

Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103 (1985)
Heft: 13

Artikel: Abflusseigenschaften in offenen Kanälen
Autor: Hager, Willi H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-75744>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Abflusseigenschaften in offenen Kanälen

Von Willi H. Hager, Lausanne

Die hydraulischen Charakteristika von Abflüssen in offenen Gerinnen werden anhand einer Diskussion von Normalabfluss, kritischem Abfluss, Wassersprung, Stau- und Senkungskurven sowie der Zweiphasenströmung Wasser-Luft vorgestellt. Die wichtigsten Resultate sind anwendungsbezogen dargestellt und Beispiele illustrieren den Berechnungsgang.

Les caractéristiques hydrauliques des écoulements dans des canaux découverts sont discutés à l'aide de l'écoulement uniforme, de l'écoulement critique, du ressaut hydraulique, des courbes de remous et de l'écoulement biphasique eau-air. Les résultats les plus importants sont présentés graphiquement, et des exemples montrent la marche à suivre pour les calculs.

Hydraulics of open channel flows are discussed using the uniform and critical flow conditions, the hydraulic jump, the backwater profiles and the two-phase flow water-air. The most significant results are represented in a directly applicable manner, and typical examples illustrate the computation procedure.

1. Einleitung

Dem Wasser kommt auch in der modernen Gesellschaft ein gewichtiger Stellenwert zu. Neben dem ursprünglichen Trinkbedürfnis basiert unser heutiges Leben entscheidend auf der Funktionstüchtigkeit der Trink- und Brauchwasserversorgung, der Abwasserbeseitigung, der Energieerzeugung durch Wasserkraft, des Hochwasserschutzes und der Schifffahrt, dessen Benützung zu Heiz- und Kühlungszwecken, neben vielen weiteren Anwendungsgebieten. Da das kostbare Gut nur selten dort zur Verfügung steht, wo es gebraucht wird, sind *Transportleitungen* in Form von Druckrohren und Freispiegelkanälen unumgänglich. Da es sich dabei um beachtliche Fördermengen handeln kann, ist deren sichere Bemessung von grösster Bedeutung.

In der vorliegenden Studie soll der Versuch unternommen werden, die hydraulischen Aspekte des Freispiegelabflusses mit spezieller Beleuchtung der beiden wohl am häufigsten gebrauchten Kanalprofile, Rechteck und teilgefüllter Kreis, näher zu verfolgen. Die Untersuchung richtet sich an den Praktiker, werden doch die wichtigsten Resultate in einer ihm unmittelbar zugänglichen Form dargestellt, sowie an den Theoretiker, da die einzelnen Ableitungen in einer allgemeinen Betrachtungsweise hergeleitet werden. Dadurch lassen sich einzelne Problemkreise in ein neues Licht rücken, eventuelle Einschränkungen von heute üblichen Berechnungsverfahren aufdecken und Einflüsse verfeinerter Methoden gegenüber den elementaren veranschaulichen.

Im Kapitel 2 wird der Normalabfluss-Zustand eingehend betrachtet; zwei heute übliche Berechnungsverfahren werden verglichen und auf die erwähnten Profiltypen angewandt. Im Kapitel 3 widmen wir uns dem kritischen Abflusszustand. Theoretische wie auch praktische Anwendungsgebiete werden vorgestellt.

Im Kapitel 4 versuchen wir das Phänomen des Wassersprungs näher zu beleuchten. Insbesondere sollen Unterschiede zum Fliesswechsel Strömen-Schiessen verfolgt und heute

weitgehend fehlende Dimensionierungs-Grundlagen mitgeteilt werden. Im Kapitel 5 werden die Stau- und Senkungskurven allgemein untersucht. Ausgangspunkt bilden dabei die verallgemeinerten Gleichungen für beliebige, stetig veränderliche Abflüsse, die sich anschliessend auf stationäres Fliessverhalten in prismatischen Kanälen anwenden lassen. Die verschiedenen Voraussetzungen, denen die heute üblichen Berechnungsverfahren unterliegen, werden diskutiert und deren Einfluss auf die Lösung qualitativ verfolgt. Anschliessend folgt die Darstellung einer allgemein gültigen Methode zur Berechnung der Stau- und Senkungskurven, die Anwendung in beliebigen, prismatischen Kanälen findet. Im Kapitel 6 soll der Einfluss der Selbstbelüftung des Abflusses unter hoher Fliessgeschwindigkeit im Lichte der modernsten Forschungsergebnisse studiert werden. Die quantitativen Resultate beziehen sich dabei wiederum auf die beiden Profiltypen Rechteck und Kreis.

Abkürzungen

<i>b</i>	Breite des prismatischen Rechteckkanals
<i>B</i>	Kanalbreite
<i>Bou</i>	Boussinesq-Zahl
<i>C</i>	mittlere Luftkonzentration
<i>D</i>	Durchmesser
<i>E</i>	Energie
<i>f</i>	Verhältnis $f = h_s/h_N$
<i>F</i>	Querschnittsfläche
<i>Fr</i>	Froude-Zahl
<i>g</i>	Erdbeschleunigung
<i>h</i>	Abflusstiefe
<i>H</i>	Energiehöhe
<i>H_s</i>	auf Kanalsohle bezogene Energiehöhe
<i>I</i>	Impuls
<i>J_e</i>	Energielinienneigung
<i>J_f</i>	Wandreibungsgradient
<i>J_s</i>	Sohlenneigung
<i>k</i>	äquivalente Wandrauhigkeit
<i>K</i>	Wandreibungskoeffizient nach Strickler
<i>L</i>	Wassersprunglänge
<i>q</i>	spezifischer Abfluss
<i>Q</i>	Durchfluss
<i>R</i>	hydraulischer Radius
<i>s</i>	Längskoordinate
<i>t</i>	Zeit
<i>u</i>	seitliche Zu- oder Abflussgeschwindigkeit
<i>V</i>	mittlere Geschwindigkeit
<i>x</i>	Lagekoordinate
<i>y</i>	relative Abflusstiefe $y = h/h_N$
<i>z</i>	Vertikalkoordinate
<i>α</i>	Energie-Korrekturbeiwert
<i>β</i>	Impuls-Korrekturbeiwert
<i>ε</i>	halber Zentrwinkel
<i>θ</i>	Sohlenneigung
<i>ρ</i>	Dichte
<i>σ</i>	Charakteristik für Stau- und Senkungskurven
<i>Φ</i>	Formbeiwert für Stau- und Senkungskurven
<i>χ</i>	Belüftungs-Kennzahl in teilgefüllten Kreisprofilen
<i>η</i>	Belüftungs-Kennzahl in Rechteckprofilen
<i>λ</i>	Reibungsbeiwert nach Prandtl-Colebrook
<i>λ̄</i>	typische Wellenlänge
<i>ω</i>	Sohlen-Neigungswinkel

Indizes

<i>N</i>	Normalabfluss-Zustand
<i>c</i>	kritischer Zustand
<i>v</i>	Vollfüllungs-Zustand
<i>o</i>	Ausgangs-Zustand
<i>1</i>	Querschnitt oberhalb des Wassersprungs
<i>2</i>	Querschnitt unterhalb des Wassersprungs
<i>g</i>	Gemisch-Kenngroesse
<i>a</i>	Luft-Kenngroesse
<i>w</i>	Wasser-Kenngroesse
<i>t</i>	Übergangszustand von Reinwasser zu Gemisch

2. Normalabfluss

Unter Normalabfluss versteht man den *Gleichgewichtszustand* zwischen treibenden und rückhaltenden Kräften im prismatischen, geraden Gerinne konstanter Neigung, gleichbleibender Rauhigkeit und nicht änderndem Durchfluss. Anders ausgedrückt kompensieren sich unter diesen Voraussetzungen das Sohlengefälle J_s und das Reibungsgefälle J_f . Bekanntlich stellt sich dieser Fliesszustand nur unter bestimmten Zusatzbedingungen ein: das Gerinne muss eine genügend grosse Längsausdehnung besitzen und die geometrischen Eigenschaften des Kanals dürfen sich dabei nicht ändern. Geringe Änderungen im Sohlengefälle (Stösse, Setzungen), in der Rauhigkeit (Inkrustationen, verschiedene Rohrmaterialien, neue und alte Leitungsabschnitte) und im Durchfluss (Infiltrationen, seitliche Zuflüsse) können den Normalabfluss-Zustand nicht unwe sentlich beeinflussen. Liegen gar örtliche Störstellen vor wie Krümmer, Verengungen und Erweiterungen, Abzweigungen und Vereinigungen, usw., so wird ein Normalabfluss empfindlich gestört, und der Abfluss benötigt wiederum eine gewisse *Anlaufstrecke*, bis sich ein neues Gleichgewicht einstellen kann. Die in Kanälen häufig vorkommenden Störstellen lassen den Normalabfluss-Zustand eigentlich nie eintreten, die Distanz zwischen zwei Störstellen ist dafür meist zu kurz.

Die exakte physikalische Beschreibung des Normalabflusses für turbulente Strömungen ist bis heute nicht gelungen. Zwar liegt eine Fülle von empirischen Ansätzen und Messwerten vor [3], [19], die Natur des Problems lässt jedoch keinen elementaren Lösungsweg zu. Im Laufe der vergangenen Jahre sind grundsätzlich *zwei Berechnungswege* eingeschlagen worden. Der erste basiert auf der Formel von Manning-Strickler

$$(1) \quad V_N = K \sqrt{J_s} R_N^{2/3}$$

mit V als mittlerer Geschwindigkeit, K als Reibungswert nach Manning-Strickler, R als hydraulischem Radius und Index N als Bezeichnung für Normalabfluss. Strickler [34] gibt als Gültigkeitsbereich von (1) $J_s > 0.01\%$ (vollturbulente Strömung) und $h > 0.01$ m (kein Einfluss der Oberflächenspannung) an. Berücksichtigt man Versuchsergebnisse an steilen Kanälen, so muss die erste Forderung infolge der natürlichen Selbstbelüftung erweitert werden zu $0.01\% < J_s < 10\%$ (siehe 6.). Nach der Formel von Strickler entspricht K einer für einen vorgegebenen Kanal zugehörigen Konstanten. Betrachtet man beispielsweise die Experimente von Marchi [27], der für ein und denselben Kanal den hydraulischen Radius R nicht variiert, sondern lediglich durch Veränderung des Sohlengefälles den zugehörigen Durchfluss unter Normalabflussbedingungen misst, so ergeben sich relativ gewichtige Variationen in K . Normalerweise werden Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl aufgetragen. Da in offenen Gerinnen jedoch fast durchwegs der Einfluss der Froude-Zahl dominanter ist, findet man in Bild 1 den Verlauf von $K(Fr_N)$ mit

$$Fr_N = V_N / \sqrt{gh_N}$$

Die Messwerte beziehen sich auf glatte und rauhe Rechteckkanäle; man findet maximale Variationen in K von $\pm 15\%$ für die ersten und $\pm 7\%$ für die zweiten.

Wie anderseits Dallwig [5] feststellt, besitzt (1) nur unter den folgenden, zusätzlichen Voraussetzungen näherungsweise Gültigkeit:

- vollraues Fliessverhalten,
- $5 \cdot 10^{-4} < k/D < 10^{-1}$ als Angabe für die relative Sandrauhigkeit mit D als Ersatz-Durchmesser.

Der *zweite Berechnungsweg* fundiert auf der Turbulenztheorie und beschreibt den Normalabfluss anhand der Gleichung von Darcy-Weisbach

$$(2) \quad V_N = 2 \frac{\sqrt{2gJ_s R_N}}{\sqrt{\lambda}}$$

mit $g = 9,81(\text{m/s}^2)$ als Erdbeschleunigung und $\lambda (-)$ als Widerstandsbeiwert. Nach Colebrook gilt für das volle Kreisprofil

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left\{ \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k/R}{3.71} \right\} .$$

Darin bedeutet $Re = 4Vv/R$ die Reynolds-Zahl mit v als kinematischer Zähigkeit und k die äquivalente Sandrauhigkeit. Durch Einführung eines Formbeiwertes f gelingt Marchi [27] die verallgemeinerte Darstellung von (3) für geschlossene und offene Profile. Dieses Verfahren wurde von Bock [2] durch systematische Messungen überprüft. Die beiden Spezialfälle glatter ($k \rightarrow 0$) und rauer ($Re \rightarrow \infty$) Oberfläche lassen sich sehr einfach aus (3) finden.

Vergleicht man (1) und (2), (3), so ist in beiden Fällen eine «Konstante», K oder k , zu bestimmen. Was die Rechnung selbst betrifft, ist die Anwendung von (1) im Vergleich zu (3) einfacher, während die zweite Beziehung besser mit den physikalischen Gesetzmäßigkeiten übereinstimmt. Nach den eingangs festgestellten Bemerkungen scheint es deshalb nicht erstaunlich, dass auch heute die Darstellung nach Manning-Strickler in der Praxis derjenigen von Colebrook häufig vorgezogen wird [28]. Berücksichtigt man zudem, dass die verallgemeinerte Beziehung

$$(4) \quad J_f = \frac{V^2}{K^2 R^{4/3}}$$

zur Berechnung des Reibungsgefälles von beliebigen stationären und instationären Bewegungsabläufen herangezogen wird, so kann mit Recht behauptet werden, dass (4) mangels geeigneter anderer Unterlagen volle Berechtigung besitzt. Es muss in diesem Zusammenhang zudem klar auf die unterschiedlichen Bedürfnisse von Forschung und Technik hingewiesen werden: die wissenschaftliche Untersuchung des Normalabflusses als Turbulenzproblem setzt andere Akzente als die Praxis. Für die erste soll der Zusammenhang von physikalischen Gesetzmäßigkeiten möglichst genau und vollständig aufgedeckt werden, während für die zweite Richtwerte und Dimensionierungsgrundlagen zur Verfügung stehen müssen. Im folgenden beziehen wir uns deshalb auf Beziehung (4) im allgemeinen, und auf Gleichung (1) für Normalabfluss.

Im *Rechteckprofil* der Breite b entsteht mit $R = bh/(b + 2h)$ und (1) für

$$(5) \quad \frac{Q_N}{K \sqrt{J_s b^{8/3}}} = \Phi \left(\frac{\Phi}{1 + 2\Phi} \right)^{2/3}$$

mit $\Phi = h_N/b$. Diese Beziehung ist beispielsweise in [13] ausgewertet.

Das Teilstückproblem in *Kreisprofilen* unter Normalabfluss-Zustand hat wohl unter Sauerbrey [32] einen vorläufigen Abschluss gefunden. Für $0.07\% < J_s < 1.54\%$, $35 < Q_N < 190 \text{ l/s}$ sind im Kaliber $D = 0.30$ m umfangreiche Versuche durchgeführt und die Resultate kritisch mit bekannten Ansätzen ver-

glichen worden. Als wesentliche Schlussfolgerungen Sauerbreys lassen sich anführen:

- Die Reibungsformel nach Prandtl-Colebrook ist zur Zeit der beste Kompromiss zwischen Theorie und Praxis,
- Eine kleinliche Diskussion über die Rauigkeit von Rohrmaterialien ist müsigg. In Rohrleitungen stellt sich nach einer gewissen Zeit eine Betriebsrauigkeit ein,
- Der hydraulische Radius R ist keine generell gültige, charakteristische Länge,
- Es ist zweckmäßig, den Abfluss bei Teilfüllung auf Vollfüllung zu beziehen,
- Bei hohen Füllungsgraden besitzt die Luftzufuhr einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf den Abfluss, der sich durch Zuschlagen bemerkbar machen kann,
- Normalabfluss stellt sich in der Praxis nur sehr selten ein,
- Die hydraulisch gute Ausbildung eines Kanalsystems kann dessen Leistungsfähigkeit entscheidend beeinflussen.

Die von Sauerbrey empfohlene Füllungskurve ist in Bild 2 dargestellt.

Der Ansatz

$$(6) \quad q_N = \frac{Q_N}{K\sqrt{J_s}D^{8/3}} = \frac{3Y_N^2}{4} \left(1 - \frac{7Y_N^2}{12}\right)$$

gibt den experimentellen Kurvenverlauf gut wieder. $Y = h/D$ entspricht der Teilfüllung mit D als Kreisdurchmesser. Der benetzte Querschnitt F lässt sich näherungsweise durch

$$(7) \quad F/D^2 = \frac{4}{3}Y^{3/2} \left(1 - \frac{Y}{4} - \frac{4Y^2}{25}\right)$$

angeben, womit bei bekannter Teilfüllung direkt die entsprechende Geschwindigkeit $V = Q/F$ ermittelbar ist.

Es bleibt zu erwähnen, dass Sauerbrey die Normalabfluss-Beziehung lediglich im Bereich $0 < Y_N < 0,95$ angibt. Nach Experimenten lässt sich kein Normalabfluss für $0,95 < Y_N < 1$ realisieren, da geringfügige Störungen ein Zuschlagen verursachen. Die Teilfüllungskurve $Q_N(h_N)$ ist somit ein-eindeutig, d. h. für eine bestimmte Abflusstiefe resultiert bei bekannten Grössen K, J_s und D lediglich ein Durchfluss. Die Darstellung nach (6), (7) ist auf der «sicheren Seite» und ist in Bild 2 dargestellt.

Beispiel

Gegeben ist eine Rohrleitung mit $Q = 1,4 \text{ m}^3/\text{s}$, $J_s = 1\%$, $K = 80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ und $D = 0,90 \text{ m}$. Wie gross ist die Normalabflusstiefe h_N und die zugehörige Geschwindigkeit V_N ?

Mit $q_N = 1,4 / (80\sqrt{0,01} \cdot 0,9^{8/3}) = 0,232$ folgt aus Gl. (6) für $\Phi_N = 0,64$, womit $h_N = 0,64 \cdot 0,9 = 0,575 \text{ m}$. Infolge $\Phi_N = 0,64$ ergibt sich für $F_N/D^2 = 0,53$, also $F_N = 0,53 \cdot 0,81 = 0,429 \text{ m}^2$, womit $V_N = Q_N/F_N = 1,4/0,429 = 3,25 \text{ m/s}$.

3. Kritischer Abfluss

Möchte man an einer bestimmten Stelle eines Kanals den Durchfluss messen, so kann dies durch Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes und durch simultane Aufnahme der Profilgeometrie geschehen, siehe z. B. [10]. Das Verfahren ist im Normalfall aufwendig und nur beschränkt genau. Schon früh hat man deshalb nach einfacheren, rascheren und präziseren Verfahren gesucht, die für die Praxis zuverlässigere (und oft auch kontinuierliche) Mengenmessungen erlauben. Ideal wäre die simple Abtastung der Wasseroberfläche und die daraus unmittelbare Berechnung des Abflusses. Diese Methode lässt sich in der Tat anwenden und findet bei Wehren, Querschnitts-Einengungen (Venturikanäle beispielsweise) und in beschränktem Masse auch in Verteikanälen (örtlich abnehmender Durchfluss) oder Sammelrinnen (örtlich zunehmender Durchfluss) Anwendung [9], [12]. Betrachtet man der

Einfachheit halber einen Rechteckkanal, so gilt für die Energiehöhe

$$(8) \quad H = z + h + \frac{Q^2}{2gB^2h^2}.$$

Grundsätzlich können dabei die Sohlengeometrie z , die Abflusstiefe h , der Durchfluss Q , die Kanalbreite B in Abhängigkeit der Längskoordinate x variieren, also $H = H(x)$. Gleichung (8) gilt lediglich für Abflüsse mit nahezu hydrostatischer Druck- und fast uniformer Geschwindigkeits-Verteilung. Wie unten ausführlich erklärt, beschränkt sich deren Anwendungsbereich auf sogenannte Flachwasser-Abflüsse. Betrachten wir vorerst den Abfluss an der Stelle $x = x_0$, an der $Q = Q_0$, $z = z_0$ und $B = B_0$ gilt mit Index 0 als Bezeichnung für Grössen an der Stelle x_0 , so wird

$$(9) \quad H_* = H - z_0 = h + \frac{Q_0^2}{2gB_0^2h^2},$$

also $H_* = H_*(h)$. Diese Funktion dritten Grades soll nun diskutiert werden, wobei lediglich $0 < h < H_*$ physikalische Bedeutung haben. Da dann keine Nullstellen vorliegen, sollen eventuelle Extremwerte berechnet werden. Aus der Bedingung $dH_*/dh = 0$ folgt $1 - Q_0^2/(gB_0^2h^3) = 0$. Wird Index 0 nun fallengelassen, so ergibt sich daraus für die sogenannte kritische Abflusstiefe

$$(10) \quad h_c = (Q^2/gB^2)^{1/3}.$$

Wird (10) in (9) eingesetzt, so folgt für $H_*(h_c) = H_{*c} = 3h_c/2$. Die kritische Energiehöhe ist somit ein-eindeutig mit der kritischen Abflusstiefe und nach (10) mit dem Abfluss Q verbunden. Kennt man (durch Messung) die kritische Energiehöhe H_{*c} an einer Stelle x_0 des Kanals, so lässt sich unmittelbar der zugehörige Durchfluss Q_c berechnen.

Es fragt sich nun, wo eine Stelle x_0 zu erwarten ist. Dazu betrachten wir die Ausgangsgleichung (8) und setzen eine Potentialströmung voraus, gleichbedeutend mit $H' = H'' = H \simeq 0$ wobei i die i.te Ableitung nach x mit $i > 2$ bedeutet. Ferner bezeichnet $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$.

Extremwerte der Funktion $H(x)$ entstehen dann für

$$(11) \quad H' = z' + h' + \frac{QQ'}{gB^2h^2} - \frac{Q^2B'}{gB^3h^2} - \frac{Q^2h'}{gB^2h^3} = 0,$$

entsprechend

$$(12) \quad (z' + \frac{QQ'}{gB^2h^2} - \frac{Q^2B'}{gB^3h^2}) + h'(1 - \frac{Q^2}{gB^2h^3}) = 0.$$

Vergleicht man (12) mit (10), so erkennt man denselben Ausdruck in der zweiten Klammer von (12). Definiert man als Froude-Zahl im Rechteckprofil

$$(13) \quad Fr^2 = \frac{Q^2}{gB^2h^3}$$

so stellen sich Extremalwerte von $H(h)$ für $Fr = 1$ oder für $h' = 0$ unter der Zusatzbedingung

$$(14) \quad z' + \frac{QQ'}{gB^2h^2} - \frac{Q^2B'}{gB^3h^2} = 0$$

ein. Wie im Anhang I gezeigt, können durch weitere Analyse die folgenden Resultate ermittelt werden:

– $Fr = 1$ entspricht dem kritischen Abfluss: für gegebenen, konstanten Durchfluss Q nimmt die Energiehöhe H nicht nur einen Extremalwert, sondern zugleich einen Minimalwert an, während für gegebene Energiehöhe H der

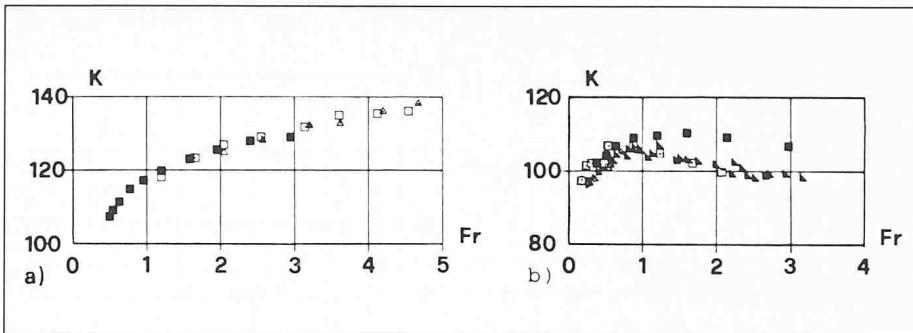


Bild 1. Reibungsbeiwert K nach Gleichung (1) in Abhängigkeit der Froude-Zahl Fr_N im Rechteckkanal nach Marchi [24], [25], [26]:
a) glatte Kanaloberfläche, b) rauhe Kanaloberfläche

Bild 2. a) Relativer Durchfluss Q_N/Q_v mit Q_v als Vollfüllung bei Normalabflusszustand nach Experimenten von Sauerbrey [32] (gestrichelt) und nach (6) für teilgefülltes Kreisprofil.
b) Relativer Durchfluss $Q_c/\sqrt{gD^5}$ bei kritischem Abflusszustand

Durchfluss maximal wird. Die beiden Darstellungen $Q(H_c)$ und $H_c(Q)$ entsprechen sich vollständig.

- $h' = 0$, entsprechend einem an der Stelle $x = x_0$ zur Sohle parallelem Wasserspiegel, erzeugt eine im vorliegenden Sinne kritischen Abflusszustand.
- Kritischer Abfluss lässt sich lediglich durch Veränderung der Kanalsohle, der Kanalbreite, des Durchflusses oder Kombinationen verschiedener Varianten erzeugen.
- Wird lediglich die Kanalsohle $z(x)$ variiert, so kann sich kritischer Abfluss nur an wehrförmigen Körpern einstellen, der kritische Querschnitt fällt mit dem Scheitelpunktschnitt zusammen.
- Wird lediglich der Kanalquerschnitt $F(x)$ variiert, so kann sich kritischer Abfluss nur bei Verengungen einstellen; der kritische Querschnitt fällt mit dem engsten Querschnitt zusammen.
- Wird lediglich der Abfluss örtlich variiert, so kann sich kritischer Abfluss nur am Anfang (am Ende) der seitlichen Ausflusstrecke (seitlichen Zuflussstrecke) einstellen.
- Für die Wasserspiegelneigung im kritischen Querschnitt lassen sich einfache Ausdrücke herleiten, die sich jedoch nur auf relativ geringe Abflusstiefen (Flachwasser) anwenden lassen.

Wie sich anhand der Gleichungen für instationäre Abflüsse (Gleichungen von de Saint-Venant, siehe z. B. [19]) weiterhin zeigen lässt, können sich Störungen des Abflusses für $Fr < 1$ kanalaufwärts und -abwärts bilden, während sie sich für $Fr > 1$ lediglich stromabwärts fortpflanzen. Der Begriff der kritischen Tiefe stellt deshalb neben der Möglichkeit der Abflussmessung auch ein für die Berechnung von Strömungen in offenen Kanälen unerlässliches Hilfsmittel dar (vergl. insbesondere Kapitel 5).

Die kritische Tiefe für den Rechteckquerschnitt ist bereits in (10) mitgeteilt worden, für das Kreisprofil dagegen kann kein einfacher funktioneller Zusammenhang angegeben werden. Bild 2 b) zeigt die graphische Auswertung für die relative kritische Tiefe $y_c = h_c/D$ in Abhängigkeit des relativen Durchflusses $Q/(gD^5)^{1/2}$ [13].

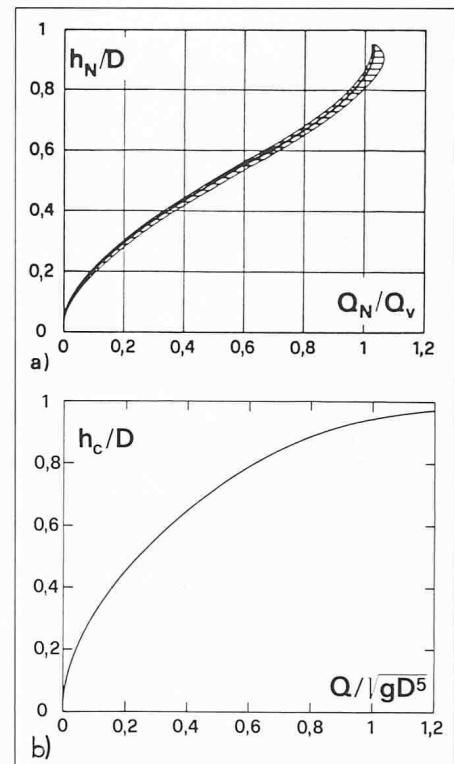
Beispiel

Für das Beispiel nach Kapitel 2 ergibt sich mit $Q/\sqrt{gD^5} = 1,4 / \sqrt{9,81 \cdot 0,9^5} = 0,58$ für $y_c = 0,777$, also $h_c = 0,777 \cdot 0,9 = 0,70$ m. Infolge $h_c > h_N$ herrscht für Normalabfluss schiessender Abflusszustand. Mit $y_c = 0,777$ folgt nach Gl. (7) für $F_c/D^2 = 0,655$, also für $F_c = 0,655 \cdot 0,9^2 = 0,53$ m², womit $V_c = Q/F_c = 1,4 / 0,53 = 2,63$ m/s.

Es ist zu beachten, dass die Definition $Fr = V/\sqrt{gh}$ nur im Rechteckprofil gilt. Allgemeine Profile basieren auf der Beziehung

$$(15) \quad Fr^2 = \frac{V^2 B}{gF}$$

mit $B = dF/dh$ als Wasserspiegelbreite.



4. Die konjugierten Tiefen

Wie in Kapitel 3 festgestellt, entspricht die Bedingung $Fr = 1$ einem Fliesswechsel. Unter der Voraussetzung konstanter Energie lässt sich jedoch lediglich der Übergang Strömen-Schiessen erzeugen. Neben der Kontinuitäts- und Energie-Gleichung muss deshalb auf den Impulssatz zurückgegriffen werden. Dieser in der praktischen Hydraulik wenig geläufige Satz besagt, dass die Summe der auf ein beliebig definiertes Kontrollvolumen wirkenden äusseren Kräfte verschwindet. Die vorteilhafte Wahl des Kontrollvolumens entscheidet grundlegend über die Aussagekraft des Resultats.

Der Impulssatz entspricht einer *Vektorbeziehung*, bestehend aus den Komponentengleichungen in die drei Raumrichtungen. Er leitet sich direkt aus dem zweiten Axiom von Newton ab.

Die einfachste Anwendung des Impulssatzes findet sich im prismatischen Rechteckkanal konstanten, geringen Gefälles. Die Komponentengleichung in Fließrichtung lautet mit Bezug auf Bild 3

$$(16) \quad g \int \rho p_1 dF_1 + \int \rho V_{1,x} dQ + gb \int \rho p_b \sin \omega dx = \\ g \int \rho p_2 dF_2 + \int \rho V_{2,x} dQ + gb \int \rho J_f h dx$$

mit «1» und «2» als Bezeichnung für zwei Referenzquerschnitte, V_x als Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, J_f als Reibungsgradient und ρ als Dichte.

(16) vereinfacht sich unter den folgenden Voraussetzungen:

- «1» und «2» entsprechen den Querschnitten vor und nach der eigentlichen Störstelle,
- in diesen Querschnitten herrscht näherungsweise hydrostatische Druck- und uniforme Geschwindigkeits-Verteilung,
- die Dichte ist konstant und gleich der Dichte von Wasser,
- die Gefällskomponente wird durch die Wandreibungs-komponente kompensiert.

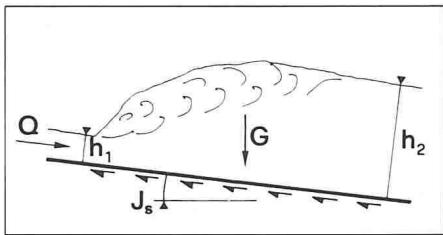


Bild 3. Kräftegleichgewicht für den ebenen Wassersprung

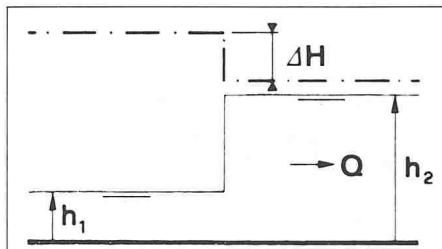
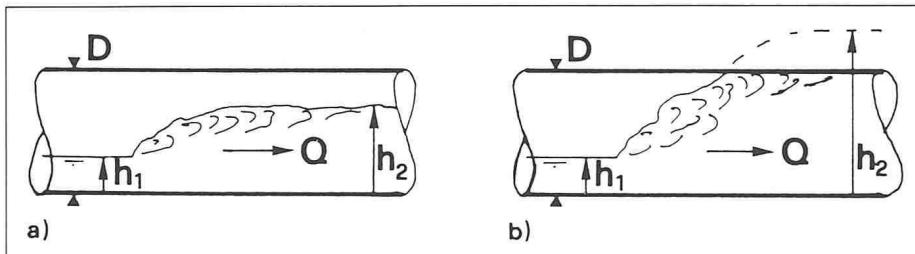


Bild 4. Vereinfachte Darstellung des Wassersprungs

Bild 5. Wassersprung im Kreisprofil mit a) durchwegs Freispiegelabfluss und b) Übergang vom Freispiegel zum Druck-Abfluss



Unter diesen Vereinfachungen entsteht

$$(17) \quad \frac{bh_1^2}{2} + \frac{Q^2}{gbh_1} = \frac{bh_2^2}{2} + \frac{Q^2}{gbh_2}$$

mit b als konstanter Kanalbreite. Durch Einführung der Froude-Zahl $Fr_1^2 = Q^2/(gb^2h_1^3)$ folgt für das Verhältnis $Y = h_2/h_1$ der konjugierten Tiefen

$$(18) \quad Y = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1).$$

Durch Anwendung des Energiesatzes

$$(19) \quad H_1 = h_1 + \frac{Q^2}{2gb^2h_1^2} = H_2 + \Delta H = h_2 + \frac{Q^2}{2gb^2h_2^2} + \Delta H$$

ergibt sich direkt für den mechanischen Energieverlust

$$(20) \quad \Delta H = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2},$$

oder näherungsweise nach /17/

$$(21) \quad \frac{\Delta H}{H_1} = \left(1 - \frac{V^2}{Fr_1^2}\right)^2.$$

Die Gültigkeit von (18) ist durch umfangreiche Versuche nachgewiesen worden, vergl. z. B. /33/. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist so verblüffend, dass eine genauere Analyse angebracht erscheint.

In der Berechnung des klassischen Wassersprung-Problems wird offensichtlich das Kontrollvolumen geschickt gewählt, und die Fehler aufgrund der verschiedenen Annahmen kompensieren sich gut. In den Querschnitten «1» und «2» darf effektiv mit hydrostatischer Druckverteilung gerechnet werden, oder der Einfluss eventueller Abweichungen wirkt sich nur unwesentlich auf die Lösung aus. Ferner ist entweder $J_s \approx J_f$ (nahezu Normalabfluss, siehe Kapitel 5), oder die Länge des Wassersprungs ist klein im Vergleich mit der Kanalausdehnung.

Wie an anderer Stelle gezeigt /9/, darf der Einfluss der Nicht-uniformität der Geschwindigkeitsverteilung in der Tat für hydraulische Berechnungen häufig vernachlässigt werden. Energie E und Impuls I_x in Achsenrichtung an der Stelle $x = x_0$ berechnen sich nach

(22)

$$E = \int \frac{p}{\rho p} dQ + \int \frac{V^2 dQ}{2g},$$

(23) entsprechend

(24)

$$I_x = \int \rho g p \cdot dF_x + \int V_x dQ$$

(25) mit

$$\alpha = \frac{\int V^3 dF}{Q^3/F^2},$$

(26)

$$\beta = \frac{\int V_x V dF}{Q^2/F}$$

(27)

(28)

als Geschwindigkeitsbeiwerte mit Bezug auf den Energie- und Impulssatz. h stellt die Druckhöhe des Abflusses dar. Uniforme Geschwindigkeitsverteilungen bedeuten $\alpha = \beta = 1$. Wie sich zeigen lässt /9/, gilt $\alpha \geq \beta \geq 1$ sowie näherungsweise

$$\alpha = \beta^3.$$

Obwohl (18) eine einfache Beziehung für die konjugierten Tiefen darstellt, lässt sich durch Anwendung des Impulssatzes in Fließrichtung x lediglich die Sprungstelle nach Bild 4 berechnen. Hingegen gelingt es weder die Wassersprunglänge L , noch das interne Fließverhalten, also beispielsweise die Luftaufnahme oder Rückströmzonen zu ermitteln. Kürzlich ist es durch Berücksichtigung der Ablösungszone oberhalb der Fließzone gelungen, Größenordnungen der beiden Zonen anzugeben /11/. Dabei liess sich feststellen, dass lediglich durch den Einbezug beider Zonen vernünftige Ansätze resultieren. Bis heute ist es jedoch noch unmöglich, den kompletten, internen Fließmechanismus eines ebenen Wassersprungs befriedigend durch die Rechnung zu beschreiben. Durch Experimente lassen sich Angaben über die Wassersprunglänge L gewinnen. Diese können jedoch lediglich als Richtwerte aufgefasst werden, da eine eindeutige Abgrenzung

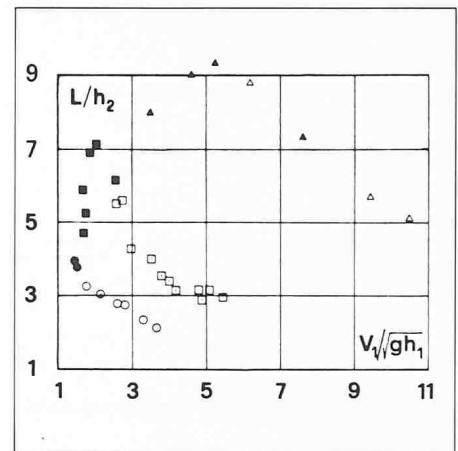


Bild 6. Länge des Wassersprungs L/h_2 in Abhängigkeit von $V_1/\sqrt{gh_1}$ und h_1/D nach Kindsvater /22/: $h_1/D = 0,2$ (\blacktriangle), $0,4$ (\blacksquare), $0,6$ (\bullet); volle Zeichen bedeuten durchgehenden Freispiegelabfluss, während offene Zeichen auf Abfluss unter Druck im Unterwasser hinweisen, vergl. Bild 5

des Sprungs nicht möglich ist. Für den Wassersprung im prismatischen *Rechteckkanal* mit kleinem Gefälle gilt

$$(29) \quad L \simeq 6h_2$$

wobei diese Angabe einem oberen Wert entspricht.

Im *Kreisprofil* muss grundsätzlich zwischen zwei Wassersprungtypen unterschieden werden, siehe Bild 5. Entweder herrscht im Unterwasser Freispiegelabfluss, $h/D < 1$, oder dieser Gerinneabschnitt steht unter Druck. Die zugehörigen konjugierten Abflusstiefen h_1/D und h_2/D in Abhängigkeit von $Q/\sqrt{gD^5}$ lassen sich aus /13/ entnehmen.

Über die Länge des Wassersprungs kann bis heute nur wenig ausgesagt werden, da entsprechende Versuche weitgehend fehlen. Erwähnenswert sind die Beobachtungen von Kindsvater /22/ für Kreisprofile; eine Auswertung der Resultate für die beiden Fliesszustände ist aus Bild 6 zu ersehen. Herrscht im Unterwasser Freispiegelabfluss, so variiert die Wassersprunglänge für verschiedene, relative Füllhöhen lediglich mit der zur Froude-Zahl analogen Kenngrösse $V_1/\sqrt{gh_1}$, während für den zweiten Abflusstyp eine zusätzliche Abhängigkeit von der relativen Oberwassertiefe h_1/D auftritt. Generell scheinen Wassersprünge mit Abfluss unter Druck eine kürzere Länge aufzuweisen als durchgehende Freispiegelabflüsse.

Die angegebenen Versuchswerte müssen insofern vorsichtig verwendet werden, als dass diese bis heute durch keine weiteren Messungen geprüft worden sind, und beispielsweise der Einfluss verschiedener Durchmesser, Rohrmaterialien und Rohreinbauten nicht erfasst ist. Analoge Versuche in geschlossenen Rechteckkanälen verdanken wir Haindl /18/.

Zum Abschluss sei noch darauf hingewiesen, dass sich die Wassersprungoberfläche entsprechend der im Oberwasser herrschenden Froude-Zahl einstellt, siehe beispielsweise Chow /3/. Grundsätzlich sind ondulierende Sprünge mit und ohne Deckwalze, solche mit einer schwachen oder ausgeprägten Deckwalze voneinander zu unterscheiden. Diese grobe Klassifikation gilt jedoch nur für fast rechteckige Profile. Je mehr sich das Profil von dieser Grundform unterscheidet, desto *räumlicher* wird der sich einstellende Sprung (schiefe Front, einseitige Beaufschlagung, variierendes Querprofil, pulsierender Abfluss).

5. Stau- und Senkungskurven

Unter Stau- und Senkungskurven versteht man im allgemeinen die linienförmige (eindimensionale) Darstellung des Wasserspiegels bei *stetig-veränderlichen Abflüssen*. Im Speziellen besitzt der Kanal einen prismatischen Querschnitt, konstantes Gefälle, konstante Rauhigkeit und konstanten Durchfluss. Stetig veränderliche Abflüsse lassen sich durch Differentialgleichungen beschreiben. Je nach dem Verhältnis einer typischen Abflusstiefe h_0 zu einer typischen Wellenlänge der Oberfläche $\tilde{\lambda}$ unterscheidet man Flachwasserabflüsse ($h_0/\tilde{\lambda} \rightarrow 0$), schwach gekrümmte Abflüsse ($h_0/\tilde{\lambda} \ll 1$), gekrümmte Abflüsse ($h_0/\tilde{\lambda} \simeq 1$) und stark gekrümmte Abflüsse ($h_0/\tilde{\lambda} \rightarrow \infty$). Bis heute liegen keine Gleichungen vor, die erlauben, die Gesamtheit dieser Abflusstypen zu beschreiben. Die einfachsten Beziehungen gelten für *Flachwasserabflüsse*, die, wie unten gezeigt wird, hydrostatische Druckverteilung aufweisen. Werden lediglich Variationen in der Fliessrichtung berücksichtigt, so lassen sich die verallgemeinerten Gleichungen von de Saint-Venant anwenden /37/

$$(30) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + (2\beta - 1) \frac{V \partial V}{g \partial s} + \frac{V^2}{g} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{(\beta - 1)}{gF} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} (h \cos \omega) = J_s - J_e + \frac{(u - V)}{gF} \frac{dQ}{ds},$$

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (VF) = \frac{dQ}{ds}$$

mit t als Zeit, s als wenig geneigter und gekrümmter Längskoordinate, V als mittlerer Fliessgeschwindigkeit, β als Geschwindigkeitsbeiwert, F als Querschnittsfläche, h als Abflusstiefe, ω als Sohlneigung, J_s als Tangens der Sohlneigung, J_e als Energieliniengradient, u als seitlicher Zuflussgeschwindigkeit in Hauptfliessrichtung, dQ/ds als seitlicher Zu- oder Ausfluss, vergl. Bild 7. Die beiden Unbekannten, V und h in Abhängigkeit der Lage s und der Zeit t lassen sich bei bekannter Gerinnegeometrie, gegebenen Zu- und Ausflüssen und bekannten Beziehungen für β durch Vorgabe einer Anfangs- und zweier Randbedingungen lösen /23/.

Häufig kann der betrachtete Gerinneabschnitt vereinfacht als Rechteckkanal ohne seitliche Zu- und Ausflüsse betrachtet werden. Ist die Geschwindigkeitsverteilung nahezu uniform, $\beta \equiv 1$, so vereinfachen sich die Impulsgleichung (30) und die Kontinuitätsbeziehung (31) auf

$$(32) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = J_s - J_e,$$

$$(33) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hV) = 0,$$

also den Originalgleichungen nach de Saint-Venant. Im allgemeinen sind sie lediglich durch numerische Verfahren lösbar. Betrachtet man nun stationäre Abflüsse, $\partial/\partial t \equiv 0$, so gilt in Analogie zum System (30), (31) die folgende Gleichung für die freie Oberfläche $h(x)$ /9/

$$(34) \quad \frac{dh}{ds} = \frac{J_s - J_e + \frac{\beta Q^2}{gF^3} \frac{\partial F}{\partial s} - (2\beta - \frac{u}{V}) \frac{Q}{gF^2} \frac{dQ}{ds} - \frac{Q^2}{gF^2} \frac{d\beta}{ds}}{1 - \frac{\beta Q^2}{gF^3} \frac{\partial F}{\partial h}}.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich für bekannten Querschnitt $F(h, s)$ Geschwindigkeitskoefizient $\beta(s)$, Zu- oder Ausfluss $Q(s)$ mit zugehöriger Geschwindigkeit u in Fliessrichtung s , bekannter Sohlengeometrie $J_s(s)$ und bekanntem Energieliniengradienten $J_e(s)$ unter Vorgabe einer Randbedingung lösen.

Wie bereits festgestellt, lässt sich (34) oft vereinfachen. Vernachlässigt man den Einfluss von β , setzt man also $\beta = 1$ und $d\beta/ds = 0$, sind zudem die seitlichen Zu- und Ausflüsse im Vergleich zum Durchfluss klein und verläuft die Kanalachse gerade, $s \rightarrow x$, so gilt anstelle von (34)

$$(35) \quad \frac{dh}{dx} = \frac{J_s - J_e + \frac{Q^2}{gF^3} \frac{\partial F}{\partial x}}{1 - \frac{Q^2}{gF^3} \frac{\partial F}{\partial h}},$$

wobei J_e Verluste infolge Wandreibung und infolge von Verengungs- und Erweiterungsstrecken beinhaltet kann. Wie sich durch Ableiten zeigen lässt, entspricht (35) dem System

$$(36) \quad H = z + h + \frac{Q^2}{2gF^2},$$

$$(37) \quad H' = -J_e$$

mit $dz/dx = -J_s$. Die erste dieser Beziehungen stellt die bekannte Gleichung nach Bernoulli für nahezu parallele Stromlinien dar (hydrostatische Druckverteilung und nahezu uniforme Geschwindigkeitsverteilung), während die zweite den Energiehaushalt längs der Fliessstrecke vorschreibt.

Für prismatische Kanäle mit konstantem Gefälle reduziert sich (35) schliesslich auf die spezielle Gleichung von Stau- und Senkungskurven

$$(38) \quad \frac{dh}{dx} = \frac{J_s - J_f}{1 - Fr^2}$$

mit Fr nach (15). J_s entspricht dem konstant vorausgesetzten Sohlengefälle, und J_f beinhaltet im Gegensatz zu J_e lediglich Wandreibungsverluste.

Im allgemeinen lässt sich Gleichung (38) nur numerisch lösen, wobei zu beachten ist, dass die rechte Seite lediglich von der Abflusstiefe h abhängt, also ein Integral unter Angabe einer Randbedingung zu lösen ist.

Die Berechnung von Stau- und Senkungskurven stellt eines der ältesten Probleme der analytischen Hydraulik dar. Die wohl bekannteste Lösung verdanken wir Bresse, der vor gut 100 Jahren den Fall eines sehr breiten Rechteckprofils einer geschlossenen Lösung zuführte. Da das Reibungsgefälle J_f und die Froude-Zahl Fr je nach Querschnittsform variieren, muss jede Profilform gesondert betrachtet werden. Chow betrachtet die Klasse der Potenzfunktionen $F = ah^n$ ($n=1$, Rechteck, $n=3/2$ Parabel, $n=2$ Dreieck, usw. mit a als von h unabhängige Profilkenngröße) /3/; wichtige Profiltypen wie das Trapez- und den teilgefüllten Kreis lassen sich mit diesem Ansatz jedoch nicht behandeln. Hörler /20/ beschreibt einen iterativen Berechnungsweg für den letzteren, der Berechnungsaufwand übersteigt jedoch meistens die zur Verfügung stehende Zeit.

In /8/ wird eindringlich auf den Näherungscharakter der Beziehung (38) hingewiesen. Streng genommen gilt die Gleichung lediglich für hydrostatische Druck- und uniforme Geschwindigkeitsverteilung in prismatischen Kanälen mit konstanter Rauigkeit, unveränderlichem Sohlengefälle und konstantem Durchfluss, Forderungen, die sich in der Realität nur selten einstellen (vergl. auch Kapitel 2). Deshalb ist in derselben Veröffentlichung der Versuch unternommen worden, Gleichung (38) auf beliebige Profile mit schwach veränderlicher Kanalcharakteristik anzuwenden. Bevor wir auf diese Berechnungsmethode eintreten, soll (38) diskutiert werden.

Ausgezeichnete Punkte der Lösung von (38) entstehen für

- $J_s = J_f$, $Fr \neq 1 \Leftrightarrow h' = 0$, der Wasserspiegel verläuft parallel zur Sohle; für $h'' \neq 0$ herrscht Pseudo-Normalabfluss (Extremwert), während für $h'' = 0$ sich Normalabfluss-Zustand einstellt;
- $Fr = 1$, $J_s \neq J_f \Leftrightarrow h' \rightarrow \infty$, der Wasserspiegel verläuft vertikal zur Sohle;
- $Fr = 1$ und $J_s = J_f$, die Differentialgleichung besitzt einen singulären Punkt, die zugehörige Wasserspiegelneigung h' muss durch höhere Ableitungen ermittelt werden.

Wie sich zeigen lässt /9/ ist Zustand b) nicht realisierbar. Tritt ein Fliesswechsel auf, $Fr = 1$, so gilt in jedem Falle Bedingung

c). Da ein Fliesswechsel ein ausgesprochen lokales Phänomen darstellt, also Reibungskräfte den Abfluss nur sekundär zu beeinflussen vermögen, kann Gleichung (38) in erster Näherung trotzdem angewandt werden. Da voraussetzungsgemäß B und Q nicht mit x variieren, lässt sich somit Beziehung (K. 2) nach Anhang I als singuläre Wasserspiegelneigung benutzen. Der Übergang Schiessen-Strömen kann jedoch nicht durch (38) beschrieben werden, da neben den Wandreibungskräften zusätzliche Stossverluste auftreten.

Beziehung (38) stellt das Verhältnis von Reibungskräften und Gewichtskomponente in Fliessrichtung (für $J_s - J_f = 0$ herrscht Normalabfluss) zu den dynamischen Kräften (für $Fr = 1 = 0$ herrscht kritischer Abfluss) dar. Für Stau- und Senkungskurven treten somit die Einflüsse des Normalabflusses und des kritischen Abflusses kombiniert auf. Beschränkt man sich auf positive Sohlengefälle, $J_s > 0$, so ergibt sich mit (4)

$$(39) \quad \frac{dh}{dx} = J_s \left(\frac{\frac{v^2}{K^2 J_s R^{4/3}}}{1 - Fr^2} \right) = J_s \left(\frac{1 - \sigma Fr^2}{1 - Fr^2} \right)$$

wobei $\sigma = \sigma(K, J_s, \text{Profilform})$. Im Rechteckprofil nimmt σ die folgende Gestalt an

$$(40) \quad \sigma = \frac{g}{K^2 J_s h^{1/3}} \left(1 + \frac{2h}{b} \right)^{4/3}.$$

Wie sich zeigen lässt, treten in der Berechnung von Stau- und Senkungskurven mindestens sechs voneinander unabhängige Parameter auf. Da sich die Lösung nur für Spezialfälle analytisch bestimmen lässt, ist man bestrebt, diese für die praktisch wichtigen Fälle diagrammhaft darzustellen. Allein, mit dieser grossen Parameterzahl ergibt dies eine umfangreiche und unhandliche Auswertung. Es bieten sich deshalb die beiden folgenden Lösungsvarianten an:

- entweder wird (38) durch Definition aller benötigten Parameter direkt numerisch für den zu untersuchenden Fall integriert,
- oder (38) wird weiterhin vereinfacht, damit eine Darstellung mit maximal drei Parametern entsteht.

Wird der Gültigkeitsbereich der Ausgangsgleichung kritisch beleuchtet /8/, so stellt man fest, dass sich eine gesteigerte Genauigkeit der ersten Lösungsvariante aufgrund von (38) meistens nicht rechtfertigen lässt. Die vereinfachte Berechnungsmethode kann als relevant betrachtet werden, falls immerhin die beiden ausgezeichneten Abflusstiefen, die kritische Tiefe und die Normalabflusstiefe, durch das Resultat wiedergegeben werden. Die Stau- und Senkungskurven selbst (Übergangskurven zwischen kritischem Zustand und Normalabfluss-Zustand) erfahren dann nur eine geringfügige Variation von der exakten Lösung nach (38) /8/.

Da die eindimensionale Theorie, in der lediglich Variationen in der Fliessrichtung x berücksichtigt werden, einer ebenen Behandlung für den Abfluss im Rechteckprofil gleichkommt, liegt der Gedanke nahe, die erwähnten Übergangskurven anhand eines *rechteckigen Ersatzprofils* zu ermitteln. Ersetzt man J_s in der Klammer von (39) durch die Normalabflussbeziehung (1), so entsteht

$$(41) \quad \frac{dy}{dX} = \frac{1 - y^{-10/3} \left(\frac{1 + 2\Phi y}{1 + 2y} \right)^{4/3}}{1 - (f/y)^3}$$

mit

$$(42) \quad X = J_s x / h_N, \quad y = h / h_N, \quad \Phi = h_N / b, \quad f = h_c / h_N$$

wobei sich h_N und h_c auf das gegebene (nicht unbedingt rechteckige) Profil beziehen. Wie sich zeigen lässt [8] übt der Formbeiwert Φ mit $0 < \Phi < \infty$ nur einen sehr untergeordneten Einfluss auf den Verlauf $y(X)$ des Wasserspiegels aus. Als Mittelwert wird deshalb $\Phi = 1$ gewählt, womit anstelle von (41) die folgende, vereinfachte Beziehung für den Verlauf der Stau- und Senkungskurven tritt

$$(43) \quad \frac{dy}{dX} = \frac{1 - \left(\frac{1+2y}{3}\right)^{4/3}}{1 - (f/y)^3} y^{-10/3}.$$

Eine geringfügig abgeänderte Form dieser Beziehung dient als Ausgangsgleichung in [8].

Die allgemeine Lösung $y(X, f)$ wird durch Angabe einer Randbedingung erhalten. Um keine zusätzlichen Parameter berücksichtigen zu müssen, werden diese asymptotisch gewählt: in der Praxis erklärt man den Normalabflusszustand als erreicht, sobald die effektive Abflusstiefe h weniger als 1% von h_N abweicht. Bild 7 a zeigt die entsprechende Auswertung. Darin lassen sich grundsätzlich sechs Zonen unterscheiden, die durch die Kurven $y=1$, $y=f$ und $f=1$, entsprechend $h=h_N$, $h=h_c$ und $h_c=h_N$ voneinander getrennt sind. Für $y < (>) 1$ entstehen Senkungs- (Stau-) Kurven, für $y < (>) f$ herrscht schiessender (strömender) Abfluss, während für $f < (>) 1$ der Normalabfluss strömend (schiessend) ist. Die sich in den entsprechenden Zonen einstellenden Oberflächen lassen sich ebenfalls aus der Auswertung entnehmen.

Die vereinfachte Beschreibung der Stau- und Senkungskurven nach (38) ist durch zwei Grundmerkmale charakterisiert:

- der Normalabfluss wird immer asymptotisch erreicht, die Gerade $y=1$ ($h=h_N$) wird nie geschnitten,
- der kritische Abfluss $y=f$ ($h=h_c$) wird von allen Abflussprofilen $h(x)$ vertikal geschnitten, mit Ausnahme der Kurve $f=1$ für $y=1$, in dem entweder $y'=0$ oder $y'=16/27$ ($30,6^\circ$).

Wie bereits im Kapitel 3 erwähnt, lässt sich ein Wasserspiegel mit vertikaler Neigung nach Bild 7 a nicht realisieren. Anders ausgedrückt verliert Gleichung (38) ihre Gültigkeit, falls die Wasserspiegelneigung und -krümmung bestimmte, obere Grenzwerte überschreiten. In diesen Fällen muss das System (36), (37) durch [15]

$$(44) \quad H = z + h + \frac{Q^2}{2gF^2} \left(1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} + hz'' - h'z' - z'^2\right),$$

$$(45) \quad H' = -J_f$$

ersetzt werden, wobei $(')$ und $('')$ die erste und die zweite, gewöhnliche Ableitung nach x bedeuten. Sind die Neigungen und Krümmungen des Wasserspiegels $h(x)$ und der Kanalsohle $z(x)$ sehr klein, so reduziert sich der Klammerausdruck von (44) auf die Einheit, also Gl. (44) auf (36). Wird anderseits der Klammerausdruck durch $(1+\Phi)$ dargestellt, so muss $|\Phi| \lesssim 0,5$ bleiben, da (44) lediglich die erste Approximation einer allgemeineren, heute jedoch noch unbekannten Gleichung darstellt.

Durch Bildung von H' aus (44) und Einsetzen von (45) entsteht eine gewöhnliche, aber nicht-lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für die Unbekannte $h(x)$. Im Gegensatz zur nullten Approximation, (35), ergeben sich dann insbesondere Probleme bei der Wahl der nun nötigen drei Randbedingungen $h(x_0)=h_0$, $h'(x_0)=h'_0$ und $h''(x_0)=h''_0$

sowie bei der Angabe eines Konvergenzkriteriums. Bis heute sind lediglich einige Berechnungen anhand des Systems (44), (45) geglückt, daraus ist der weit gestiegerte Arbeitsaufwand sowie die entstehende Vielfalt der Lösungen gut ersichtlich [1].

Die vereinfachte Diskussion von (44) gelingt durch Betrachtung des sogenannten Pseudo-Normalabflusszustandes, für den $J_s = J_f$. Die Energiediagramm verläuft dann parallel zur konstant geneigten Kanalsohle. Grundsätzlich ergeben sich dann die folgenden Möglichkeiten von Abflussformen [16], vergl. Bild 8:

- Einzelwellen (sogenannte Solitärwellen) mit konstanter Abflusstiefe h_0 für $x \rightarrow \pm \infty$; für $h_{\max}/h_0 \geq 2$ bricht jedoch der Wellenkopf, und die Annahme einer zur Sohle parallelen Energiediagramm lässt sich nicht mehr rechtfertigen.
- Uniformer Abfluss mit $h_0 = h_N$ als asymptotische Lösung des Falles a).
- Stetig abnehmende Abflusstiefe in Fließrichtung, entsprechend dem Abflussprofil über sogenannte Abstürze [14].
- Ondulierende Wellen, die dem Unterwasserbereich des ondulierenden Wassersprungs entsprechen; sie lassen sich durch elliptische Funktionen «ausdrücken und heißen deshalb im Gegensatz zu den symmetrischen Sinuswellen Cnoidalwellen.

Wie man weiterhin zeigen kann, lassen sich die Fälle a) und c) lediglich für $Fr_0 > 1$ realisieren, während für den Fall d) die Beschränkung $0,65 < Fr_0 < 1$ auferlegt werden muss mit Fr_0 als Froude-Zahl des ungestörten Abflusses. Allein Fall b), der klassische Fall des Normalabflusses ist *keinen* Beschränkungen unterworfen. Wie sich aus dieser Diskussion zeigt (und auch analytisch für kompliziertere Strömungen verifiziert ist [9]), übt die allgemeinere Darstellung (44) gegenüber (36) insbesondere im Bereich der *kritischen* Abflüsse Einfluss auf den Wasserspiegel aus. Als Größenordnung liesse sich der Bereich $0,7 < Fr < 1,5$ angeben.

Überträgt man diese für Pseudo-Normalabfluss gefundenen Resultate auf die Stau- und Senkungskurven, so muss der oben angegebene Bereich von Froude-Zahlen bei der Anwendung von Bild 7 a ausgeschlossen werden. In der Praxis entsprechen jedoch gerade diese Abflussbereiche ausgesprochen lokalen Erscheinungen, die nur unwesentlich auf die übliche Ausdehnung der Stau- und Senkungskurven Einfluss nehmen. Mit Bezug auf die gesamte Darstellung der Oberfläche kann deshalb das Diagramm zu vernünftigen Näherungslösungen führen, falls man sich der Beschränkungen klar bewusst ist.

Beispiel

Für das bereits betrachtete Beispiel mit $Q = 1,4 \text{ m}^3/\text{s}$, $D = 0,9 \text{ m}$, $K = 80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, $J_s = 1\%$ ist die Stauwurzel zu suchen, falls an der Ausgangslage ein Gefällsknick mit Fließwechsel Strömen-Schiessen vorliegt.

Mit $h_N = 0,575 \text{ m}$, $h_c = h_0 = 0,70 \text{ m}$ folgt für $h_0/h_N = 1,22$ und für $h_c/h_N = 1,22$. Nach Bild 7 a ergibt sich dann als Integrationskonstante $J_s x_0/h_N = -0,63$; für $h/h_N = 1$ ist $J_s x/h_N = 0$, womit $L = 0 - (-0,63 \cdot 0,575/0,01) = 36 \text{ m}$. Der Einfluss der Senkungskurve beträgt somit ab Gefällswechsel 36 m, für $x > 36 \text{ m}$ herrscht demnach Normalabfluss mit $h = h_N = 0,575 \text{ m}$.

6. Zweiphasenströmung Wasser-Luft

In der hydraulischen Praxis sind hauptsächlich zwei Anwendungsgebiete der Zweiphasen-Strömung Wasser-Luft von breiterem Interesse:

- der bereits in Kapitel 4 behandelte Wassersprung,
- die natürliche Selbstbelüftung bei Abflüssen mit hoher Geschwindigkeit.

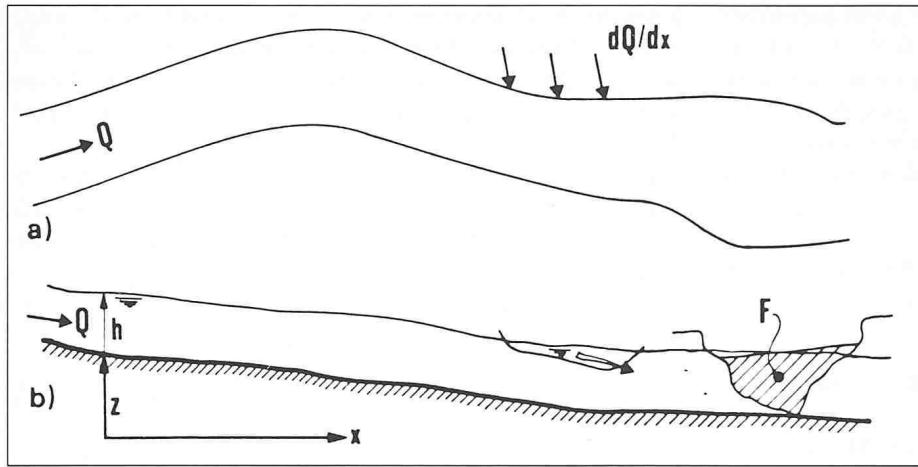
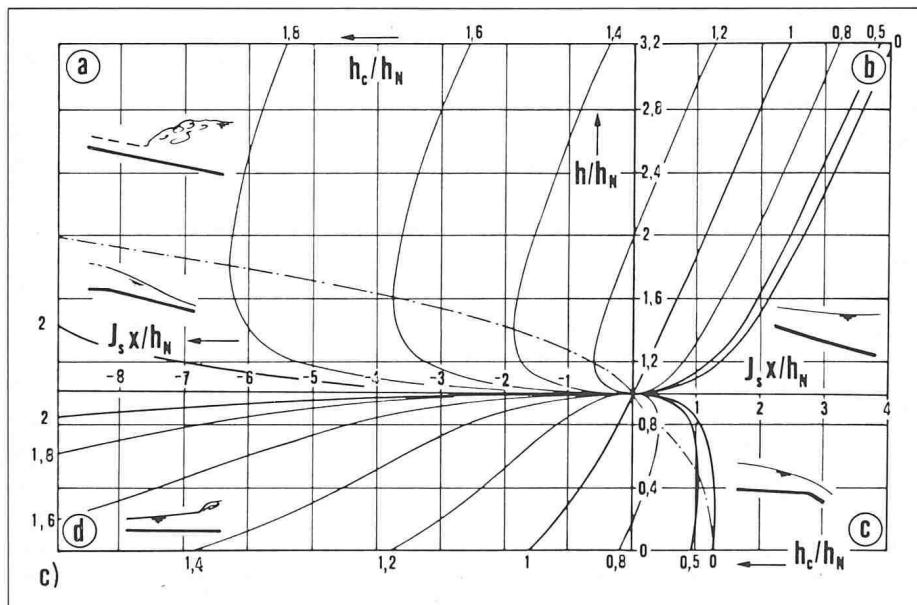


Bild 7. Bezeichnungen für Abflussgleichungen in offenen Kanälen: a) Grundriss, b) Längsschnitt

Bild 7 a. Allgemeine Lösung der Stau- und Senkungskurven in beliebigen prismatischen Kanälen mit konstanter Rauhigkeit, Neigung und unveränderlichem Durchfluss



Im folgenden beschränken wir uns lediglich auf die Darstellung der Abflüsse, bei denen eine *Selbstbelüftung* eintritt. Eine Einphasen-Strömung ist vollständig beschrieben, falls die Druck- und Geschwindigkeits-Verteilung an jedem Ort des Abflussgebietes bekannt ist. Dieselbe Strömung ist hydraulisch vollständig beschrieben, falls in einem Querschnitt lediglich die Abflusstiefe und die mittlere Geschwindigkeit bekannt ist. Im Gegensatz zur hydrodynamischen Darstellung einer Strömung, in der die Unbekannten von den drei Lagekoordinaten sowie der Zeit abhängen, ergibt die hydraulische Rechnung lediglich eine Aussage in Abhängigkeit der Längskoordinate x sowie der Zeit t .

In Zweiphasen-Strömungen variiert neben dem Druck und der Geschwindigkeit ebenfalls die Dichte $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Eine vereinfachte Betrachtungsweise im hydraulischen Sinne basiert auf den Begriffen «Gemisch», «Reinwasser» und «Luft»; sie sollen im folgenden mit den Indizes g , w und a versehen werden. Beispielsweise gilt nun für den Gemischdurchfluss

$$(46) \quad Q_g = Q_w + Q_a.$$

Ein Gemischabfluss ist hydraulisch vollständig definiert, falls die Abflusstiefe h_g , die Geschwindigkeit V_g , der Durchfluss Q_g , die Luftkonzentration C in Abhängigkeit der Lagekoordinate x und der Zeit t bekannt sind.

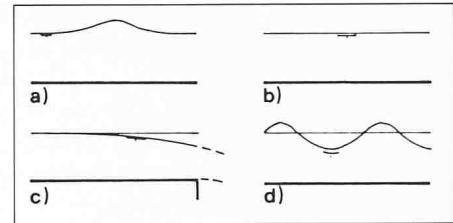


Bild 8. Mögliche Abflussformen für Pseudo-Normalabflusszustand nach [16] a) solitäre Welle, b) uniformer Abfluss, c) Abfluss über einen Absturz, d) ondulierende Welle

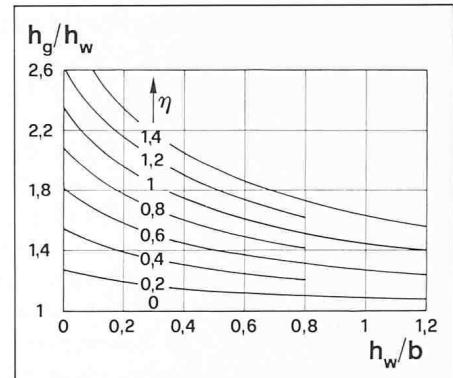
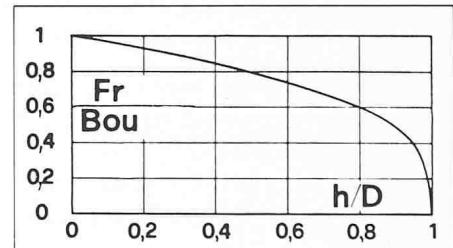
Bild 9. Verhältnis der Abflusstiefe des Gemisches zu derjenigen von Reinwasser, h_g/h_w , in Abhängigkeit der relativen Füllhöhe h_w/b und $\eta = (h_w K^2 \sin^3 \omega / g^3)^{1/4}$ für das Rechteckprofil der Breite b 

Bild 10. Verhältnis der Boussinesq- zur Froude-Zahl im teilgefüllten Kreisprofil

Die bis heute durchgeföhrten Untersuchungen über Gemischabflüsse beziehen sich hauptsächlich auf den *Normalabflusszustand*. Erst in neuster Zeit sind auch Stau- und Senkungskurven [35] sowie Abflüsse über Belüftungselemente zur Verhinderung von Kavitationserscheinungen [29] näher verfolgt worden. Es würde zu weit führen, die einzelnen Studien einer Analyse zu unterziehen, so dass lediglich der Normalabflusszustand in Rechteck- und Kreis-Profilen untersucht werden soll.

Die wohl interessanteste Studie, die sowohl eine ausgezeichnete theoretische wie auch experimentelle Untersuchung einschließt, verdanken wir Rao et al. [7], [30], [31]. Sie bezieht sich vor allem auf das *Rechteckprofil* und kommt zu den folgenden Resultaten:

- Die Dichte des Gemischabflusses zur Dichte des Wassers beträgt

$$(47) \quad \rho_g/\rho_w = 1 - 1,1C$$

mit C als mittlerer Konzentration;

- für das entsprechende Verhältnis der Froude-Zahlen findet man

$$(48) \quad Fr_g/Br = (1 - C)^{1/7}$$

wobei $Fr = V/\sqrt{gh}$;

- die mittlere Konzentration C genügt der Bedingung

$$(49) \quad C = 1 - \frac{1}{\frac{1,35}{K} Fr_w^{3/2} + 1},$$

wobei der K-Wert nach *Strickler* in der Dimension ($m^{1/3}/s$) eingesetzt werden muss;

- der Energieverlust ΔH infolge Luftaufnahme beträgt

$$(50) \quad \Delta H/h_g = \frac{1}{1-C} - 1,13.$$

Mit diesen Angaben kann der Normalabflusszustand des Gemischabflusses vollständig beschrieben werden. Die Berechnung gestaltet sich folgendermassen: Man berechne vorerst den Abfluss von Reinwasser unter Zuhilfenahme der Formel von *Strickler*

$$(51) \quad Q_N = F_N K \sqrt{\sin \omega} R_N^{2/3},$$

die im Gegensatz zu (1) den Sinus des Gefällswinkels (anstelle des Tangens) enthält. Für bekannten Durchfluss, Rauhigkeitsbeiwert und Winkel ω erhält man die Abflusstiefe h_w , die Geschwindigkeit V_w und somit die Froude-Zahl Fr_w . Mit (49) folgt unmittelbar die Konzentration C , also auch die Gemisch-Abflusstiefe

$$(52) \quad h_g/h_w = (1-C)^{-1}.$$

Aus (48) berechnet sich die Froude-Zahl Fr_g , also auch die Geschwindigkeit V_g des Gemischabflusses. Schliesslich folgt die Dichte des Gemisches ρ_g aus (47), und (50) gibt Aufschluss über die Energiedissipation.

Dieses allgemeine Vorgehen lässt sich mit Hilfe von Bild 9 vereinfachen, in der h_g/h_w in Abhängigkeit von h_w/b und der dimensionsbehafteten Kanalcharakteristik $(h_w K^2 \sin^3 \omega / g^3)^{1/4}$ aufgetragen ist. Die weiteren Unbekannten sind in der Praxis nur von untergeordneter Bedeutung und lassen sich anschliessend nach dem oben gezeigten Berechnungsweg ermitteln.

Wie aus Bild 9 ersichtlich, nimmt die Gemischabflusstiefe mit zunehmender Gerinnerrauhigkeit und mit zunehmendem Sohlengefälle zu. Für einen bestimmten Wert η besitzt die Kurve $h_g/h_w(h_w/b)$ einen Maximalwert falls $h_w/b \rightarrow 0$, für $h_w/b \rightarrow \infty$ entsteht jedoch $h_g/h_w = 1$.

Beispiel

Gegeben sei ein Rechteckkanal mit der Breite $b = 10 \text{ m}$, der Sohleneigung $\omega = 35^\circ$, der Rauhigkeit $K = 75 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Welches sind die Abflusscharakteristika für einen Durchfluss von $Q = 950 \text{ m}^3/\text{s}$, falls Normalabflusszustand vorausgesetzt wird?

Mit Beziehung (51) folgt für die Abflusstiefe $h_w = 1,51 \text{ m}$, ferner ergibt sich für $\eta = (1,51 \cdot 75^2 \sin^3(35^\circ) / 9,81^3)^{1/4} = 1,14$ und für $h_w/b = 0,151$, also mit Bild 9 für $h_g/h_w = 2,2$, womit schliesslich $h_g = 3,30 \text{ m}$. Die mittlere Luftkonzentration beträgt nach (52) $C = 55\%$ und die Froude-Zahl des Gemischen nach (48) $Fr_g = 0,89 \cdot Fr_w$: Mit $h_w = 1,51 \text{ m}$ folgt für $Fr_w = 950/(10 \cdot 1,51 \sqrt{9,81 \cdot 1,51}) = 16,35$, also $Fr_g = 14,5$ und $V_g = 14,5 \sqrt{9,81 \cdot 3,3} = 82,5 \text{ m/s}$ im Vergleich zu $V_w = 950/(10 \cdot 1,51) = 62,9 \text{ m/s}$. Die Dichte des Gemischabflusses beträgt nach (47) $\rho_g = 1(1 - 1,1 \cdot 0,39) = 0,40 \text{ t/m}^3$ und der Energieverlust nach (50) $\Delta H = 3,3(0,45^{-1} - 1,13) = 3,60 \text{ m}$. Wie sich aus Bild 7 weiter entnehmen lässt, benötigt dieser Abfluss eine grosse Anlaufstrecke, bis sich die Normalabfluss-Verhältnisse einstellen.

Die wohl interessanteste Untersuchung über Selbstbelüftung

in teilgefüllten Kreisrohren verdanken wir *Volkart* [36]. Im Gegensatz zur Studie von *Rao* et al. werden jedoch alle Abflussparameter der Gemischströmung auf den hydraulischen Radius R bezogen. Anstelle der Froude-Zahl tritt deshalb die (physikalisch nicht ganz verständliche) Boussinesq-Zahl $Bou = V/\sqrt{gR}$. Im breiten Rechteckprofil, $h/b \rightarrow 0$ entsteht zwar für $R = h$; die Messwerte *Rao*'s et al. beziehen sich jedoch nicht nur auf diesen Grenzfall. Wie sich einfach zeigen lässt, besteht der Zusammenhang

$$(53) \quad \frac{Bou}{Fr} = (\varepsilon / \sin \varepsilon)^{1/2}$$

mit ε als halbem Zentriwinkel [36]. Unter Verwendung der Beziehung für die Abflusstiefe in Abhängigkeit dieses Winkels

$$(54) \quad \frac{h}{D} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varepsilon)$$

lässt sich die in Bild 10 dargestellte Funktion $Fr/Bou(h/D)$ ermitteln. Daraus erkennt man, dass $Fr \approx Bou$ für geringe Teillösungen entsteht, für übliche h/D wird jedoch die Froude-Zahl kleiner als die Boussinesq-Zahl.

Die Experimente Volkart's beziehen sich auf die folgenden Parameterbereiche: $0,11 < J_s < 0,956$, $1,5 < Q_w < 1913 \text{ l/s}$, $0,11 < D < 0,7 \text{ m}$, was Geschwindigkeiten der Gemischabflüsse zwischen $1,72 \text{ m/s}$ und $10,54 \text{ m/s}$ ergab. Aus insgesamt 59 Experimenten resultiert für die mittlere Konzentration C die empirische Beziehung

$$(55) \quad C = 1 - \frac{1}{0,02(Bou_w - 6)^{3/2} + 1},$$

woraus sich unmittelbar die *untere Grenze der Luftaufnahme* zu $Bou_w(C=0) = Bou_{w0} = 6$ ergibt. Die meisten hydraulischen Versuche sind für Teillösungen zwischen $0,25 < h/D < 0,65$ ausgeführt worden. Nimmt man als Mittelwert rund $h/D = 0,4$, so ergibt sich nach Bild 10 für $Fr \approx 0,85Bou$. Eine genaue Umrechnung lässt sich einfach mit den beiden Bildern 10 und 11 ausführen.

Volkart [36] vergleicht Gleichung (55) mit Messungen anderer Autoren im Rechteckkanal (die sich auf Fr_w beziehen) auf Basis der Boussinesq-Zahl, ohne sie vorher entsprechend umzurechnen. Wie oben gezeigt, ist dieses Verfahren lediglich für sehr geringe Abflusstiefen gültig. Eine Umrechnung der Messwerte Volkarts auf die Froude-Zahl bestätigt jedoch, dass im teilgefüllten Kreisprofil geringere Luftkonzentrationen als im Rechteckprofil unter derselben Froude-Zahl Fr_w zu erwarten sind.

Neben (55) findet *Volkart* experimentell als Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$(56) \quad V_g/V_w = 1 - C^2,$$

sowie für das Verhältnis der benetzten Flächen des Gemischen zu derjenigen von Reinwasser

$$(57) \quad F_g/F_w = 1 - 2 \cdot \ln(1 - C).$$

Bou_w lässt sich nun folgendermassen schreiben

$$(58) \quad Bou_w = \frac{V_w}{\sqrt{gR_w}} = \frac{K \sqrt{J_s} \cdot R_w^{2/3}}{\sqrt{gR_w}} = \frac{K \sqrt{J_s} \cdot D^{1/6}}{\sqrt{g}} (R_w/D)^{1/6}$$

oder

$$(59) \quad Bou_w = \propto \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sin \varepsilon_w \cos \varepsilon_w}{\varepsilon_w} \right) \right\}^{1/6}$$

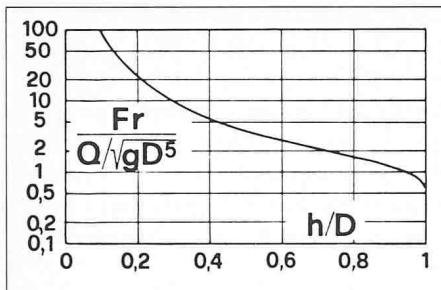
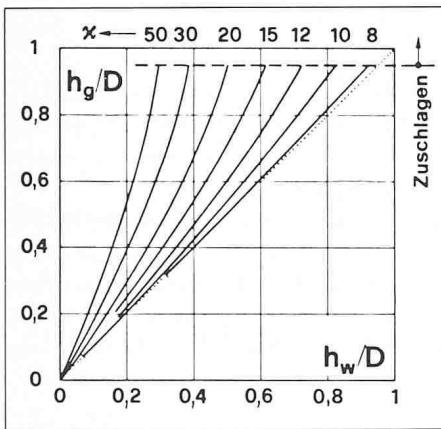


Bild 11. Halblogarithmische Darstellung der reduzierten Froude-Zahl $Fr/(Q/\sqrt{gD^5})$ in Abhängigkeit der Teilfüllung h/D im Kreisprofil nach (15)

Bild 12. Relative Gemischabflusstiefe h_g/D in Abhängigkeit der relativen Abflusstiefe für Reinwasser h_w/D und der Kanalcharakteristik $\chi = K\sqrt{J_s D^{1/6}} / \sqrt{g}$ für teilgefüllte Kreisprofile



mit $\chi = K\sqrt{J_s} D^{1/6} / \sqrt{g}$. Eliminiert man aus (55) und (57) C , so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Abflusstiefen h_g/D , h_w/D und der Kanalcharakteristik χ . Diese in Bild 12 ausgewertete Relation erlaubt die unmittelbare Bestimmung der Gemischabflusstiefe h_g .

Nach Volkart bedeutet $Bou=6$ den Beginn der Luftaufnahme; aus Bild 12 geht jedoch hervor, dass $\chi \approx 8$ denselben Übergangsbereich festhält. Im Gegensatz zur Boussinesq-Zahl ist χ unmittelbar zu berechnen, anhand des Gefälles J_s , der Rauhigkeit K und des Durchmessers D kann deshalb abgeschätzt werden, ob sich eine Luftaufnahme einstellen wird. Da die üblichen Rohrdurchmesser im Bereich $0,2 \leq D \leq 3,0$ m zu finden sind, kann der Einfluss von $D^{1/6}$ weitgehend unterdrückt werden ($0,2^{1/2} = 0,77$, $3^{1/6} = 1,2$). Nimmt man als Mittelwert $D = 1$ m an, so vereinfacht sich das neue Kriterium auf $(K\sqrt{J_s})_t = 25$, wobei K in $m^{1/3}/s$ einzusetzen ist und « t » auf den Übergang von unbelüftetem zu belüftetem Abfluss hindeutet. Betrachtet man den häufigen Fall eines Rohres mit einer Rauhigkeit $K = 85 m^{1/3}/s$, so ergibt sich für das Übergangsgefälle rund $J_{s,t} = 10\%$.

Mit Hilfe von $\chi_t = 8$ lassen sich noch weitere «Faustformeln» aufstellen. Für hohe Teillösungen $h_N/D > 1/2$ gelten nach Bild 2 die Approximationen $V_N \approx V_v$ und $Q_N \approx Q_v$, wobei Index v den Vollfüllungszustand bezeichnet. Ersetzt man $(K\sqrt{J_s})$ in χ_t durch die Vollfüllungsgeschwindigkeit $V_v = K\sqrt{J_s}(D/4)^{2/3}$, so entsteht für

$$(60) \quad V_t = 10\sqrt{D}, \quad D(m),$$

eine Beziehung, die von Volkart schon experimentell gefunden wurde. Für den Durchfluss ergibt sich analog

$$(61) \quad Q_t = 7,8\sqrt{D^5}, \quad D(m),$$

wobei Q_t (m³/s).

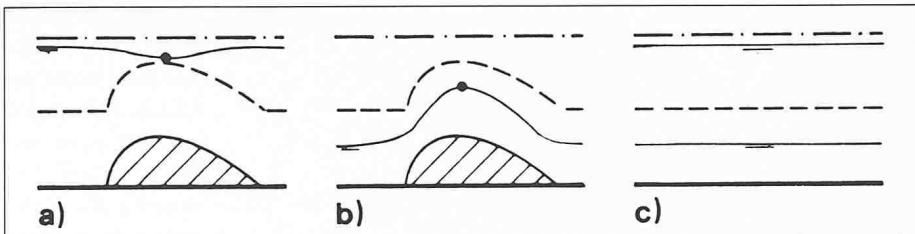
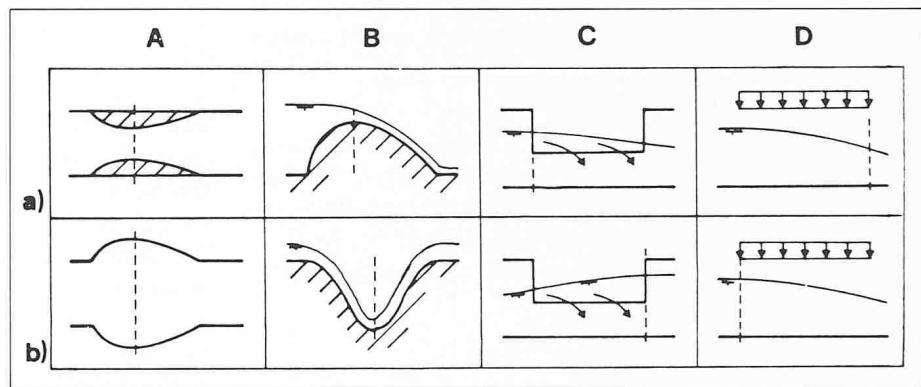


Bild 13. Abfluss über einen wehrförmigen Körper im prismatischen Kanal. Untersuchung der Energiehöhe im Scheitelquerschnitt falls $h'=0$ (Wasserspiegel parallel zur Kanalsohle) a) $Fr < 1$, $h'' > 0$ entspricht $H_s = H_{*,min}$; b) $Fr > 1$, $h'' < 0$ entspricht $H_s = H_{*,min}$; c) $Fr \geq 1$, $h'' = 0$ entspricht $H_s = H_{*,neu}$. Gestrichelt ist der Verlauf der kritischen Abflusstiefe, ausgezogen der Wasserspiegel und strich-punktiert die Energiedlinie H eingetragen.

Bild 14. Anordnungen, in denen sich a) ein kritischer Abfluss einstellen kann ($Fr=1$) und b) in denen sich lediglich ein relatives Energiedminimum ausbilden kann: A Querschnittsvariation, B Sohlenvariation, C Durchflussabnahme und D Durchflusszunahme



Beispiel

Gegeben ein Bemessungsdurchfluss von $Q = 2,5 \text{ m}^3/\text{s}$, der unter einem Gefälle von $J_s = 25\%$ und mit einem Rohr der Rauhigkeit von $K = 85 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ unter Normalabflusszustand abgeleitet werden soll. Welches sind die hydraulischen Abflusskenngrößen?

Unter Vollfüllung ergibt sich für den Durchmesser $D_v = \{4^{5/3} Q / (\pi K \sqrt{J_s})\}^{3/8} = 0,535 \text{ m}$. Um keine Abflussinstabilitäten infolge Zuschlägen zu erhalten, wählt man für $D = 0,7 \text{ m}$. Der zugehörige Abfluss unter Vollfüllung beträgt dann $Q_v = 5,12 \text{ m}^3/\text{s}$, womit nach Bild 2 $h_N/D = 0,485$ ($Q/N = Q_v = 0,488$), also $h_N = h_w = 0,340 \text{ m}$. Der Parameter χ ergibt sich zu $\chi = 85/\sqrt{0,25}(0,7)^{1/6}/\sqrt{9,81} = 12,8$, weshalb mit Luftaufnahme zu rechnen ist ($\chi > \chi_t = 8$). Mit $h_w/D = 0,34/0,7 = 0,486$ und Bild 12 folgt für $h_g/D = 0,61$, also $h_g = 0,61 \cdot 0,7 = 0,43 \text{ m}$.

Nach der Berechnungsmethode von Volkart ergibt sich als Luftbeiwert $f_L = 1,5$, also $Q_g = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75 \text{ m}^3/\text{s}$. Nach Fig. 2 resultiert für $Q_g/Q_v = 3,75/5,12 = 0,73$ die Abflusstiefe $h_g/D = 0,62$, womit $h_g = 0,43 \text{ m}$.

Nach Bild 11 ergibt sich mit $h_w/D = 0,485$ für $Fr_w/(Q/\sqrt{gD^5}) = 4$, also $Fr_w = 7,8$; mit Bild 10 ergibt sich anschließend für das Verhältnis $Fr_w/Bou_w = 0,8$, also $Bou_w = Fr_w/0,8 = 9,75$. Nach Beziehung (55) folgt dann $C = 0,127$. Mit (7) ergibt sich für die benetzte Fläche $F_w = 0,186 \text{ m}^2$, also $V_w = Q_w/F_w = 2,5/0,186 = 13,5 \text{ m/s}$, womit $V_g = 13,5(1 - 0,127^2) = 13,25 \text{ m/s}$ nach (56).

Als wesentliche Schlussfolgerungen der Untersuchung über den Lufteintrag in Abflüsse in Rechteck- und Kreisprofile lassen sich anführen:

- In beiden Fällen gestattet eine geeignete graphische Auswertung der Versuchsresultate eine unmittelbare Bestimmung der Gemischabflusstiefen,
- Im Rechteckprofil tritt die Kennzahl $\eta = (h_w K^2 \sin^3 \omega / g^3)^{1/4}$ als wichtiger Bemessungsparameter auf, im Kreisprofil

spielt die analoge Grösse $\chi = K\sqrt{J_s}D^{1/6} / \sqrt{g}$ einen vergleichbaren Einfluss auf den Selbstbelüftungsvorgang.

Im Kreisprofil tritt für $\chi < 8$ keine nennenswerte Belüftung auf.

7. Zusammenfassung

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit den wichtigsten Eigenschaften von Freispiegelabflüssen. Spezielle Aufmerksamkeit wird dem Rechteck- und Kreisprofil gewidmet, die wichtigsten Resultate sind unmittelbar aus graphischen Darstellungen zu entnehmen. Die folgenden Schlussfolgerungen scheinen angebracht:

1. *Normalabfluss* stellt sich nur nach extrem langer Fliessdistanz ein, auf welcher sämtliche Abflussparameter keine Änderung erfahren; das Fliessgesetz von Strickler genügt meistens den Genauigkeitsanforderungen der Praxis, seine Verallgemeinerung lässt sich zur Berechnung des Wandreibungsgradienten beliebiger Abflüsse näherungsweise anwenden.
2. *Kritischer Abfluss* lässt sich lediglich durch Variation der Sohlengeometrie, des Querschnitts des Kanals oder durch Variation des Durchflusses erzeugen. Da kritischer Abfluss normalerweise beträchtlich geneigte und gekrümmte Stromlinien hervorruft, kann die Abflusstheorie mit hydrostatischer Druckverteilung nur beschränkt angewandt werden.
3. Die Anwendung des Impulssatzes in Fliessrichtung ergibt einen Ausdruck für die *konjugierten Abflusstiefen*, also der Tiefen vor und nach dem Wassersprung. Dagegen gelingt es bis heute nur beschränkt, Angaben über den internen Abflussvorgang eines Wassersprungs zu machen.
4. *Stau- und Senkungskurven* entsprechen im allgemeinen der linienförmigen Darstellung der Wasseroberfläche von stetig-veränderlichen Abflüssen. Der Spezialfall des präzistischen Kanals mit konstanter Sohlenneigung und unveränderlichem Durchfluss wird einer genaueren Analyse unterzogen.
5. Die meisten Angaben über die *Zweiphasenströmung Wasser-Luft* sind experimenteller Natur. Bis heute ist deshalb noch nicht restlos geklärt, welche Kennzahlen den Luftaufnahme-Mechanismus beeinflussen. Die Ausführungen bezüglich des Rechteckprofils beziehen sich auf die Froude-Zahl, diejenigen bezüglich des Kreisprofils auf die Boussinesq-Zahl.

Anhang I

Kritischer Abfluss im Rechteckkanal

Nach Beziehung (8) gilt für die auf einen bestimmten Querschnitt an der Stelle x_0 bezogene Energiehöhe

$$(A) \quad H_* = h + \frac{Q^2}{2gB^2h^2}$$

wobei Index $*$ nicht wiederholt wird. Darnach ist H_* lediglich abhängig von der Wassertiefe h , $H_*(h)$. Es soll in der Folge untersucht werden, unter welchen Bedingungen H_* ein Mini-

Literatur

- [1] Abbott, M. B., Petersen, H. M., and Skovgaard, O., «On the numerical modelling of short waves in shallow water», J. Hydraulic Research, Vol. 16, 1978, pp. 173–204.
- [2] Bock, J., «Einfluss der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne», Tech. Bericht Nr. 2, Inst. Hydraulik und Hydrologie, TH Darmstadt, 1974.
- [3] Chow, V. T., «Open Channel Hydraulics», McGraw-Hill, New York, 1959.
- [4] Cunge, J. A., Holly, F. M., Verwey, A., «Practical aspects of computational river hydraulics», Pitman, Boston, London, 1980.
- [5] Dallwig, H. J., «Fliessformeln und Formbeiwerte», Tech. Bericht Nr. 12, Inst. Hydraulik und Hydrologie, TH Darmstadt, 1974.
- [6] Forcheimer, P., «Hydraulik», Teubner, Leipzig und Berlin, 1914.
- [7] Gangadhariah, T., Rao, N. S. L., Seetharaniah, K., «Inception and entrainment in self-aerated flows», Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 96, HY7, 1970, pp. 1549–1565.
- [8] Hager, W. H., «Stau- und Senkungskurven im Kanalbau», GWA, Vol. 61, 1981, pp. 157–167; p.
- [9] Hager, W. H., «Die Hydraulik von Verteilkanälen», Diss. ETHZ, Nr. 6948, Vol. 1 und 2, Zürich, 1981.
- [10] Hager, W. H., «Geschwindigkeits-, Pegel- und Durchflussmessgerät für die Abwassertechnik», GWA, Vol. 63, 1983, pp. 57–58.
- [11] Hager, W. H., Hutter, K., «Approximate treatment of the plane hydraulic jump with separation zone above the flow zone», J. Hydraulic Research, Vol. 21, 1983, pp. 195–204.
- [12] Hager, W. H., «Open channel hydraulics of flows with increasing discharge», J. Hydraulic Research, Vol. 21, 1983, pp. 177–194.
- [13] Hager, W. H., «Normalabflusstiefe, kritische Tiefe und konjugierte Tiefen in der Hydraulik offener Gerinne», SIA, Vol. 102, 1984, pp. 322–326.
- [14] Hager, W. H., «On the plane free overfall», Proc. ASCE, J. Hydraulic Engineering, Vol. 109, HY12, 1983, pp. 1683–1697.
- [15] Hager, W. H., Hutter, K., «Approximate treatment of plane channel flow», ACTA MECHANICA, Vol. 51, 1984, pp. 31–48.
- [16] Hager, W. H., Hutter, K., «On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics», ACTA MECHANICA, Vol. 53, 1984, pp. 183–200.
- [17] Hager, W. H., Sinniger, R., «Flow characteristics of the hydraulic jump in a stilling basin with an abrupt bottom rise», J. Hydraulic Res. 23 (1985) 2, pp. 101–113.
- [18] Haindl, K., «Hydraulic jumps in closed conduits», 7th IAHR Congress, Lisboa, 1957, Vol. 2, D32, pp. 1–13.
- [19] Henderson, F. M., «Open channel flow», MacMillan, New York, 1966.
- [20] Hörlér, A., «Gefäßwechsel in der Kanalisationstechnik bei Kreisprofilen», Schw. Zeitschrift für Hydrologie, Vol. 29, 1967, Fasc. 2.
- [21] Jaeger, C., «Hydraulik», Birkhäuser, Basel, 1949.
- [22] Kindsater, C. E., «Hydraulic jumps in enclosed conduits», Diss. State University of Iowa, 1936; Auszüge in Silvester, R., «Hydraulic jump in all shapes of horizontal channels», Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 90, HY1, 1964, pp. 23–55; HY4, pp. 339–358; HY5, pp. 177–186; HY6, pp. 265–268.
- [23] Mahmood, K., Yevjevich, V., «Unsteady flows in open channels», Vol. 1 und 2, Water Resources Publications, Fort Collins, Col., USA, 1975.
- [24] Marchi, E., «Il movimento uniforme nelle correnti a pelo libero», La Ricerca Scientifica, Vol. 26, 1956, pp. 2448–2473.
- [25] Marchi, E., «Esperienze di moto uniforme su correnti a pelo libero in modelli di canali artificialmente scabri», V. Convegno di Idraulica, Torino, 1957.
- [26] Marchi, E., «Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali», La Ricerca Scientifica, Vol. 29, 1959, pp. 2564–2575.
- [27] Marchi, E., Rubatta, A., «Meccanica dei fluidi», UTET, Torino, 1981.
- [28] Munz, W., «Die Formel von Prandtl-Colebrook und die Kanalisationstechnik», SBZ, Vol. 91, 1973, pp. 175–178.
- [29] Pinto, de, N. L., Neidert, S. H., «Evaluating entrained air flow through aerators», Water Power, Vol. 36, 1983, pp. 40–42.
- [30] Rao, N. S. L., Seetharaniah, K., Gangadhariah, T., «Characteristics of self-aerated flows», Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 96, 1970, HY2, pp. 331–355; HY12, pp. 2622–2627; Vol. 97, 1971, p. 2077.
- [31] Rao, N. S. L., Gangadhariah, T., «Self-aerated flow characteristics in wall region», Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 97, 1971, HY9, pp. 1285–1303.
- [32] Sauerbrey, M., «Abfluss in Entwässerungsleitungen», Wasser und Abwasser in Forschung und Praxis, I. Inst. Wasserversorgung, Abwasserbeseitigung und Städtebauwesen, TH Darmstadt, E. Schmidt-Verlag, 1969.
- [33] Schröder, R., Press, H., «Hydromechanik im Wasserbau», Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München, 1966.
- [34] Strickler, A., «Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen», Mittl. des Amtes für Wasserwirtschaft, Nr. 16, Bern 1923.
- [35] Thandaveswara, B. S., Rao, N. S. L., «Developing zone characteristics in aerated flows», Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 104, 1978, HY3, pp. 385–396; Vol. 105, 1979, HY3, pp. 279–281; HY11, pp. 1451–1452.
- [36] Volkart, P., «Hydraulische Bemessung steiler Kanalisationssleitungen unter Berücksichtigung der Luftaufnahme», Mittl. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, VAW, Nr. 30, ETH Zürich, Prof. D. Vischer, Zürich 1978.
- [37] Yen, B. C., «Open channel flow equations revisited», Proc. ASCE, J. Engineering Mechanics Division, Vol. 99, 1973, EM5, pp. 979–1009; Vol. 100, 1974, EM5, pp. 1055–1060; Vol. 101, EM4, pp. 485–488.

rum ($\partial^2 H_*/\partial h^2 > 0$), ein Maxmimum ($\partial^2 H_*/\partial h^2 < 0$) oder ein neutraler Punkt ($\partial^2 H_*/\partial h^2 = 0$) darstellt. Mit

$$(B) \quad \frac{\partial H_*}{\partial h} = 1 - \frac{Q^2}{gB^2h^3} = 0$$

folgt unter Berücksichtigung der kritischen Bedingung (B)

$$(C) \quad \frac{\partial^2 H_*}{\partial h^2} = \frac{3Q^2}{gB^2h^4} = \frac{3}{h} > 0, \quad h > 0.$$

$Fr = 1$ erzeugt demnach *immer* eine minimale Energiehöhe $H_* = H_{*,\min}$.

Betrachtet man nun die Ableitung von Gl. (A) nach x ,

$$(D) \quad \frac{\partial H_*}{\partial x} = h' (1 - Fr^2) = 0$$

für $Fr \neq 1$ und $h' = 0$, so folgt

$$(E) \quad \frac{\partial^2 H_*}{\partial x^2} = h'' (1 - Fr^2) + \frac{3Q^2h'^2}{gB^2h^4} = h'' (1 - Fr^2)$$

Für $Fr < 1$ und $h'' < 0$ ($h'' > 0$) ergibt sich demnach ein Maximum (Minimum) und für $Fr > 1$ und $h'' < 0$ ($h'' > 0$) folgt ein Minimum (Maximum) in H_* . Für $h'' = 0$ ergibt sich schliesslich ein neutraler Punkt. Diese drei Fälle sind in Bild 13 für den Abfluss über eine variable Sohle (wehrförmiger Körper) dargestellt. Man stellt fest, dass die beiden Fälle $Fr < 1$, $h'' < 0$ und $Fr > 1$, $h'' > 0$ physikalisch nicht realisierbar sind. Demnach entspricht die relative Energiehöhe H_* im Scheitel des Wehres entweder einem relativen Minimum (Fälle a, b)) oder einem neutralen Wert (Fall c)). Dieses relative Energieminimum ist jedoch für $Fr \neq 1$ *immer* kleiner als die kritische Energie. Der Fall $h' = 0$, $Fr \neq 1$ lässt sich somit im Zusammenhang mit kritischem Abfluss ausschliessen. Analoge Resultate ergeben sich ebenfalls für Querschnitts- und Durchfluss-Variation.

Gleichung (10) entspricht der Bedingung für eine minimale Energiehöhe im Rechteckkanal, $Fr = 1$, unter der Zusatzforderung (12)

$$(F) \quad z' + \frac{QQ'}{gB^2h^2} - \frac{Q^2B'}{gB^3h^2} = 0.$$

Es soll nun weiter untersucht werden, unter welchen Gegebenheiten sich kritischer Abfluss überhaupt einstellen kann. Dazu betrachten wir die Energiehöhe $H = H(x)$ und bilden mit Hilfe von (10)

$$(G) \quad \begin{aligned} H'' = z'' + h'' (1 - Fr^2) + \frac{Q'^2}{gB^2h^2} + \frac{QQ''}{gB^2h^2} - \\ - \frac{4QQ'B'}{gB^3h^2} - \frac{4QQ'h'}{gB^2h^3} - \frac{Q^2B''}{gB^3h^2} + \\ + \frac{3Q^2B'^2}{gB^4h^2} + \frac{4Q^2B'h'}{gB^3h^3} + \frac{3Q^2h'^2}{gB^2h^4} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man darin die Bedingung für kritischen Abfluss ein, $Q^2 = gB^2h^3$, so folgt

$$(H) \quad \begin{aligned} z'' + \frac{Q'^2}{gB^2h^2} + \frac{Q'h'}{h} - \frac{4QQ'B'}{gB^3h^2} - \frac{4QQ'h'}{gB^2h^3} - \frac{hB''}{B} + \\ + \frac{3B^2h}{B^2} + \frac{4B'h'}{B} + \frac{3h'^2}{h} = 0. \end{aligned}$$

Nach (F) muss die Summe der Gradienten in z' , B' und Q' *simultan* mit der Forderung $Fr - 1 = 0$ verschwinden. Als

wichtigen Spezialfall betrachten wir $z' = Q' = B' = 0$, womit (F) identisch erfüllt ist. Für die allgemeine Diskussion verweisen wir auf /9/, der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den angegebenen Spezialfall. Dieser bezieht sich somit auf ein Wehr im prismatischen Kanal, einen Venturikanal mit horizontaler Sohle oder auf einen prismatischen Sammel- oder Verteilkanal mit horizontalem Boden.

Setzt man die Zusatzforderung in (H) ein, so entsteht

$$(I) \quad z'' + \frac{Q''h}{Q} - \frac{hB''}{B} + \frac{3h'^2}{h} = 0$$

womit

$$(J) \quad h' = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{h^2 B''}{B} - h z'' - \frac{h^2 Q''}{Q} \right)}.$$

Für einen Venturikanal mit $z' \equiv 0$ und $Q' \equiv 0$ ergibt sich demnach für die Wasserspiegelneigung im kritischen Querschnitt

$$(K. 1) \quad h_k = \pm \sqrt{\frac{h_k^2 B_k''}{3 B_k}},$$

wobei sich zeigen lässt /9/, dass das positive (negative) Vorzeichen einem Fliesswechsel Schiessen-Strömen (Strömen-Schiessen) entspricht. Infolge der Annahme einer Potentialströmung ($H' \equiv 0$) lässt sich (K. 1) lediglich auf den zweiten Fliesswechsel anwenden.

Analog zu (K. 1) gilt im Falle $B' \equiv 0$ (prismatischer Kanal) und $Q' \equiv 0$ (konstanter Durchfluss)

$$(K. 2) \quad h_k = \pm \sqrt{\frac{-h_k z_k''}{3}}$$

und für $z' \equiv 0$ und $B' \equiv 0$

$$(K. 3) \quad h_k = \pm \sqrt{\frac{h_k^2 Q_k''}{3 Q_k}},$$

wobei auch für diese Fälle lediglich das negative Vorzeichen physikalische Relevanz besitzt. Kritische Abflüsse stellen sich demnach ein, falls

- $B'' > 0$ (mit $z' = z'' = 0$ und $Q' = Q'' = 0$), also in Querschnittsverengungen mit dem kritischen Querschnitt an der engsten Stelle ($B' = 0$),
- $z'' < 0$ (mit $B' = B'' = 0$ und $Q' = Q'' = 0$), also in Sohlenerhebungen mit dem kritischen Querschnitt an der höchsten Stelle ($z' = 0$),
- $Q'' < 0$ (mit $z' = 0$ und $B' = B'' = 0$), also in Kanälen mit variablem Durchfluss, mit dem kritischen Querschnitt im Einlauf ($Q' = 0$, $Q'' < 0$) für Verteilkanäle, oder im Auslauf ($Q' = 0$, $Q'' < 0$) für Sammelkanäle. Diese vier möglichen Fälle von kritischen Querschnitten und ihre Gegenstücke sind in Bild 14 dargestellt.

Natürlich lassen sich auch Kombinationen der erwähnten Grundtypen behandeln, so beispielsweise A und C /9/, A und D /12/ oder auch A und B nach Bild 14. Weiterhin lassen sich diese Resultate in analoger Weise und mit entsprechenden Resultaten auf beliebige Querschnitte anwenden.

Adresse des Verfassers: Dr. sc. techn. W. H. Hager, dipl. Bauing. ETH, Chaire de Constructions Hydrauliques CCH, Génie Civil GC, EPFL Lausanne, CH-1015 Lausanne.

Verdankungen

Der Verfasser möchte sich bei den Herren Prof. R. Sinniger, EPFL, Lausanne, K. Hager, Bauing. HTL, und H. Weyermann, Bauing. HTL, freundlich für die wertvollen Anregungen bedanken.