{(\sigma/\rho L)^{1/2}} \tag{18}$$

beschrieben, wobei V eine typische Geschwindigkeit, σ die Oberflächenspannung, ρ die Fluiddichte und L eine typische Länge darstellen. Ist die Oberflächenspannung vernachlässigbar, so ist $\sigma = 0$ und damit $\mathbf{W}^{-1} = 0$. Die Oberflächenspannung wird demnach wichtig für kleine Werte von **W**, d. h. für Wasser mit fixierten Parametern σ und ρ bei kleiner Geschwindigkeit und kleiner typischer Länge. Kapillareffekte sind demnach typische Massstabseffekte, sie verfälschen etwa das bei Überfällen dominierende *Ähnlichkeitsgesetz nach Froude.*

Ghetti (1966) betrachtete einen zweidimensionalen Wasserstrahl der Dicke h,

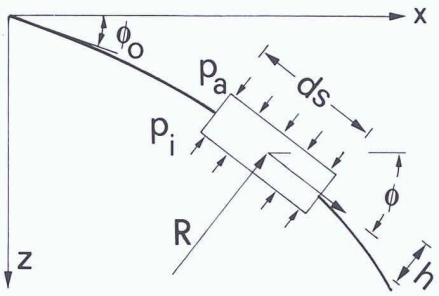


Bild 7.
Kräftegleichgewicht am ebenen Wasserstrahl

der Elementlänge ds auf einer Bahn im x,z-Koordinatensystem mit dem lokalen Winkel ϕ gegenüber der Horizontalen und dem lokalen Krümmungsradius R. Die Druckhöhen auf die innere (Index «i») und äussere (Index «a») Strahlseite sei p_i und p_a (Bild 7). Ist der Strahl genügend dünn, so kann man sich auf den auf die Strahlachse konzentrierten Strahl beziehen. Es handelt sich dann um ein eindimensionales Problem. Die Zentrifugalkraft $\rho(V^2/R)hds$ hat die Gewichtskomponente in Radialrichtung $\rho ghds\cos\phi$, plus die Kraft infolge der Druckdifferenz $(p_a - p_i)ds$, plus schliesslich die Oberflächenkraft $(2\sigma/R)ds$ zu kompensieren, also

$$\frac{V^2}{gR} - \frac{2\sigma}{\rho ghR} - \cos\phi - \frac{p_a - p_i}{h} = 0 \tag{19}$$

Mit $\cos\phi = (1+\tan^2\phi)^{-1/2} = (1+z'^2)^{-1/2}$ und $1/R = z''/(1+z'^2)^{3/2}$ lässt sich nun die folgende, unter den Randbedingungen $V(0) = V_o$ und $z(0) = z_o$ zu lösende Differentialgleichung aufstellen

$$\left(\frac{V_o^2}{2g} + z - \frac{2\sigma}{\rho gh}\right)\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} - \frac{1/2}{(1+z'^2)^{1/2}} + \frac{p_a - p_i}{2h} = 0. \tag{20}$$

Dabei ist die Geschwindigkeit V durch die Bernoulligleichung über die Anfangsgeschwindigkeit und die Referenzlage $z_o = 0$ ausgedrückt. Diese im Prinzip auf Boussinesq zurückgehende Differentialgleichung lässt sich nur numerisch lösen. Sie wird durch die Froudezahl $\mathbf{F}^2 = V_o^2/(gh)$, die Weberzahl **W** und die Eulerzahl $\mathbf{E} = V_o^2[g(p_a - p_i)]$ beeinflusst. Wird die Kapillarität vernachlässigt, so findet man die Strahlkonfiguration infolge eines Differenzdrucks, wie sie bei Strahloszillationen von Interesse ist (Schwartz und Nutt 1963). Vernachlässigt man hingegen den Einfluss von **E**, so wird ein Strahl im allseitig identischen Druck betrachtet, welcher der Gleichung folgt

$$\frac{hz''}{1+z'^2} = \left[\frac{V^2}{gh} - \frac{2\sigma}{\rho gh^2}\right]^{-1}. \tag{21}$$

Mit $q = Vh$ als Einheitsdurchfluss und den dimensionslosen Strahlkoordinaten $X = x/(V_o^2/2g)$, $Z = z/(V_o^2/2g)$ sowie $\omega = \mathbf{W}^{-2} = 2\sigma/(\rho h_o V_o^2)$ lautet die Lösung allgemein

$$\frac{X}{2\cos\phi_o(1-\omega)} = \left[[(1+Z)^{1/2} - \omega]^2 - \cos^2\phi_o(1-\omega)^2\right]^{1/2} - \sin\phi_o(1-\omega) + \omega^{1/2}\ln \frac{[(1+Z)^{1/2} - \omega] + ([(1+Z)^{1/2} - \omega]^2 - \cos^2\phi_o(1-\omega)^2)^{1/2}}{(1-\omega)(1+\sin\phi_o)} \tag{22}$$

Für $\omega \to 0$ ergibt sich daraus die Strahlform nach der Wurfparabel

$$Z = X\tan\phi_o + \frac{X^2}{4\cos^2\phi_o}. \tag{23}$$

Mit diesen vereinfachten Beziehungen lässt sich das Überfallproblem betrachten. Darin spielt natürlich die Zulaufenergiehöhe H_o die Rolle des Längenmassstabs. Nach den Messungen von Scimemi (1930) und eigenen Messungen von Ghetti (1966) liess sich der Einfluss der Kapillarität eindeutig bemerken. Je kleiner nämlich die Überfallhöhe H_o, desto mehr nähert sich der auf die Koordinaten $X = x/H_o$, $Z = z/H_o$ bezogene Strahl der Überfallwand. Dies wird durch G1.(22) eindeutig belegt.

D'Alpaos (1977) hat in seiner Dissertation eine umfassende Studie über Überfallstrahlen vorgelegt. Der Zulaufkanal war 300 mm breit, besass ein 400 mm hohes Wehr mit einer 2 mm exakt horizontalen, scharfen Kante. Der Strahl wurde durch zwei Seitenwände geführt, so dass ein praktisch ebener Abfluss resultierte. Die Strahlbelüftung wurde genauestens eingehalten. Als Fluide dienten Wasser und verschiedene Mischungen mit Alkohol sowie mit Glyzerin. Die Dichte aller Fluide war praktisch gleich, die Viskosität variierte aber um einen Faktor 2.5, und die Oberflächenspannung um rund 2. Ziel der Studie war die Ermittlung der Einflüsse der Weberzahl $\mathbf{W} = (V_o H_o \rho/2\sigma)^{1/2}$ und der Reynoldszahl $\mathbf{R} = V_o H_o/\nu$ mit $V_o = (2gH_o)^{1/2}$. Aus Vorversuchen mit gleicher Weberzahl, aber stark unterschiedlicher Reynoldszahl resultierte ein praktisch *vernachlässigbarer Einfluss der Viskosität* auf die Strahlform. Der Kapillareffekt verschwindet etwa für $\mathbf{W} > 10$, entsprechend etwa einer Überfallhöhe von 30 mm bei üblicher Wasserqualität. Der Einfluss der Oberflächenspannung auf den Überfallbeiwert wurde nicht abschliessend behandelt.

In einer weiteren Untersuchung diskutierten D'Alpaos und Ghetti (1984) die Einflüsse von Oberflächenspannung und Viskosität auf Überfallstrahlen. Bezüglich des Überfallbeiwerts C_d tritt eine Verringerung durch Verkleinerung der Oberflächenspannung σ ein. Der beispielsweise in der Formel von Rehbock erscheinende

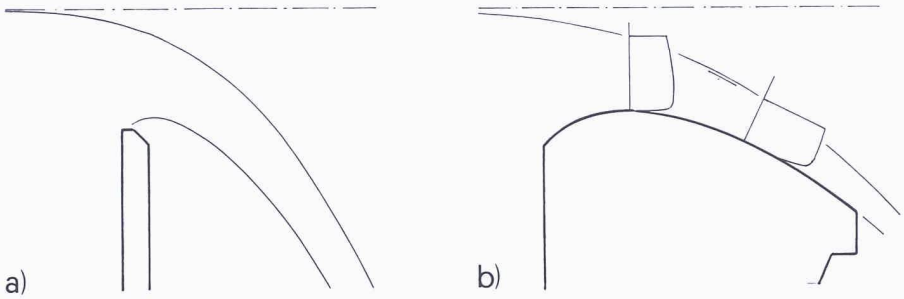


Bild 8.
Unterschied zwischen Überfallstrahl a) bei scharfer und b) ausgerundeter Krone

dimensionsbehaftete Zusatzterm wird fast vollständig dem Einfluss der Kapillarität zugeschrieben. Anhand des vorliegenden Datenmaterials lässt sich der auf die Formel von Rehbock (1929) bezogene Durchflussbeiwert folgendermassen angeben

$$C_d = 0.403 + 0.053\frac{H_o}{w} + \frac{0.28}{\mathbf{W}} \qquad (24)$$

mit $\mathbf{W} = H_o(\rho g/\sigma)^{1/2}$. Es werden aber noch Zusatzexperimente benötigt, um eine definitive Formel für C_d zu ermitteln. D'Alpaos (1986) hat schliesslich seine Messwerte mit denjenigen von Sarginson (1972) verglichen und die maximale Strahlhebung nur in Abhängigkeit der Weberzahl beschrieben zu

$$E = 0.112(1 - 12.3\,\mathbf{W}^{-2}). \qquad (25)$$

Kleine Weberzahlen haben demnach die Tendenz, die Steighöhe der unteren Strahlkategorie zu verkleinern. Dagegen bleibt die Lage F des Strahlmaximums von der Oberflächenspannung unbeeinflusst.

Abschliessend weist D'Alpaos auf den geführten Überstrahl hin, wie er etwa bei Bogenmauern auftritt. Anstelle der scharfen Überfallkante wird das Kronenstück eines Standardüberfalls nachgebildet. Dann entwickelt sich entlang dieses - wenn auch kurzen - Sohlenstücks eine Grenzschicht, womit die Einflüsse der Reynoldszahl auch zu berücksichtigen sind (Bild 8). Im Gegensatz zum Überfallstrahl an einer scharfkantigen Kronengeometrie wirken demnach beim Mauerüberfall simultan Einflüsse der Froude-, der Weber- und der Reynoldszahl.

Krümmungseffekte

Die Strahlgleichungen nach den bisherigen Untersuchungen haben sich auf den dünnen Strahl bezogen. Wird der Strahl jedoch relativ dick, wobei die Bezugslänge noch festzulegen ist, so darf der interne Strahldruck nicht mehr vernachlässigt werden. Die erste Arbeit mit Bezug auf Überfälle stammt von Tuck (1976). Unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung lässt sich bei Annahme einer Potentialströmung als Masslänge der Parameter $\varepsilon = (g/U^2)(Q/U)^{1/2} = gQ^{1/2}U^{-5/2}$ finden mit U als typische Geschwindigkeit und Q als Durchfluss. Dieser Parameter entspricht dem Quadrat der inversen Froudezahl, welcher bisher als sehr klein angenommen wurde, d. h. $\varepsilon \to 0$.

Das einfachste aller Strahlprobleme lautet: Wie verläuft die Oberfläche eines vertikal aufsteigenden oder fallenden Strahls? Dieses Problem wird durch die Potentialgleichung, gekoppelt mit der kinematischen Randbedingung und der Bedingung für den atmosphärischen Oberflächendruck beschrieben. Die den Bewegungsablauf beschreibende Differentialgleichung ist komplex, sie lässt sich für die Spezialfälle entweder eines bereits beschleunigten Strahls oder des gravitationsfreien Strahls lösen.

Dias und Tuck haben ihr Problem 1991 weiter bearbeitet. Sie betrachten eine inkompressible Flüssigkeit ohne Viskosität und führen ein Geschwindigkeitspotential ein. Das sich aus der Potentialgleichung ergebende Gleichungssystem wird numerisch gelöst, wobei die auf die Zuflusstiefe h+w bezogene Froudezahl $\mathbf{F}_+ = Q/[gb^2(h+w)^3]^{1/2}$ als Parameter dient. Für $\mathbf{F}_+ \to 0$ entsteht der konventionelle Überfall mit dünnem Strahl, während für $\mathbf{F}_+ \to 1$ entweder eine grosse Zuflussgeschwindigkeit oder eine kleine Überfallhöhe vorliegt. Der Bereich $\mathbf{F}_+ > 1$, in welchem ebenfalls begrenzt Lösungen gefunden wurden, lässt sich mit den Angaben von Kandaswamy und Rouse (1957) vergleichen.

Der *überkritische Abfluss* mit $\mathbf{F}_+ > 1$ kann sich auf zwei Arten einstellen, nämlich entweder als «Überfall», wie bereits von Kandaswamy und Rouse beschrieben (Bild 5a), oder als Abfluss mit einer oberwasserseitig stehenden Welle (Bild 9), die einer *Solitärwelle* ähnelt. Solche Abflüsse sind im Zusammenhang mit Schwellen in Tosbecken beobachtet worden, etwa beim «ausgeblasenen» Wassersprung.

Einen anderen Lösungsweg wählen Han und Chow (1981) durch die Hodographenmethode. Sie ist bei Ingenieuren nicht sehr verbreitet, da die physikalische Lösung nur einem indirekten Resultat entspricht. Die Methode scheint sich jedoch ausgezeichnet für gravitationsbeeinflusste Strömungen zu eignen. Sie besteht im Abbilden der physikalischen Ebene in die Hodographenebene und iterativem numerischen Lösen eines Gleichungssystems, bis die Randbedingungen erfüllt werden. Die Berechnungen stimmen mit Messungen von UBSR (1948) und Kandaswamy und Rouse (1957) gut überein. Bild 10 zeigt berechnete Überfallstrahlen für drei verschiedene Wehrneigungen.

Schlussfolgerungen

Die Geometrie von ebenen Überfallstrahlen infolge eines scharfkantigen Wehres ist heute bekannt, obwohl die Einflüsse von Massstabseffekten noch nicht abschliessend geklärt sind. Von speziellem Interesse ist die untere Strahlbegrenzung, die als Basis für den Standardüberfall dient. Anhand von

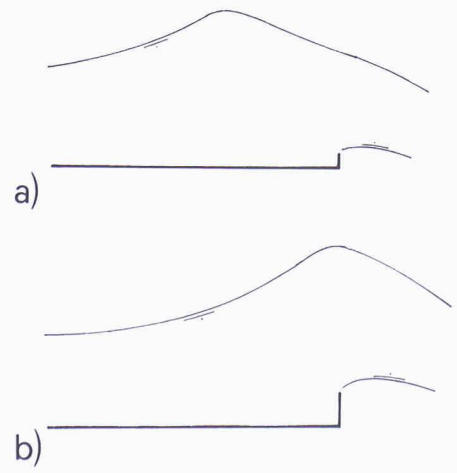


Bild 9.
Überkritischer Zufluss an Überfallbauwerk Typ stehende Welle mit F+ = a) 1.27, b) 1.46

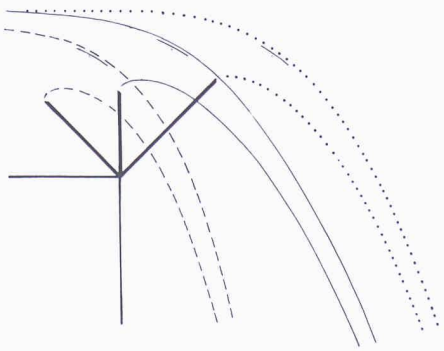
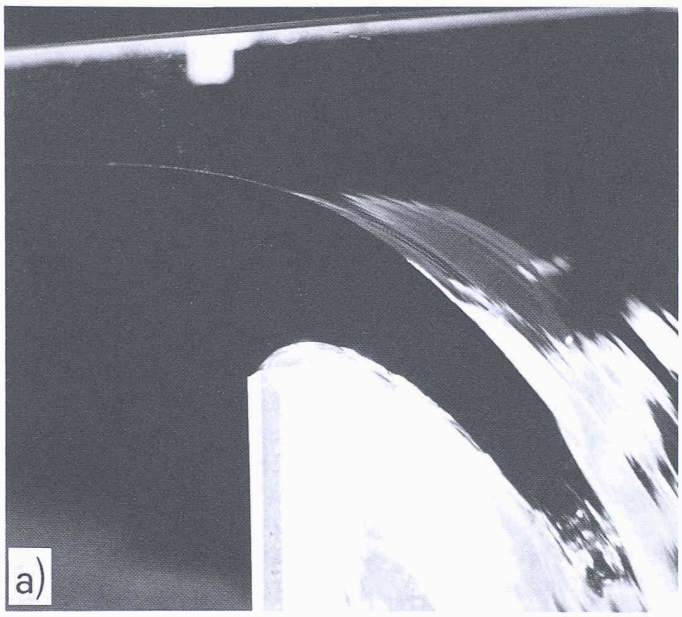


Bild 10.
Berechnete Überfallstrahlen nach Han und Chow (1981)



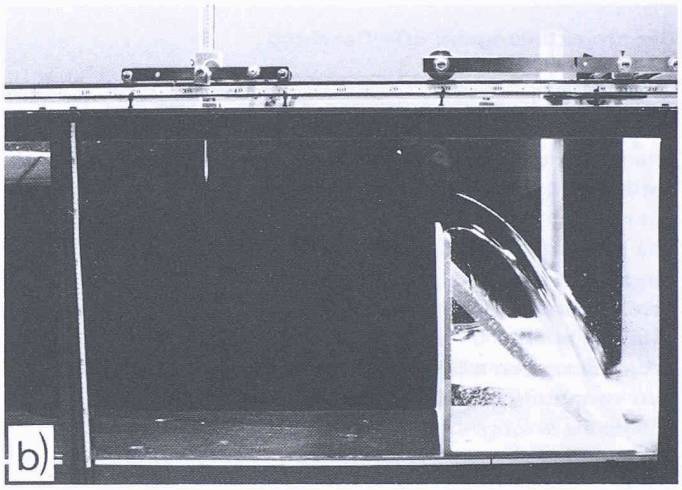


Bild 11.
Ansichten von Überfallstrahlen im Laborkanal
a) Kronenbereich, b) Durchfluss-Messanordnung

umfangreichen Datenanalysen sind die Einflüsse von Zuflussgeschwindigkeit und Überfallhöhe abgeklärt; sie lassen sich durch die verallgemeinerten Strahlprofile erfassen.

Von wissenschaftlichem Interesse dürfte die Berechnung der Strahlgeometrie sein (Bild 11). Obwohl die vorliegenden Resultate schon erstaunlich gut mit Messungen korrespondieren, sind Einflüsse der Viskosität und Kapillarität nicht enthalten. Von der technischen Relevanz wichtiger sind jedoch *räumliche Strahlen,* welche zudem noch eine Interaktion mit dem Umgebungsmedium Luft, oder Wasser bei Eintauchvorgängen in Wasserpolster hervorrufen. Hier liegt ein breites Forschungsfeld, das eine Vielzahl von experimentellen und numerischen Problemen umfasst.

Adresse des Verfassers:
PD Dr. *Willi H. Hager,* Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zentrum, 8092 Zürich

Literatur

Bazin, H. (1890): Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. Annales des Ponts et Chaussées 60 (1): 9-82.

Bazin, H. (1898): Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir [exécutées à Dijon de 1886 à 1895]. Dunod: Paris.

Blaisdell, F. W. (1954): Equation of the free-falling nappe. Journal Hydraulics Division ASCE 80 Paper 482: 1-16; 81 Paper 624: 15-19; 81 Paper 794: 1.

Creager, W.P., (1917): Masonry dams. McGraw-Hill: New York.

D'Alpaos, L. (1977): Sull'efflusso à stramazzo al di sopra di un bordo in parete sottile per piccoli valori del carico. Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti 145: 169-190.

D'Alpaos, L. (1986): Effetti scala nei moti efflusso fortemente accelerati. XX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Padova: 763-786.

D'Alpaos, L., Ghetti, A. (1984): Some new experiments on surface tension and viscosity effects on the trajectory of a falling jet. Symposium Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures Esslingen 2(5): 1-8.

De Marchi, G. (1928): Ricerche sperimentali sulle dighe tracimanti. Annali dei Lavori Pubblici 66(6): 581-620.

Deischa, A. (1923): Der Treffpunkt des Wasserstrahls eines Überfalls mit dem Boden. Schweizerische Bauzeitung 81: 171.

Dias, F., Tuck, E. O. (1991): Weir flows and waterfalls. Journal Fluid Mechanics 230: 525-539.

Fischer, A. (1937): Beitrag zur Ermittlung des vakuumlosen Dammprofils nach dem Verfahren von A. Vitols. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 32(24): 281-284.

Ghetti, A. (1966): Effects of surface tension on the shape of liquid jets. Surface Hydrodynamics: 424-475. NATO Advanced Hydraulics: Bressanone.

Han, T. Y., Chow, W. L. (1981): The study of sluice gate and sharp-crested weir through hodograph transformations. Journal Applied Mechanics 48(6): 229-238.

Hay, N., Markland, E. (1958): The determination of the discharge over weirs by the electrolytic tank. Proc. Institution Civil Engineers 10: 59-86; 11: 381-382.

Kandaswamy, P. K., Rouse, H. (1957): Characteristics of flow over terminal weirs and sills. Journal Hydraulics Division ASCE 83(HY4) Paper 1345: 1-13; 84(HY1) Paper 1558: 59-60; 84(HY5) Paper 1832: 51-54; 85(HY2): 85-86.

Rajaratnam, N., Subramanya, K., Muralidhar, D. (1968): Flow profiles over sharp-crested weirs. Journal Hydraulics Division ASCE 94(HY3): 843-847.

Rouse, H. (1936): Discharge characteristics of the free overfall. Civil Engineering 6(4): 257-260.

Sarginson, E.J. (1972): The influence of surface tension on weir flow. Journal of Hydraulic Research 10(4): 431-446; 11(3): 299-306.

Schwartz, H. I., Nutt, L. P. (1963): Projected nappes subject to transverse pressure. Journal Hydraulics Division ASCE 89(HY4): 97-104; 90(HY1): 379.

Scimemi, E. (1930): Sulla forma delle vene tracimanti. L'Energia Elettrica 7(4): 293-305.

Stevens, J. C. (1928): Novel crest design for thin overpour dams. Engineering News-Record 100(6): 227; 100(15): 602.

Strelkoff, T. S. (1964): Solution of highly curvilinear gravity flows. Journal Engineering Mechanics Division ASCE 90(EM3): 195-221; 90(EM5): 467-470; 91(EM1): 172-178; 92(EM3): 95-96.

Tuck, E. O. (1976): The shape of free jets of water under gravity. Journal Fluid Mechanics 76(4): 625-640.

U. S. Bureau of Reclamation (1948). Studies of crests for overfall dams. Boulder Canyon Projects - Final Reports. Part VI - Hydraulic Investigations. Bulletin 3. United States, Department of the Interior: Denver.

Vitols, A. (1936): Beitrag zur Frage des vacuumlosen Dammprofiles. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 31(16): 207-212; 32(6): 69-71.