

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizer Ingenieur und Architekt
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	103 (1985)
<b>Heft:</b>	7
<b>Artikel:</b>	Flächentragwerke aus Faserverbundwerkstoffen: das zweiachsige Kriech- und Relaxionsproblem
<b>Autor:</b>	Desserich, Georg / Rösl, Alfred / Meier, Urs
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-75720">https://doi.org/10.5169/seals-75720</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Flächentragwerke aus Faserverbundwerkstoffen

## Das zweiachsige Kriech- und Relaxationsproblem

Von Georg Desserich, Luzern, Alfred Rösl, Zürich, und Urs Meier, Dübendorf

(Fortsetzung von H. 44/84, S. 855)

Die Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Mehrschichtenverbunden aus den Eigenschaften der einzelnen Schichten gelingt bei Annahme linearelastischen Verhaltens nach der Kontinuumstheorie, indem aus der Elastizitätsmatrix durch Inversion die Nachgiebigkeitsmatrix des Verbundes bestimmt wird. Soll das zeitabhängige Verhalten berücksichtigt werden, so ist die Elastizitätsmatrix durch die Relaxationsmatrix und die Nachgiebigkeitsmatrix durch die Kriechmatrix zu ersetzen. Im Gegensatz zu den Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrizen gehen die Kriech- und Relaxationsmatrizen nicht durch einfache Inversion auseinander hervor. Ihr Zusammenhang ist nach der viskoelastischen Theorie durch Summengleichung gegeben, deren Auflösung im allgemeinen Fall nur durch rekursive Verfahren mit Hilfe eines Rechenprogrammes möglich ist.

Mit dieser Berechnungsmethode können, ausgehend von einem beliebigen Kriechverhalten der Einzelschichten, das Kriechverhalten eines damit aufgebauten Mehrschichtenverbundes und die zeitabhängigen Schichtspannungen infolge äußerer Belastung bestimmt werden. Eingehende experimentelle Untersuchungen bestätigen die Anwendbarkeit dieser Rechenmethode.

### Einleitung

Am Institut für Baustoffe, Werkstoffchemie und Korrosion (IBWK) der ETH Zürich wurde in den Jahren 1976/77 eine umfangreiche Zusammenstellung und Übersicht über den Stand der internationalen Forschung auf dem Gebiet des Langzeitverhaltens von Faserverbundwerkstoffen erstellt [1]. Im Anschluss daran wurde das mehrschichtige linearelastische Scheibenproblem untersucht und die numerische Berechnung in Form von Computerprogrammen entwickelt [2, 3]. Seit 1978 liefern eingehende Materialuntersuchungen, insbesondere ausführliche Kriechversuche, die erforderlichen Kennwerte und dienen zur Bestätigung der getroffenen Annahmen. Diese Arbeiten konnten im Rahmen eines von der ETH Zürich finanzierten Forschungsprojektes durchgeführt werden, und die Ciba-Geigy AG in Basel/Schweiz stellte die benötigten Materialproben zur Verfügung. Für verschiedene Versuche standen auch Prüfeinrichtungen der Eidgenössischen Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA), Dübendorf/Schweiz, im Einsatz.

Zusammen mit den erarbeiteten und verfügbaren Rechenprogrammen werden damit dem Ingenieur in der Praxis

moderne Mittel bereitgestellt, um tragende Bauteile aus faserverstärkten Mehrschichtenverbunden zu berechnen.

### Lineare Viskoelastizitätstheorie

Die Grundlage für die lineare Viskoelastizitätstheorie ist das Boltzmannsche Superpositionsprinzip [4]. Bei «nichtalternden» Stoffen gilt die Vereinfachung, dass der Belastungszeitpunkt keinen Einfluss auf das Stoffgesetz hat, d. h. es besteht Invarianz bezüglich der Zeittranslation.

Als einfaches Kriterium für den Übergang vom linearen zum nichtlinearen viskoelastischen Verhalten eines Materials dienen die isochronen Spannungs-Dehnungs-Diagramme (Bild 1). Die lineare Theorie verliert ihre Gültigkeit, wenn die isochronen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für ein gegebenes Material nicht mehr durch Geraden angenähert werden können.

Zur Charakterisierung des Kriechverhaltens bei konstanter Temperatur dient die Kriechnachgiebigkeit  $\Phi(t)$  als Quotient aus Verzerrungsverlauf  $\varepsilon(t)$  und konstanter Spannung  $\sigma_0$ :

$$(1) \quad \Phi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

Im linear viskoelastischen Bereich ist die Kriechnachgiebigkeit  $\Phi(t)$  (1) abhängig von der Zeit und nicht von der Spannung  $\sigma_0$ .

Die Verknüpfung zwischen dem Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  bei konstanter Temperatur und der konstanten Verzerrung  $\varepsilon_0$  erfolgt über die Relaxationssteifigkeit  $\psi(t)$ :

$$(2) \quad \psi(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

Im linear viskoelastischen Bereich ist die Relaxationssteifigkeit  $\psi(t)$  (2) abhängig von der Zeit, jedoch nicht von der Dehnung  $\varepsilon_0$ .

### Methoden zur Beschreibung linear viskoelastischer Vorgänge

Ein beliebiger, zeitlich sich ändernder Spannungsverlauf (Bild 2) kann durch «Stufen» angenähert werden. Für das entsprechende zeitabhängige Dehnungsverhalten kann somit verallgemeinert geschrieben werden:

$$(3) \quad \varepsilon(t_j) \approx \sum_{i=0}^j \Phi(t_j - \tau_i) \Delta \sigma_i$$

oder durch die Integralgleichung

$$(4) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau$$

Umgekehrt kann mit Hilfe der Relaxationssteifigkeit (2) das zu einem beliebigen Dehnungsverlauf gehörende zeitabhängige Spannungsverhalten (Bild 2) bestimmt werden:

$$(5) \quad \sigma(t_j) \approx \sum_{i=0}^j \psi(t_j - \tau_i) \Delta \varepsilon_i$$

oder als Integralgleichung

$$(6) \quad \sigma(t) = \int_0^t \psi(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

Verschiedene Methoden zur Lösung dieser Integralgleichungen werden aufgezeigt.

### Rheologische Modellsysteme

Die rheologischen Modellsysteme bestehen alle aus einer Kombination der Elemente Feder zur Kennzeichnung des linearelastischen bzw. Dämpfungskolbens zur Kennzeichnung des viskosen Verhaltens. Durch zweckmässige Anordnung und Kombination dieser Elemente können die tatsächlichen

Verhältnisse angenähert werden. Diese Modellsysteme beschränken sich auf die Beschreibung einachsiger Vorgänge, die Modellparameter werden dabei über den ganzen Beanspruchungsbereich als konstant angenommen.

Die Bedeutung der rheologischen Modelle liegt vor allem darin, dass an sich komplizierte Mechanismen recht anschaulich dargestellt werden können und somit das Verständnis viskoelastischen Verhaltens erleichtert wird. Insbesondere ermöglichen sie mit ihrer Transparenz qualitative Aussagen zur Wirkungsweise zeitabhängiger Mechanismen.

### Angleichung von Kriechkurven durch spezielle Funktionen

Kriechfunktionen können durch Potenzansätze wie z. B.:

$$(7) \Phi(t) = K_1 \cdot (1 + K_2 \cdot t^{K_3})$$

oder

$$(8) \Phi(t) = K_1 (1 + K_2 \cdot t)^{K_3}$$

angenähert werden. Entsprechend dem Burger Modell gilt für die Kriechnachgiebigkeit folgende exponentielle Funktion:

$$(9) \Phi(t) = K_1 + K_2 \cdot t + K_3 (1 - e^{-K_4 \cdot t}).$$

### Spline-Interpolation oder Spline-Approximation

Das Deformationsverhalten kann durch Messreihen, bestehend aus einzelnen Messpunkten, beschrieben werden. Vor der Weiterverarbeitung müssen diese

Messreihen durch eine explizite Funktion ersetzt werden. Dies ist möglich durch eine «Spline-Interpolations-Funktion»  $f(x)$ , die durch sämtliche Messpunkte geht. Um die gesuchte Interpolations-Funktion anschaulich festzulegen, denken wir uns durch die gegebenen Stützpunkte (Messpunkte) eine dünne, homogene Latte (Spline) gelegt. Dabei soll angenommen werden, dass die Latte in den Stützpunkten frei drehbar gelagert sei und keinen äusseren Kräften unterliege. Die resultierende Biegelinie  $\tilde{f}(x)$  sei die Lösung der Interpolationsaufgabe.

Um die ursprünglich geradlinige prismatische Latte (Spline) in die Endlage zu verbiegen, muss die Formänderungsenergie:

(10)

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} \frac{M^2(x)}{EJ} dx = \frac{EJ}{2} \int_{x_0}^{x_n} (\tilde{f}''(x))^2 dx$$

aufgewendet werden. Für eine dünne Latte kann näherungsweise Gleichung (10) wie folgt geschrieben werden:

$$(11) U \approx \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} (\tilde{f}''(x))^2 dx = \text{Minimum}$$

Die Endlage der Latte (Spline) ist dadurch gekennzeichnet, dass die aufzuwendende Formänderungsenergie  $U$  minimal wird, d. h.  $\tilde{f}(x)$  minimiert das Integral in Gleichung (11). Die gesuchte Interpolierende  $\tilde{f}(x)$  ist somit als Lösung einer Variationsaufgabe mit Nebenbedingungen charakterisiert. Da die

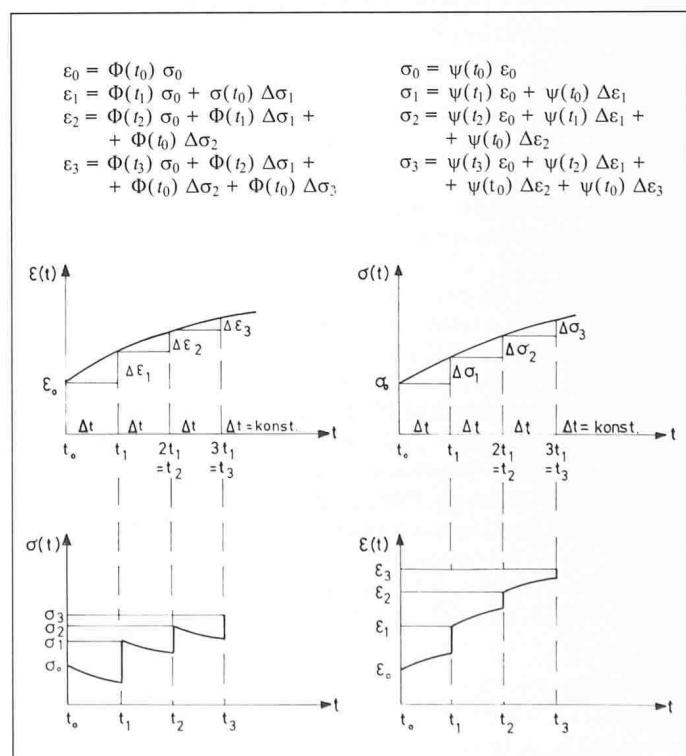
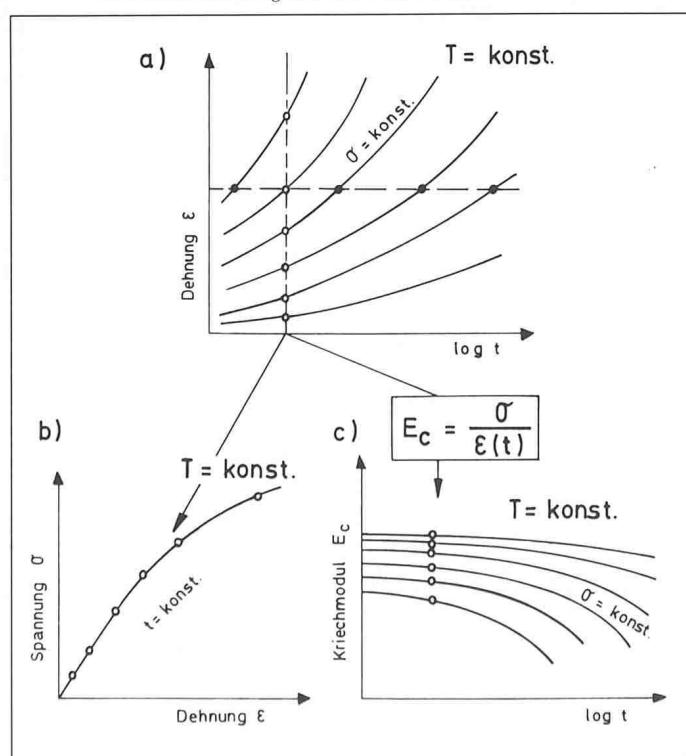
Messungen mit Unregelmässigkeiten behaftet sind, wird eine vernünftige Interpolation oft unmöglich. In diesem Fall sollte man die Ersatzfunktion  $f(x)$  möglichst glatt im Bereich der Stützpunkte verlaufen lassen. Dazu kann eine «Spline-Approximations-Funktion» bestimmt werden. Durch zusätzliche Angabe einer Standardabweichung  $d_f$  und eines Glättungskoeffizienten  $s$  kann die Spline-Approximation bestimmt werden. In [2] konnte gezeigt werden, dass die Spline-Interpolation bzw. -Approximation das wirkliche Kriechverhalten recht gut beschreibt. Extrapolationen auf Zeiten, die über die Versuchsergebnisse hinausgehen, sind indessen im Unterschied zu den Ansätzen (7, 8, 9) mit diesem Verfahren nicht möglich.

### Laplace-Transformation und die elastisch-viskoelastische Analogie

Mittels der Laplace-Transformation können die Integralgleichungen (4, 6) in algebraische Gleichungen übergeführt werden. Die ursprünglich differentiellen Zusammenhänge der viskoelastischen Modelle entsprechen im transformierten Bereich einem linearen Gleichungssystem, aus dem zusammen mit den transformierten Grundbeziehungen (4, 6) die Kriech- und Relaxationsfunktionen ermittelt werden können. Mit dem Korrespondenzprinzip z. B. in [5] kann zur Lösung des einachsigen linear viskoelastischen Problems das linear elastische Problem un-

Bild 1. a) Zeit-Dehnlinien-Diagramm  
b) Isochrones Spannungs-Dehnungs-Diagramm.  
c) Kriechmodullinien:  $E_c(t) = \sigma_0 / \varepsilon(t)$ . Bild b) und c) können aus dem Zeit-Dehnlinien-Diagramm ermittelt werden

Bild 2. Links: Bestimmung des Dehnungsverlaufs aus  $\Phi(t)$  und  $\sigma(t)$   
Rechts: Bestimmung des Spannungsverlaufs aus  $\psi(t)$  und  $\varepsilon(t)$



ter Berücksichtigung des transformierten E-Moduls (Ersatzmodul) verwendet werden.

### Schrittweise Berechnung des Langzeitverhaltens mittels Rekursionsformeln

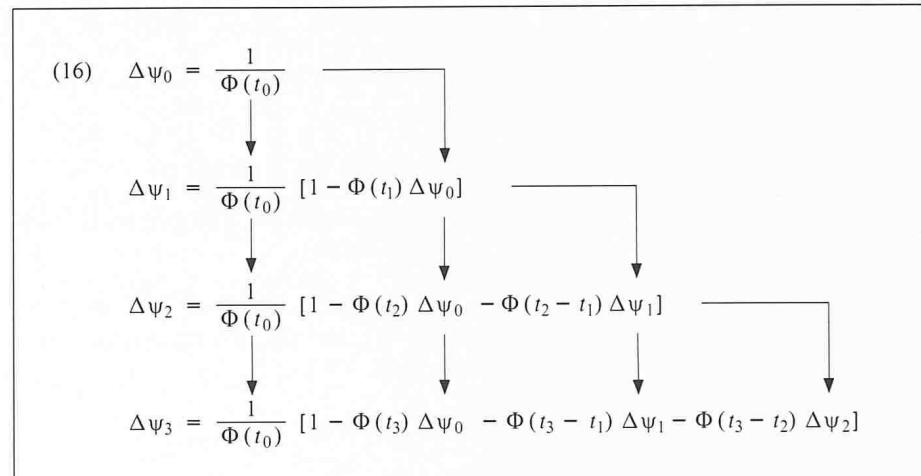
Mit den Summen- und Integralgleichungen (3, 4, 5, 6) wird es möglich, einerseits bei Kenntnis der Kriechnachgiebigkeit und der Spannungsgeschichte den Dehnungsverlauf zu bestimmen, andererseits bei Kenntnis der Relaxationssteifigkeit und der Dehnungsgeschichte den Spannungsverlauf zu ermitteln (Bild 2).

Für das einachsige Problem kann nach J. Wiedemann [6] der Relaxationsverlauf (Bild 2) für eine beliebige Zeiteinteilung aus dem Kriechverlauf mit folgenden Formeln bestimmt werden:

$$(12) \psi_j = \frac{1}{\Phi(t_0)} + \sum_{i=1}^j \Delta\psi_i$$

$$(13) \Delta\psi_j = \frac{1}{\Phi(t_0)} \left[ 1 - \sum_{i=0}^{j-1} \Phi(t_j - t_i) \Delta\psi_i \right]$$

Durch Vertauschung kann der Kriech-



Gleichung (16). Algorithmus zur Bestimmung des Relaxations- bzw. Kriechverlaufs

verlauf aus dem Relaxationsverlauf bestimmt werden:

$$(14) \Phi_j = \frac{1}{\psi(t_0)} + \sum_{i=1}^j \Delta\Phi_i$$

$$(15) \Delta\Phi_j = \frac{1}{\psi(t_0)} \left[ 1 - \sum_{i=0}^{j-1} \psi(t_j - t_i) \Delta\Phi_i \right]$$

Bei den Gleichungen (13, 15) handelt es

sich um sogenannte Rekursionsformeln, wobei jeweils ein Wert  $x_j$  aus den vorhergehenden Werten  $x_0$  bis  $x_{(j-1)}$  mit Hilfe einer festen Formel gefunden wird. Aus Gleichung (13) ergibt sich Gleichung (16) für drei Zeitschritte, vgl. nebenstehenden Kasten.

Die algorithmische Struktur von Gleichung (16) macht den Einsatz von Rechenautomaten interessant. Mit diesen

Bild 3. Eingabeschema zum Programm \*Rekursion\**S\**

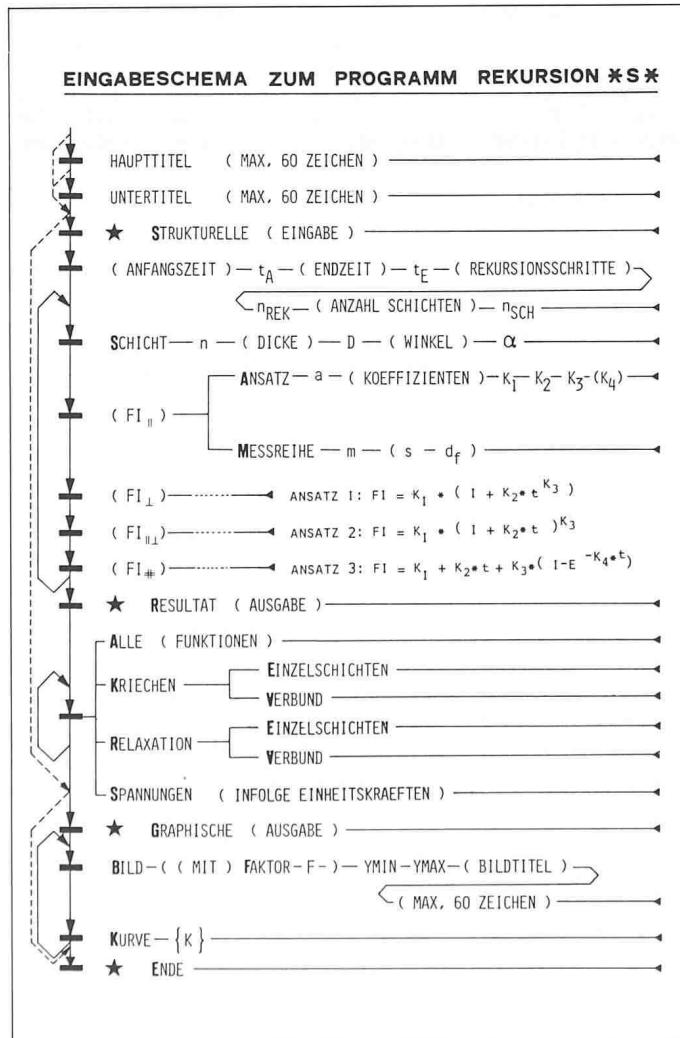


Bild 4. Abmessungen, Faserorientierung und Schichtung der MSV-Probekörper

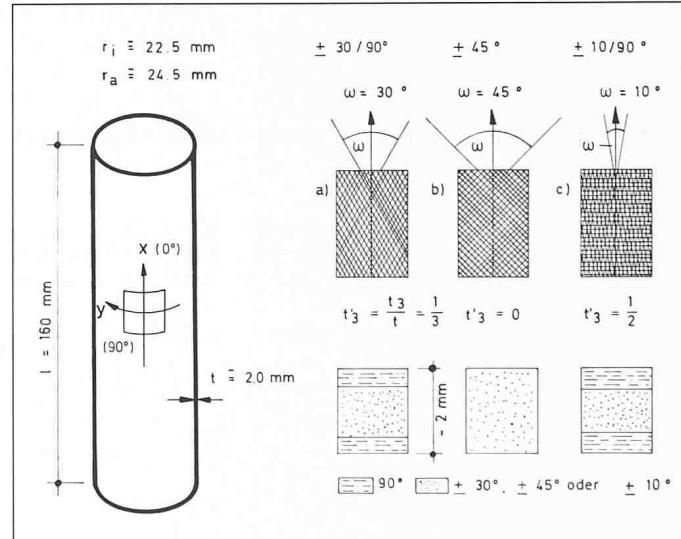
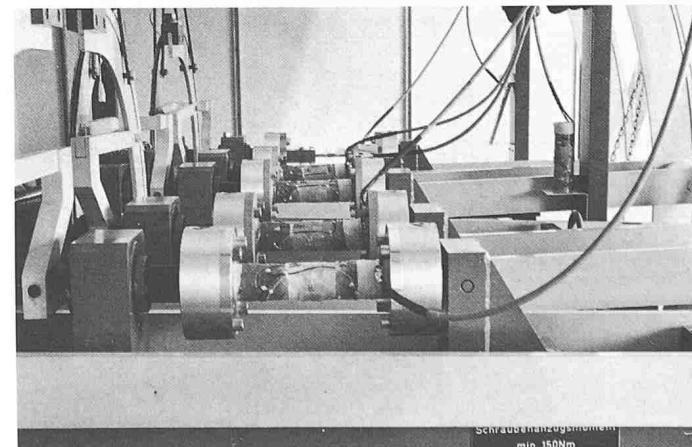


Bild 5. Zug-Druck-Torsions-Zeitstandanlage mit fünf Prüfständen



Rekursionsformeln (13, 15) kann der Relaxations- bzw. Kriechverlauf bedeutend schneller als mit den Summen- bzw. Integralgleichungen (3, 4, 5, 6) bestimmt werden.

Die Anwendung der Beziehungen (12, 13, 14, 15) gilt für einachsige Beanspruchung, d. h. unbehinderte Dehnung in Querrichtung.

Bei einem mehrschichtigen Faserverbundwerkstoff ist die Voraussetzung der unbehinderten Querkontraktion nicht mehr gegeben; aufgrund der Verträglichkeitsbedingungen wird auch die Querrichtung beansprucht, indem sich die Schichten gegenseitig behindern. Um die bekannten viskoelastischen Eigenschaften eines Mehrschichtenverbundes zu berücksichtigen, muss demzufolge die Zweiachsigkeit berücksichtigt werden.

## Das zweiachsige Kriech- und Relaxationsproblem

Soll das *zeitabhängige Verhalten* berücksichtigt werden, so ist die Elastizitätsmatrix durch die zeitabhängige Relaxationsmatrix (17) und die Nachgiebigkeitsmatrix durch die zeitabhängige Kriechmatrix (18) zu ersetzen.

Für das zweiachsige Scheibenproblem (Membranspannungszustand) gilt für die Relaxationsmatrix  $\psi(t)$  (17) bei Orthotropie

$$(17) \underline{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & 0 \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33}(t) \end{bmatrix}$$

wobei gilt:  $\psi_{21}(t) = \psi_{12}(t)$ .

und für die Kriechmatrix  $\underline{\Phi}(t)$  (18) bei Orthotropie:

$$(18) \underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & 0 \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33}(t) \end{bmatrix}$$

wobei gilt:  $\Phi_{21}(t) = \Phi_{12}(t)$ .

Im Gegensatz zu den Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrizen gehen die Kriech- und Relaxationsmatrizen nicht durch einfache Inversion auseinander hervor. Ihr Zusammenhang ist nach der viskoelastischen Theorie durch Integral- oder Summengleichungen gegeben, deren Auflösung z. B. über rekursive Verfahren (12, 13, 14, 15, 16) möglich ist. Für das zweiachsige Problem sind die sogenannten gekoppelten Rekursionsformeln z. B. in [7] ausführlich hergeleitet. Infolge Orthotropie ist die antimetrische Schubbelastung von den beiden symmetrischen Normalbelastungen entkoppelt. Für die Schubbelastung genügt demzufolge eine einfache Umkehrung, während die beiden symmetrischen Normalbelastungen hinsichtlich ihrer Auswirkungen gekoppelt sind.

## Computerprogramm \*Rekursion\*S\*

Das Programm \*Rekursion\*S\* dient zur Berechnung von zweiachsigen Kriech- und Relaxationsproblemen bei mehrschichtigen orthotropen Scheibentragwerken aus Faserverbundwerkstoffen.

Aus den Kriechmatrizen der Einzelschichten wird die Relaxations- und Kriechmatrix der mehrschichtigen orthotropen dünnwandigen Scheibe bestimmt. Die Kriecheigenschaften der Einzelschichten eines aus bis zu sechs Schichten bestehenden Mehrschichtenverbundes können mittels analytischer Funktionen (7, 8, 9) oder direkt mittels experimentell bestimmter Messreihen berücksichtigt werden. Eingegebene Messreihen werden anschliessend für die Weiterrechnung entweder durch eine Spline-Interpolation oder Spline-Approximation ersetzt. Die zeitabhängigen Spannungen für die Einzelschichten im globalen wie auch im lokalen Koordinatensystem infolge äusserer Einheitskräfte werden ermittelt. Zusammenfassend sieht der Berechnungsverlauf folgendermassen aus:

1. Experimentelle Ermittlung der Grundgrössen (Kriechfunktionen) der UD-Einzelschichten.
2. Bestimmung der Relaxationssteifigkeiten der UD-Schichten im lokalen Koordinatensystem mittels der Rekursionsformeln.

Bild 6a. Experimentell bestimmte Werte  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{33}$  des MSV  $\pm 30/90^\circ$  im Vergleich mit den mit Hilfe des Programms \*Rekursion\*S\* theoretisch ermittelten Werten

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{11} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	.3117	.3120	-.10
0.1	.3153	.3147	+.19
1.0	.3181	.3172	+.28
10.0	.3219	.3212	+.22
100.0	.3269	.3273	-.12
500.0	.3319	.3333	-.42
1'000.0	.3352	.3365	-.39

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{12} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	-.0919	-.0923	-.43
0.1	-.0940	-.0939	+.11
1.0	-.0953	-.0954	-.10
10.0	-.0974	-.0976	-.20
100.0	-.0997	-.1009	-.19
500.0	-.1021	-.1039	-.73
1'000.0	-.1043	-.1055	-.14

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{33} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	.8111	.8038	+.91
0.1	.8213	.8118	+.17
1.0	.8294	.8195	+.21
10.0	.8393	.8313	+.96
100.0	.8519	.8492	+.32
500.0	.8647	.8666	-.22
1'000.0	.8735	.8758	-.26

Bild 6b. Experimentell bestimmte Werte  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{33}$  des MSV  $\pm 45^\circ$  im Vergleich mit den mit Hilfe des Programms \*Rekursion\*S\* theoretisch ermittelten Werten

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{11} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	.3946	.3986	-.10
0.1	.4101	.4122	-.51
1.0	.4222	.4198	+.57
10.0	.4369	.4318	+.18
100.0	.4579	.4507	+.60
500.0	.4784	.4698	+.83
1'000.0	.4893	.4802	+.90

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{12} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	-.1735	-.1764	-.64
0.1	-.1828	-.1878	-.66
1.0	-.1919	-.1943	-.24
10.0	-.2039	-.2044	-.24
100.0	-.2218	-.2202	+.73
500.0	-.2400	-.2361	+.65
1'000.0	-.2514	-.2449	+.66

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{33} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	.6191	.6167	+.39
0.1	.6206	.6206	0.0
1.0	.6224	.6222	+.03
10.0	.6256	.6249	+.11
100.0	.6282	.6290	-.13
500.0	.6319	.6331	-.19
1'000.0	.6342	.6354	-.19

Bild 6c. Experimentell bestimmte Werte  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{33}$  des MSV  $\pm 10/90^\circ$  im Vergleich mit den mit Hilfe des Programms \*Rekursion\*S\* theoretisch ermittelten Werten

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{11} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	.2723	.2731	-.31
0.1	.2738	.2754	-.59
1.0	.2750	.2766	-.57
10.0	.2770	.2784	-.52
100.0	.2797	.2814	-.60
500.0	.2822	.2843	-.73
1'000.0	.2836	.2860	-.83

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{12} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	-.0463	-.0484	-.43
0.1	-.0459	-.0484	-.57
1.0	-.0458	-.0484	-.57
10.0	-.0457	-.0484	-.58
100.0	-.0456	-.0482	-.59
500.0	-.0455	-.0479	-.50
1'000.0	-.0453	-.0478	-.59

Zeitpunkt [h]	$\Phi_{33} [10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}]$		
	Experiment	Berechnung	$\Delta [\%]$
0	1.0804	1.0832	-.26
0.1	1.1207	1.1251	-.39
1.0	1.1497	1.1485	+.10
10.0	1.1884	1.1850	+.29
100.0	1.2393	1.2417	-.19
500.0	1.2928	1.2985	-.44
1'000.0	1.3231	1.3292	-.46

3. Transformation der Relaxationsfunktionen der Einzelschichten in das globale Koordinatensystem.
4. Bildung der Relaxationsmatrix der Einzelschichten für das Scheibenproblem im globalen Koordinatensystem.
5. Bildung der Relaxationsmatrix des Verbundes im globalen Koordinatensystem durch Superposition der Einzelschichten.
6. Bestimmung der Kriechfunktionen des Verbundes im globalen Koordinatensystem aus den Relaxationsfunktionen mittels der Rekursionsformeln.
7. Berechnung der Spannungen in den einzelnen Schichten infolge Einheitskräften im globalen Koordinatensystem.
8. Berechnung der Spannungen in den einzelnen Schichten infolge Einheitskräften im lokalen Koordinatensystem.

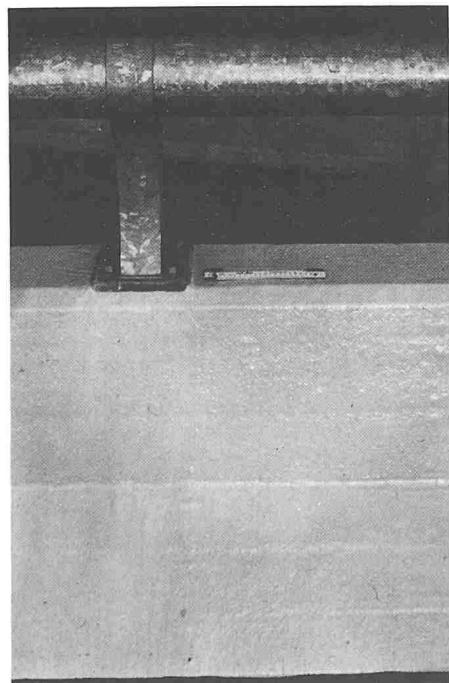
Die Programmeingabe ist problemorientiert und formatfrei. Sie wird mit Hilfe eines Eingabeschemas (Bild 3) beschrieben.

## Anwendungsbeispiele

### Beispiel I

Bestimmung der Kriechfunktionen an glasfaserverstärkten Mehrschichtenverbunden zur experimentellen Überprüfung der gekoppelten Rekursionsformeln.

Bild 7. Brückenbrüstung mit glasfaserverstärkter Polyesterbeschichtung (Viadukt Kerzers, Kanton Freiburg)



### 1. UD-Probekörper

Die *UD-Rohrproben* (unidirektional in Umfangsrichtung verstärkte Rohre) wurden auf einem Wickeldorn aus Leichtmetall mit einem Durchmesser von 45 mm und einer Länge von 1000 mm hergestellt. Angefertigt wurden Rohre von 1000 mm Länge, wobei alle 160 mm ein konischer Bund aufgewickelt wurde. Nach der Fertigstellung wurden die Rohre geschnitten und die Auflagerränder der 160 mm langen Zylinder planparallel geschliffen. Die aufgewickelten Bunde haben die Aufgabe, Brüche im Krafteinleitungsbereich zu vermeiden. Verwendet wurde das «Heisshärtende Laminierharzsystem LY 556 /HY 917 /DY 070» der Ciba-Geigy AG, Basel, sowie die E-Glasfaser «859 Cosmostrand 890 tex» von Owens/Corning Fiberglass Europe S.A. Die *UD-Flachproben* (unidirektional in Längsrichtung verstärkte Flachproben) mit einer Länge von 90 mm und einer Breite von 25 mm wurden aus einem nur in Längsrichtung verstärkten Werkstück herausgeschnitten. Der Glasvolumenanteil  $\Phi_f$  der UD-Probekörper betrug 0,68.

### 2. MSV-Probekörper

Folgende drei verschiedenen Mehrschichtenverbunde wurden untersucht:  
 $\pm 45^\circ$ : ausgeglühter Wickelverbund (Bild 4b)

$\pm 10/90^\circ$ : als Ersatz für den mit herkömmlichen Wickelverfahren aufwendig herstellbaren Kreuzverbund  $0/90^\circ$  (Bild 4c)

$\pm 30/90^\circ$ : sogenannter quasi isotroper Schichtaufbau (Bild 4a)

Der Anteil der in Umfangsrichtung verstärkten Schichten am Gesamtlaminat wird durch  $t_3/t = t'_3$  angegeben. Hierin ist  $t_3$  die Summe der Dicken aller Schichten, deren Fasern in Umfangs-

richtung verlaufen,  $t$  ist die Wanddicke des Probekörpers.

### 3. Prüfmaschine

Zur Bestimmung der Kriecheigenschaften bei Zug/Druck- und Schubbeanspruchung standen zwei Zeitstandanlagen mit total sieben Prüfständen zur Verfügung. Die auftretenden Dehnungen wurden mittels DMS-Rosetten gemessen (Bild 5).

### 4. Vergleich der experimentell ermittelten Kriechfunktionen mit den berechneten Werten

Mit dem Computerprogramm \*Rekursion\*S\* erfolgte für die drei beschriebenen Mehrschichtenverbunde (Bild 4) die Bestimmung der Kriechfunktionen rechnerisch. Folgende Inputdaten wurden dabei verwendet:

Anfangszeit:  $t_A = 0,001 \text{ h}$

Endzeit:  $t_E = 1000 \text{ h}$

Anzahl Rekursionsschritte:  $n_{\text{Rek}} = 50$

Anzahl Schichten:  $\pm 30/90^\circ, \pm 10/90^\circ; 3 \pm 45^\circ; 2$

Kriechfunktionen der UD-Schicht:

$$\Phi_{\parallel}(t) = 0,187 \cdot 10^{-4} (1 + 0,007 \cdot t^{0,1})$$

$$\Phi_{\perp}(t) = 0,466 \cdot 10^{-4} (1 + 0,0227 \cdot t^{0,2415})$$

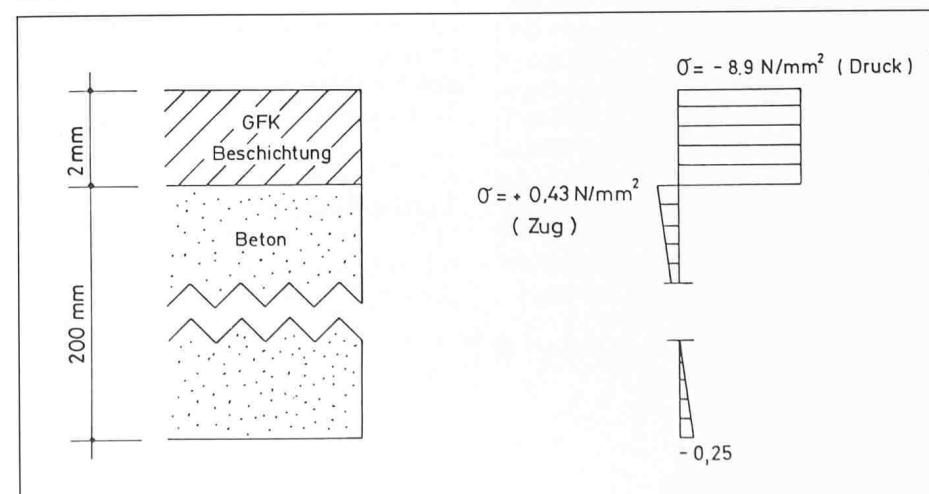
$$\Phi_{\perp\parallel}(t) = \Phi_{\parallel\perp}(t) = 0,053 \cdot 10^{-4} = \text{konstant}$$

$$\Phi_{\#}(t) = 1,15 \cdot 10^{-4} (1 + 0,068 \cdot t^{0,195})$$

In den Bildern 6a bis 6c sind die experimentell bestimmten Mittelwerte  $\Phi_{11}(t)$ ,  $\Phi_{12}(t)$  und  $\Phi_{33}(t)$  den mit Hilfe des Programms \*Rekursion\*S\* theoretisch ermittelten Werten gegenübergestellt.

Die prozentualen Abweichungen der Versuchsergebnisse von den berechneten Werten liegen im allgemeinen zwischen 0% und 3%. Nur beim  $\pm 10/90^\circ$  Mehrschichtenverbund sind die Abweichungen bezüglich der Kriechfunktion  $\Phi_{12}(t)$  etwas grösser, d. h. im Bereich

Bild 8. Spannungsverteilung infolge  $\Delta T = +25^\circ \text{C}$  in der GFK-Beschichtung und im Beton für eine Schichtstärke des Polyesters von 2 mm und einer Betonstärke von 200 mm mit vorgegebenen Materialkennwerten



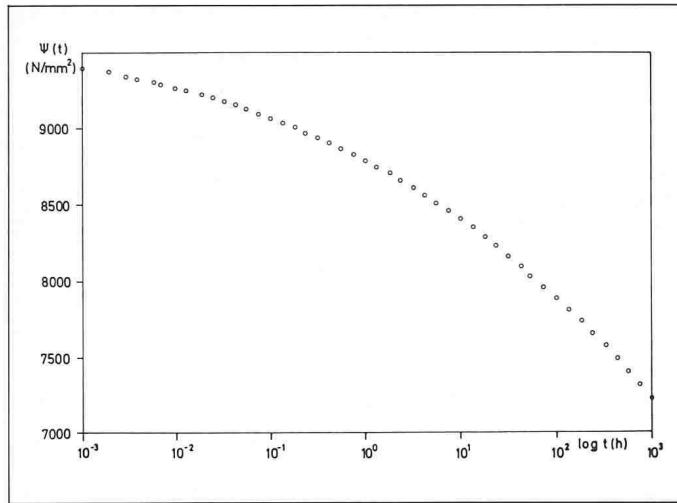


Bild 9a. Relaxationsverlauf des glasfaserverstärkten Polyesters zwischen  $10^{-3}$  Stunden und 1000 Stunden

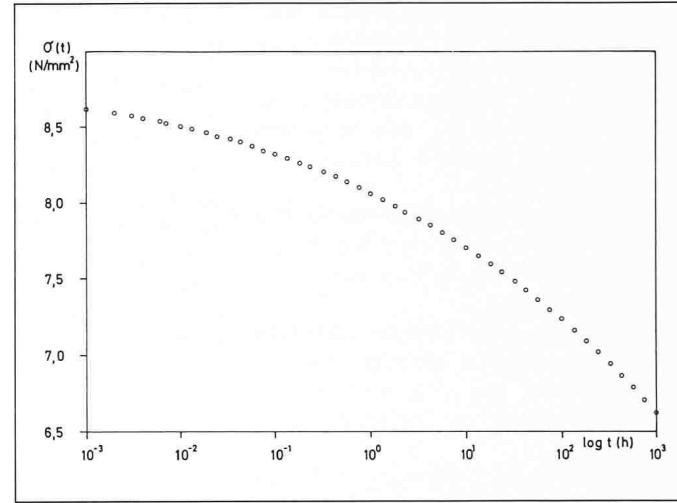


Bild 9b. Spannungsverlauf im glasfaserverstärkten Polyester für den Lastfall, gleichmässige Erwärmung um  $\Delta T = +25^\circ\text{C}$  zwischen  $10^{-3}$  Stunden und 1000 Stunden

von 5%. Bei diesem Verbund gilt es jedoch zu beachten, dass die Verformungen senkrecht zur Beanspruchungsrichtung äusserst klein sind und damit Messungenauigkeiten ein erhebliche Rolle spielen.

Die Ergebnisse können somit als sehr gut bezeichnet werden. Die Versuche bestätigen die Anwendbarkeit des Programms \*Rekursion\*S\*. Diese gute Übereinstimmung wurde an im Labor hergestellten Proben gezeigt. Bei Probekörpern aus laufenden Produktionen darf wegen der Fertigungsvariationen diese Genauigkeit nicht erwartet werden.

## Beispiel II

Beschichtung von Brückenbrüstungen mit glasfaserverstärktem Polyester.

Zum Schutz von Beton gegen Umwelteinflüsse, insbesondere gegen die Einwirkung von Frost- und Tausalz, werden in neuerer Zeit auch glasfaserverstärkte Polyesterbeschichtungen angewendet. Bild 7 zeigt eine solche beschichtete Brückenbrüstung (Ausschnitt). Die Laboruntersuchungen ergaben eine Dicke der Beschichtung von 1,05 bis 2,07 mm und einen Glasfasergehalt von 22,4 bis 28,4 Massen-%. Mit der Mehrschichten-Kontinuumstheorie wurden in einem ersten Berechnungsgang die Spannungen in der Kunststoffschicht und im Beton für den Lastfall bei gleichmässiger Erwärmung um  $\Delta T = 25^\circ\text{C}$  mit folgenden Ausgangswerten berechnet, wobei beim Kunststoff als Näherung die Matrialeigenschaften bei Raumtemperatur eingesetzt wurden:

Beton:

$$E = 35\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,16$$

$$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$t = 200 \text{ mm} \text{ (Dicke des Betons)}$$

GFK:

$$E = 9700 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,33$$

$$\alpha = 35 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$t = 2 \text{ mm} \text{ (Dicke der GFK-Beschichtung)}$$

In Bild 8 sind die Resultate dieses Berechnungsganges aufgezeigt. Die Unterschiedlichen Temperatursausdehnungskoeffizienten der Beschichtung und des Betons führen bei Temperaturänderungen zu einer Beanspruchung der Grenzfläche Beschichtung/Beton (Bild 8).

In einem zweiten Rechengang wurde mit dem Programm \*Rekursion\*S\* der Relaxationsverlauf der GFK-Beschichtung bestimmt.

Folgende Kriechfunktion wurde für das glasfaserverstärkte Polyester verwendet:

$$\Phi_{\parallel} = 1,0309 \cdot 10^{-4} (1 + 0,103 \cdot t^{0,172})$$

In Bild 9a sind der Relaxationsverlauf und in Bild 9 b der Spannungsverlauf in Funktion der Zeit für den Lastfall, gleichmässige Erwärmung um  $\Delta T = 25^\circ\text{C}$  dargestellt.

## Verdankungen

Die Autoren bedanken sich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen ha-

ben. Dieser Dank richtet sich an die Schulleitung der ETH Zürich, an die Mitarbeiter des Instituts für Baustoffe, Werkstoffchemie und Korrosion, an Prof. Dr. E. Anderheggen und an seine Assistenten vom Institut für Informatik der ETHZ, an die Leitung der EMPA Dübendorf, insbesondere an alle Mitarbeiter der Kunststoffabteilung sowie an die Firma Ciba-Geigy AG, Basel.

## Literatur

- [1] Lutz, P.; Rüegg, Ch.: Glasfaser-Kunststoffe (GFK) – Eine Zusammenstellung über den Stand der internationalen Forschung, IBWK, ETH Zürich (1977)
- [2] Lutz, P.; Moser, U.: «Beitrag zum linear viskoelastischen Verhalten von mehrschichtigen GFK-Verbunden», IBWK, ETH Zürich (1979)
- [3] Lutz, P.: Berechnung des Verformungsverhaltens orthotroper Mehrschichtenverbunde bei Annahme linearer Viskoelastizität, IBWK, ETH Zürich (1980)
- [4] Nowacki, W.: «Theorie des Kriechens – Lineare Viskoelastizität», Franz Deuticke, Wien (1965)
- [5] Sayir, M.: «Kontinuumsmechanische Probleme des Ingenieurs», Autographie, ETH Zürich (1979)
- [6] Wiedemann, J.: «Schrittweise Annäherung des Kriechverhaltens orthotroper Schichtlaminaten», 14. AVK, Freudenstadt (1977)
- [7] Desserich, G.: «Beitrag zur Spannungs- und Verformungsanalyse mehrschichtiger Flächentragwerke», Dissertation ETH Zürich 7428, Zürich (1983)

Adressen der Verfasser: Dr. G. Desserich, IBWK, ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich, und c/o Desserich + Funk, dipl. Ing. ETH/SIA, Luzern, Zürich, Kilchberg, Dübendorf ZH, Stans NW, Engelberg OW, Erstfeld UR; Langensandstr. 74, 6005 Luzern; Prof. Dr. A. Rösl, Institut für Baustoffe, Werkstoffchemie und Korrosion (IBWK), ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich; U. Meier, dipl. Bauing. ETH, Ressortchef Baustoffe, Vizedir. EMPA, Überlandstr. 129, 8600 Dübendorf.