

Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 101 (1983)
Heft: 6: Prof. Dr. Bruno Thürlimann zum 60. Geburtstag

Artikel: Über den Einfluss von Rissen beim Rammen von Pfählen
Autor: Bouma, A.L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-75058>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Einfluss von Rissen beim Rammen von Pfählen

Von A. L. Bouma, Delft

Im Beitrag wird das dynamische Spannungs- und Verformungsverhalten von Stahlbetonpfählen beim Rammen unter besonderer Berücksichtigung der Rissbildung untersucht. Zuerst wird anhand eines Federnmodells eine Analyse durchgeführt, wobei auch theoretische Grundlagen ausführlich erläutert sind. Darauf folgen eine Diskussion der Ergebnisse dieser Analyse und die Erläuterung weiterer, bei der Idealisierung zuvor vernachlässigter Einflussfaktoren.

The article investigates the dynamic stress and deformation behavior of reinforced concrete piles under the action of ramming with particular interest in the development of cracks. Firstly, an analysis is carried out using a spring model, in which the basic theoretical aspects are explained in detail. This is followed by a discussion of the results of this analysis and the explanation of further influencing factors which in idealizing this problem have been neglected.

Einführung

Die Kunst, Pfähle zu rammen, ist in Holland schon sehr alt. Insbesondere wichtig ist sie für die Gründung von Gebäuden und Brücken sowie von Wasserbauten wie Schleusen, Wehren u.s.w.. Es ist wohl bekannt, dass die Stadt Amsterdam auf Pfählen gegründet ist (Bild 1). Früher, und z.T. auch heute noch, verwendete man hölzerne Pfähle mit einer Tragsfähigkeit von 10 Tonnen. In den letzten Jahrzehnten wurden jedoch immer mehr vorgefertigte Pfähle in bewehrtem oder vorgespanntem Beton mit einer Tragfähigkeit bis zu 200 Tonnen verwendet.

Ein sehr wichtiges Phänomen ist das Entstehen von Rissen während des Rammens. Um dieses Phänomen zu verstehen, müssen wir die Fortpflanzung von Spannungswellen in einem Pfahl analysieren. Hierzu betrachten wir Bild 2. Ein Stoß am oberen Ende des Pfahls verursacht eine

Druckwelle von einer gewissen Länge, die mit einer Geschwindigkeit c nach unten läuft. In dieser Druckwelle ist auch die Geschwindigkeit v der materiellen Punkte nach unten gerichtet. Nach einiger Zeit wird die Welle am unteren Ende des Pfahls reflektiert.

Wenn dieses Ende fest ist und somit keine Verschiebung zulässt (Bild 2), wird die reflektierte Welle ebenfalls eine Druckwelle sein. Dies bedeutet, dass sich die Druckspannungen am Ende des Pfahls während einer kurzen Periode verdoppeln und dass die Geschwindigkeit der materiellen Punkte in der nach oben laufenden Druckwelle ebenfalls nach oben gerichtet ist.

Wenn das Unterende des Pfahls frei ist (Bild 3), können an diesem Ende auch keine Spannungen auftreten. In diesem Fall werden Verschiebung und Geschwindigkeit verdoppelt. In der reflektierten Welle ist die Geschwindigkeit der materiellen Punkte deshalb nach unten

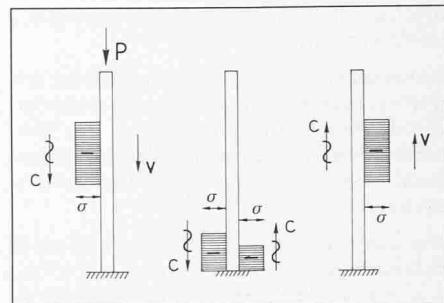


Bild 2. Reflexion einer Druckwelle an einem festen Ende

gerichtet und die reflektierte Welle ist eine Zugwelle.

Dieses letzte Phänomen kann während des Rammens auftreten, wenn der Widerstand einer Bodenschicht plötzlich nachlässt. Die Zugwellen können dann leicht Risse im Beton verursachen, weil dessen Zugfestigkeit nur ein Bruchteil der Druckfestigkeit ist. Das Phänomen kann sich mit jedem Schlag wiederholen, was zu vielen über die Pfahlänge verteilten Rissen führt.

Man kann sich weiter fragen, ob nach dem Entstehen eines Risses auch die Bewehrung oder die Vorspannung beschädigt oder sogar gebrochen ist. Infolge des Entstehens von Rissen können die Stahlspannungen sehr hoch werden, sodass der erforderliche Bewehrungsquerschnitt tatsächlich durch diese Spannungen bestimmt wird. Die Frage ist also wichtig. In der Praxis ist man früher öfters überrascht worden durch eine gebrochene Bewehrung, was zu mehr oder weniger empirisch bestimmten Regeln für die notwendige Bewehrung geführt hat.

Im folgenden wird versucht, eine möglichst einfache Analyse des Spannungsproblems zu geben, um einen Einblick in das Phänomen zu vermitteln.

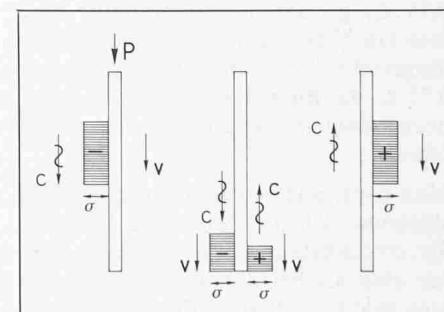


Bild 3. Reflexion einer Druckwelle an einem freien Ende

Bild 4. Ein homogener Stab. Bezeichnungen

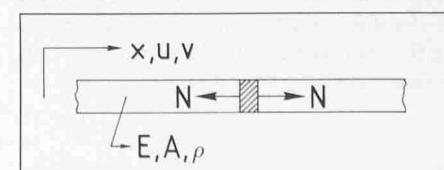
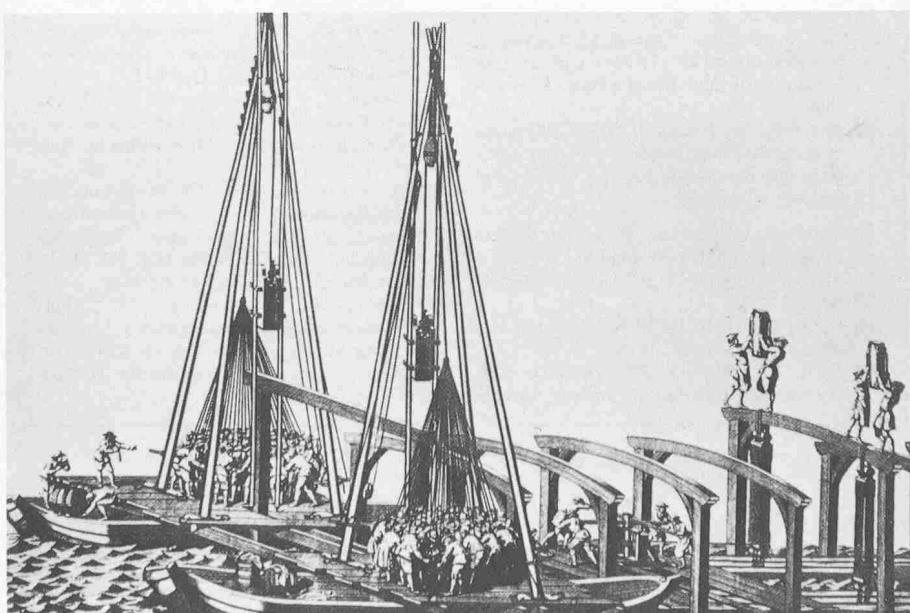


Bild 1. Rammen im 17. Jahrhundert



Theoretische Grundlagen

Unser Ausgangspunkt ist die bekannte Gleichung für eine longitudinale Welle in einem homogenen Stab (Bild 4):

$$(1) \quad \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \dots (1) \text{ mit } c^2 = \frac{E}{\rho}$$

Hierin ist:

- u = Verschiebung in Richtung der x-Koordinate
- t = Zeit
- c = Fortpflanzungsgeschwindigkeit
- E = Elastizitätsmodul
- ρ = Dichte des Baustoffs

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet bekanntlich:

$$(2) \quad u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Hierin stellt die erste Funktion im rechten Glied eine nach rechts – in der positiven x-Richtung – laufende Welle dar, die zweite Funktion eine nach links – in der negativen x-Richtung – laufende Welle.

Für die Geschwindigkeit v der materiellen Punkte finden wir:

$$(3) \quad v = \frac{\delta u}{\delta t} = -cf'_1(x - ct) + cf'_2(x + ct)$$

Mit dem Strich wird hier die abgeleitete Funktion angedeutet. Wie bekannt, gilt für die Dehnung ε :

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{\delta u}{\delta x}$$

Wird der Querschnitt mit A bezeichnet, dann finden wir für die Schnittkraft N :

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{\delta u}{\delta x} =$$

$$(5) \quad = EAf'_1(x - ct) + EAf'_2(x + ct)$$

Eine Gegenüberstellung der Gleichungen (3) und (5) führt für die nach rechts laufende Welle zu der Beziehung:

$$\frac{N}{EA} = -\frac{v}{c} \text{ oder:}$$

$$(6) \quad N = -Zv \text{ mit } Z = \frac{EA}{c}$$

und für die nach links laufende Welle zu:

$$(7) \quad \frac{N}{EA} = -\frac{v}{c} \text{ oder: } N = Zv$$

Die Grösse Z wird Impedanz genannt. Diese linearen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit v und der Schnittkraft N erlauben eine einfache Lösung unseres Problems. Die Gleichungen (6) und (7) sind analog zu den Gleichungen für einen viskosen Dämpfer, für den ebenfalls eine lineare Beziehung zwischen der ausgeübten Kraft und der Geschwindigkeit besteht.

Ein bewehrter Betonpfahl ist zusammengesetzt aus zwei Baustoffen: Stahl und Beton. Werden die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einander gleichgesetzt, dann können die Impedanzen des Stahl- und Betonquerschnittes addiert werden. Weil der Stahlquerschnitt klein ist im Vergleich zum Betonquerschnitt (in der Grössenordnung von 1%), ist dieses Verfahren durchaus erlaubt.

Bei einem Riss tritt jedoch eine plötzliche Änderung auf: der Betonquerschnitt wird unterbrochen, nur die Stahlstäbe gehen weiter. Dies führt zu einer Änderung der Impedanz, wodurch an der Bruchfläche die Welle zum Teil reflektiert wird. Um unser Problem zu analysieren, brauchen wir deshalb die Gesetze für die Reflexion und Refraktion von Wellen bei einem plötzlichen Übergang. Wir sehen uns dazu Bild 5 an.

Zwei Betonstäbe mit Impedanz Z_b sind verbunden durch einen Stahlstab mit Impedanz Z_s . Von links kommt eine Welle, angedeutet mit u_A . Beim Übergang zwischen Beton und Stahl wird eine Welle reflektiert, angedeutet mit u_B und eine Welle durchgelassen, angedeutet mit u_C . Beim Übergang an der rechten Seite wird wiederum eine Welle reflektiert, angedeutet mit u_D und eine Welle durchgelassen, angedeutet mit u_E .

Den Verschiebungen u entsprechen Geschwindigkeiten v und Schnittkräfte N . Zwischen diesen beiden bestehen die Beziehungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} N_A &= -Z_b v_A & N_B &= Z_b v_B \\ N_C &= -Z_s v_C & N_D &= Z_s v_D & N_E &= -Z_b v_E \end{aligned}$$

Aus der Kompatibilität geht hervor, dass:

$$u_A + u_B = u_C$$

oder auch:

$$(9) \quad v_A + v_B = v_C$$

Aus dem Gleichgewicht beim Übergang folgt (Bild 5):

$$(10) \quad N_A + N_B = N_C$$

Mit den Beziehungen aus (8) folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$(11) \quad v_B = \frac{Z_b - Z_s}{Z_b + Z_s} v_A$$

$$(12) \quad v_C = \frac{2Z_b}{Z_b + Z_s} v_A$$

$$N_B = \frac{Z_b(Z_b - Z_s)}{Z_b + Z_s} v_A =$$

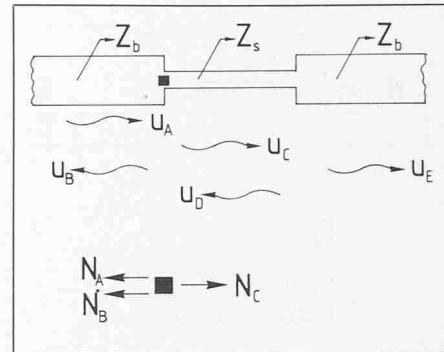


Bild 5. Schema von zwei Betonstäben, verbunden durch einen Stahlstab

$$(13) \quad = -\frac{Z_b - Z_s}{Z_b + Z_s} N_A$$

$$N_C = -\frac{2 Z_b Z_s}{Z_b + Z_s} v_A =$$

$$(14) \quad = \frac{2 Z_s}{Z_b + Z_s} N_A$$

Die Phänomene der Reflexion an einem fixierten Ende (Bild 2) und an einem freien Ende (Bild 3) folgen aus diesen Formeln, wenn Z_s gleich Unendlich beziehungsweise gleich Null gesetzt wird.

Im folgenden interessiert uns besonders die durchgelassene Schnittkraft N_C (14)

Am rechten Übergang wird die Welle u_C wieder teilweise reflektiert. Die Formeln lassen sich gleich aufstellen wie früher, und hieraus geht insbesondere die an dieser Seite reflektierte Kraft N_D hervor:

$$(15) \quad N_D = \frac{Z_b - Z_s}{Z_b + Z_s} N_C$$

Diese Formel folgt auch aus (13) durch Vertauschen von Z_b mit Z_s .

Wir können nun folgendes sagen: Wenn eine Spannungswelle in einem Stahlstab mit der Schnittkraft N_C auf einen Betonquerschnitt stösst, gehört zur reflektierten Spannungswelle die Schnittkraft:

$$(16) \quad N_D = r \cdot N_C$$

Der Reflexionskoeffizient r lässt sich berechnen aus:

$$(17) \quad r = \frac{Z_b - Z_s}{Z_b + Z_s}$$

Die Schnittkraft in der Bewehrung

Wenden wir uns jetzt unserem eigentlichen Problem zu (Bild 6). Eine plötzlich am rechten Ende angreifende axiale Kraft F_o einer bestimmten konstanten Grösse und einer bestimmten Zeitdauer (Bild 6b) verursacht in einem Pfahl eine Druckwelle von einer bestimmten Länge

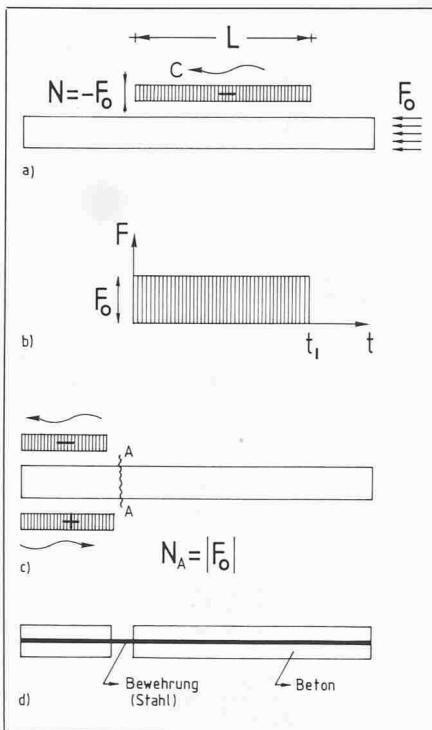


Bild 6. Veranschaulichung des Problems

(Bild 6a), die sich mit einer Geschwindigkeit c nach links fortpflanzt. Wenn das linke Ende als frei betrachtet werden kann, kehrt die Druckwelle als Zugwelle zurück (Bild 6c). Die dazu gehörende Schnittkraft N_A ist gleich der absoluten Grösse von F_0 .

Die Druckwelle wird nicht beeinflusst von eventuellen Rissen. Für die *Zugwelle* gilt das jedoch nicht. Die Situation für einen völlig gerissenen Querschnitt A–A (Bild. 6c) ist in Bild 6d wiedergegeben.

Anhand von Bild 7 analysieren wir, was im Stahlstab passiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass der *Stahlstab starr mit dem Beton* verbunden ist.

Die Zugwelle u_A , die von links kommt, führt im Stahlstab zu einer Zugwelle mit der Schnittkraft (14)

$$(14) \quad N_C = \frac{2Z_s}{Z_b + Z_s} \cdot N_A$$

An der rechten Seite wird diese Welle reflektiert. Es entsteht eine nach links zurücklaufende Zugwelle mit der Schnittkraft rN_C . Diese wird wieder an der linken Seite reflektiert, was eine nach rechts laufende Zugwelle mit Schnittkraft r^2N_C zur Folge hat. Das geht so immer weiter. Und bei einer unbegrenzt grossen Wellenlänge wird die Schnittkraft im Stahlstab schliesslich gleich der Summe S der unendlichen Reihe.

$$(18a) \quad S = N_C [1 + r + r^2 + \dots]$$

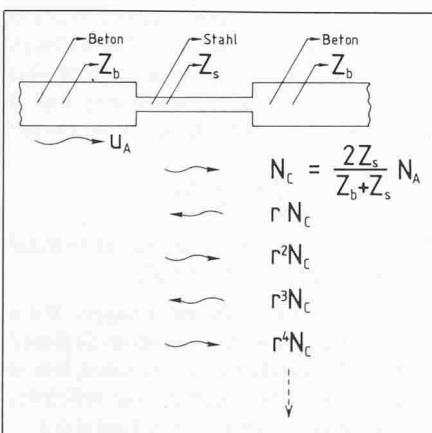
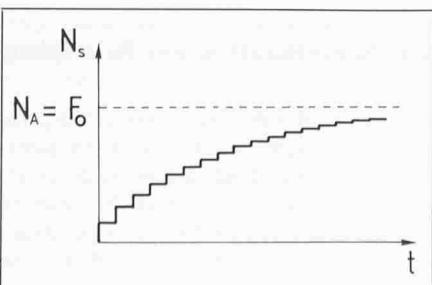
Wie bekannt, ist diese Summe:

$$(18b) \quad S = N_C \frac{1}{1 - r}$$

Substitution von Ausdruck (14) für N_C und Ausdruck (17) für r führt zum Resultat:

$$(19) \quad S = N_A$$

Die Schnittkraft N_s im Stahlstab nähert sich allmählich dem Wert der Schnittkraft N_A der einfallenden Zugwelle. Der Vorgang ist in Bild 8 abgebildet und man sieht hieraus, dass sich der *Stahlstab verhält wie eine Feder*.

Bild 7. Analyse der Kraft N_s im StahlstabBild 8. Das Anwachsen der Kraft N_s im Stahlstab mit der Zeit

Idealisierung durch ein Federmodell

Aufgrund des vorherigen Ergebnisses betrachten wir jetzt ein System, das aus zwei Betonstäben mit der Impedanz Z_b besteht, die durch eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden sind (Bild 9a). Auf die Grösse von k wird später eingegangen.

Wiederum kommt von links eine Zugwelle u_A . Beim Übergang auf die Feder

wird eine Welle u_B reflektiert. Im rechten Betonstab entsteht eine nach rechts laufende Welle u_E .

Diesen Verschiebungen u entsprechen wiederum Geschwindigkeiten v und Schnittkräfte N und wir können die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$(20) \quad N_A = -Z \cdot V_A, \quad N_B = Z \cdot v_B, \\ N_E = -Z \cdot v_E$$

Wir können jetzt den Index b weglassen. Die Befestigungspunkte der Feder werden mit 1 bzw. mit 2 angedeutet. Die Verschiebungen dieser Punkte sind also u_1 und u_2 , und die Geschwindigkeiten sind $v_1 = \dot{u}_1$ und $v_2 = \dot{u}_2$. Mit einem Punkt über den Buchstaben wird die Ableitung nach t angedeutet.

Wir schreiben jetzt die beiden Gleichgewichtsgleichungen hin (Bild 9c):

$$(21) \quad \text{Punkt 1: } N_A + N_B = N_s$$

$$(22) \quad \text{Punkt 2: } N_s = N_E$$

und die beiden Kompatibilitätsgleichungen (Bild 9d):

$$(23) \quad \text{Punkt 1: } v_A + v_B = v_1 = \dot{u}_1$$

$$(24) \quad \text{Punkt 2: } v_2 = \dot{u}_2 = v_E.$$

Wir fügen noch die konstitutive Gleichung der Feder (Bild 9b) hinzu:

$$(25) \quad N_s = k(u_2 - u_1)$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (20) lässt sich v_B aus den Gleichungen (21) und (23) eliminieren. Gefunden wird:

$$(26) \quad Z\dot{u}_1 - N_s = 2Zv_A = -2N_A$$

Mit Hilfe von (20) folgt aus (22) und (24):

$$(27) \quad Z\dot{u}_2 + N_s = 0$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt:

$$(28) \quad Z(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + 2N_s = 2N_A.$$

Andererseits führt Gleichung (25) zu:

$$(29) \quad k(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \dot{N}_s = 0.$$

Elimination von $(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$ aus diesen beiden Gleichungen führt zur Differentialgleichung für die Federkraft N_s :

$$(30) \quad \frac{Z}{2k} \dot{N}_s + N_s = N_A$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $N_s = 0$ für $t = 0$ lautet:

$$(31) \quad N_s = N_A [1 - \exp(-2 \frac{k}{Z} t)]$$

Der Verlauf der Federkraft N_s mit der Zeit ist in Bild 10a wiedergegeben. Die Figur zeigt dasselbe Bild wie Bild 8, nur kontinuierlich statt diskontinuierlich. Die Federkraft nähert sich asymptotisch dem Wert N_A .

Wir geben noch die folgenden Ergebnisse:

Aus (26) folgt:

$$(32) \quad \dot{u}_1 = \frac{1}{Z} [N_s - 2N_A] = \\ = v_A [1 + \exp(-2\frac{k}{Z}t)].$$

Die Funktion ist in Bild 10b wiedergegeben. Die Geschwindigkeit \dot{u}_1 fängt an mit einem Wert, der doppelt so gross ist wie v_A . Das Ende des linken Betonstabes verhält sich in diesem Augenblick wie ein freies Ende. Allmählich wird jedoch die Feder zusammengedrückt und dies führt zu einer anwachsenden Kraft auf das Stabende, sodass die Geschwindigkeit \dot{u}_1 allmählich abnimmt und sich asymptotisch dem Wert v_A nähert.

Aus (27) folgt:

$$(33) \quad \dot{u}_2 = -\frac{1}{Z} N_s = \\ = v_A [1 - \exp(-2\frac{k}{Z}t)]$$

Die Geschwindigkeit \dot{u}_2 verläuft gleichförmig mit der Federkraft N_s .

Schliesslich geben wir noch:

$$(34) \quad N_B = -N_A \exp(-2\frac{k}{Z}t)$$

und

$$(35) \quad v_B = v_A \exp(-2\frac{k}{Z}t)$$

Die letzte Funktion ist in Bild 10c wiedergegeben. Die reflektierte Welle nimmt allmählich ab und nähert sich Null. Es gibt dann also praktisch keine Reflexion mehr. Die einfallende Welle u_A passiert nahezu unbehindert die Feder und pflanzt sich im rechten Betonstab mit nahezu derselben Intensität fort. Mittlerweile hat sich jedoch die Form dieser Welle von einem Rechteck in die in Bild 11 wiedergegebene Form geändert.

Es ist schon erwähnt worden, dass das Phänomen der Fortpflanzung von Wellen in einem Stab eine Analogie zeigt zu einem viskosen Dämpfer. Die Differentialgleichung (30) ist darum auch analog zur Differentialgleichung für ein System, bestehend aus einer Feder und einem Dämpfer, die nebeneinander (parallel) geschaltet sind (Bild 12). Weil es sich hier um zwei Betonstäbe, also zwei Dämpfer handelt, die hintereinander (in Serie) geschaltet sind, ist die resultierende Dämpfungskonstante (oder Impedanz) gleich $Z/2$.

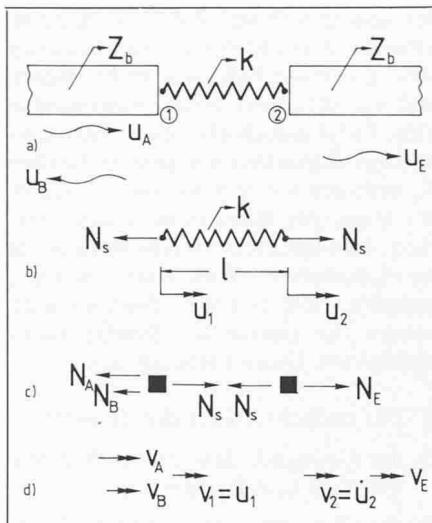


Bild 9. Das Federmodell

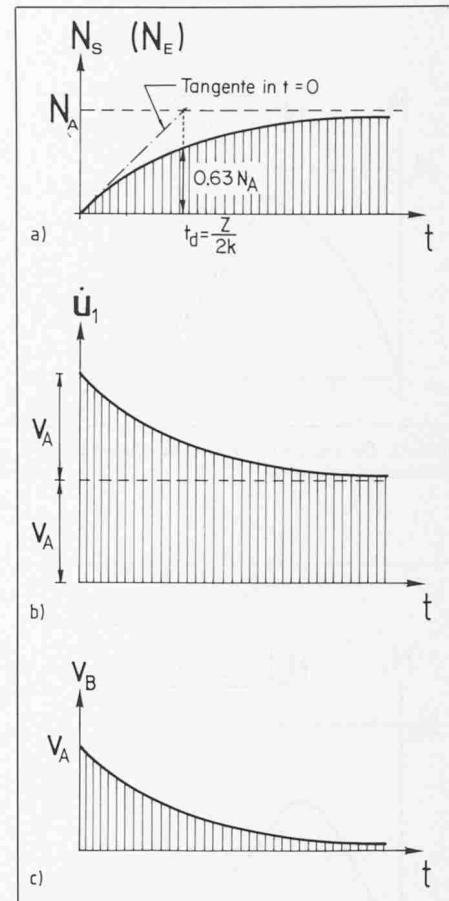


Bild 10. Verlauf von N_s , $v_1 = \dot{u}_1$ und v_B mit der Zeit

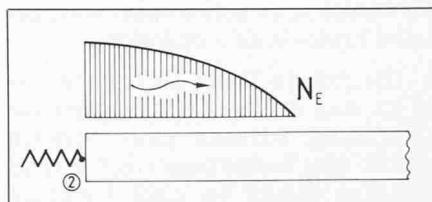


Bild 11. Die Form der durchgelassenen Spannungswelle

Man könnte jetzt fragen, wie schnell die Federkraft N_s anwächst. Um eine Vorstellung zu bekommen, sehen wir uns Bild 10a nochmals an. Die Tangente am Ursprung der Kurve schneidet die Asymptote in einem Punkt, für den $t_d = \frac{Z}{2k}$ gilt. Der zugehörige Wert von N_s beträgt $0,63 N_A$. Nach einer Zeitdauer $t_d = (Z/2k)$ hat die Federkraft also gut 60% ihres endgültigen Wertes erreicht. In diesem Ausdruck ist die Impedanz $Z = (E_b A_b / c)$. Unter Vernachlässigung der Stahleinlagen nehmen wir:

E_b = E-Modul des Betons

A_b = Querschnitt des Betons

Wir nehmen für die Feder vereinfachend an, dass es sich um eine lineare Feder mit einer Federkonstanten $k = (E_s A_s / l)$ handle, worin

E_s = E-Modul des Stahls

A_s = Querschnitt der Bewehrung

l = Federlänge

Nehmen wir für die Federlänge das Doppelte der mittleren Haflänge der Stahlstäbe im Beton, erhalten wir:

$$t_d = \frac{1}{2} \frac{E_b}{E_s} \frac{A_b}{A_s} \frac{l}{c}.$$

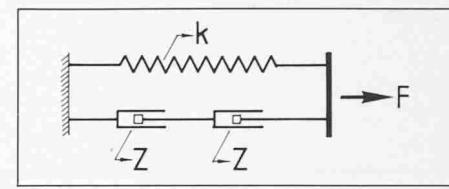


Bild 12. Das analoge System

Mit $E_s/E_b = 5$, $A_s/A_b = 0,01$, $c = 4000 \text{ m/s}$ und einer mittleren Haflänge auf jeder Seite von $0,2 \text{ m}$, also $l = 0,4 \text{ m}$, führt diese Formel zum Ergebnis $t_d = 10^{-3} \text{ s}$, womit man eine Vorstellung hat von der Geschwindigkeit des Anwachsens der Federkraft N_s .

Als Federkonstante kann man auch den Wert nehmen, der sich aus einem Ausziehversuch ergibt. Im elastischen Bereich ist sie jedoch etwas grösser.

Weitere Faktoren

Das Ergebnis dieser Analyse, nämlich dass die Kraft N_s in der Bewehrung an der Stelle des Risses sehr schnell anwächst bis zum Wert N_A der Zugwelle, führt zur Möglichkeit von grossen Stahlspannungen in der Bewehrung. Die Grösse von N_A in bezug zur axialen Druckkraft F_o hängt beim Rammen von

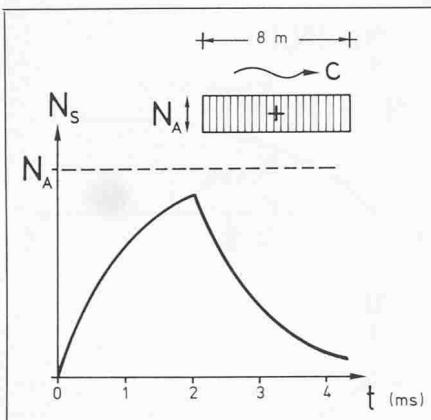


Bild 13. Der Verlauf von N_s bei einer beschränkten Zeitdauer der Zugwelle

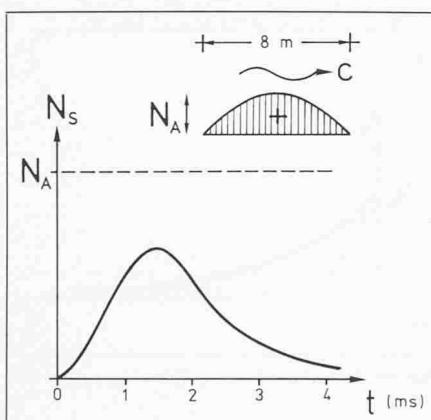


Bild 14. Der Verlauf von N_s bei einer sinusförmigen Zugwelle

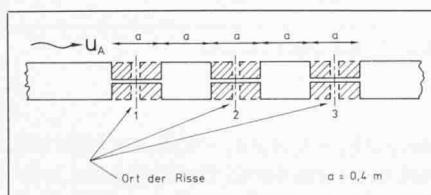
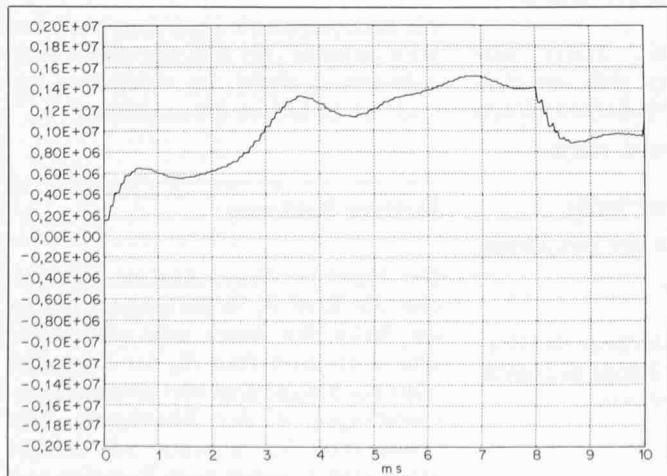


Bild 15. Stab mit drei Rissen

Bild 16. Verlauf von N_s im ersten Riss (Wellenlänge 32 m)



der Mantelreibung und vom Spitzewiderstand des Pfahls ab, von Faktoren also, die ausserhalb des Pfahls liegen und auf die nicht weiter eingegangen wird. Es ist jedoch klar, dass unter Umständen Zugwellen mit grossen Kräften N_A auftreten können, sodass man fürchten muss, die Bewehrung könnte brechen. Obwohl diese Gefahr besteht, ist die Situation in Wirklichkeit weniger schlimm, weil es einige Faktoren gibt, welche die Grösse der Stahlspannung herabsetzen. Diese Faktoren sind:

- Die endliche Dauer der Zugwelle,
- der Umstand, dass die Wellenform meistens kein Rechteck ist,
- die Tatsache, dass die Zugwelle nicht nur einen Riss, sondern mehrere Risse verursacht,
- das elasto-plastische Verhalten der Stahlstäbe.

Wir werden den Einfluss dieser verschiedenen Faktoren kurz erläutern.

- Die endliche Dauer der Zugwelle bedeutet, dass die Kraft N_s nicht ganz zur Entwicklung kommen kann. Nehmen wir z. B. eine Wellenlänge von 8 m (Bild 13), dann kommt bei einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 4000 m/s der Zuwachs von N_s nach $2 \cdot 10^{-3}$ s zu Ende, wonach der Wert von N_s allmählich wieder abnimmt auf Null. Bild 13 zeigt dieses Bild für eine Federlänge von 0,40 m.
- Die Form der Druckwelle weicht meistens stark ab vom hier angenommenen Rechteck, und das gilt umso mehr für die reflektierte Zugwelle. Eine gute Annäherung kann oft erreicht werden mit einer gedämpften Sinuswelle. Es braucht also einige Zeit, bis die Zugkraft im Querschnitt ihren Maximalwert erreicht hat. Dementsprechend wird das Anwachsen von N_s weniger rasch stattfinden und der Maximalwert auch ge-

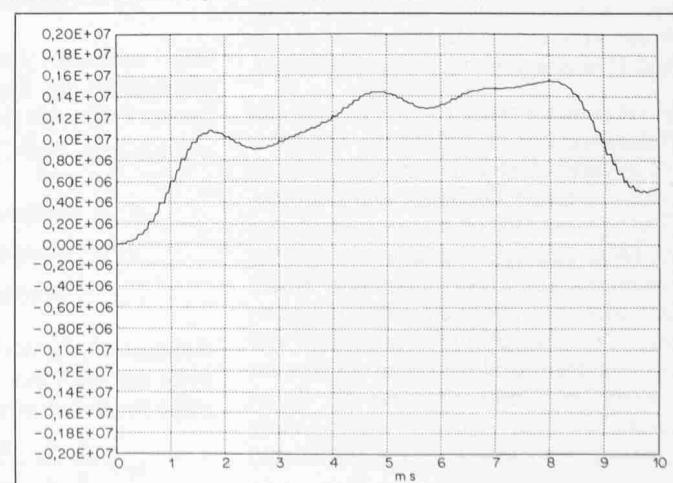
ringer sein. Bild 14 zeigt den Verlauf von N_s für eine normale Sinuswelle mit einer halben Wellenlänge von 8 m. In diesem Fall erreicht N_s nur etwa 60 % des Maximalwertes N_A .

- Die Zugwelle verursacht immer verschiedene Risse hintereinander. Die Situation wird dadurch um ein Vielfaches komplizierter. Wenn die von links einfallende Zugwelle u_A von konstanter Grösse den Riss Nummer 1 (Bild 15) passiert hat, wird sie an den Grenzflächen vom Riss Nummer 2 reflektiert. Von diesen reflektierten Wellen sind die Druckwellen die grösseren. Dies bedeutet, dass das Anwachsen von N_s im ersten Riss abgemindert wird. Bild 16 zeigt für den Fall von drei Rissen, wie in Bild 15 angedeutet, den Verlauf von N_s im ersten Riss für eine sehr lange Welle von 32 m. Nach 8 ms wird praktisch der Wert von N_A – in diesem Fall 1,6 MN – erreicht. Selbstverständlich sind diese Resultate mit einem Computerprogramm errechnet worden. Bild 17 zeigt den Verlauf von N_s im dritten Riss. Auch hier wird schliesslich nahezu der Wert von N_A erreicht.

Die Risse wirken sich in Form einer *Dämpfung* aus. Das bedeutet auch, dass für eine kürzere, wirklichkeitsnahere Wellenlänge, z. B. 8 m, der Maximalwert von N_s bei weiten nicht erreicht wird. Insbesondere trifft das zu für N_s im ersten Riss, wo nach 2 ms (äquivalent mit 8 m) nur etwa ein Drittel des Maximalwertes erreicht wird. Für N_s im dritten Riss trifft das weniger zu. Dieser Wert ist bedeutend grösser.

- Der wichtigste Faktor, der den maximalen Wert der Kraft N_s in der Bewehrung herabsetzt, ist das elasto-plastische Verhalten von Stahl. Die Herabminde rung der Steifigkeit eines Stahlstabes von k auf k' ist für einen normalen Stahl in Bild 18 wiedergegeben, wobei N die Normalkraft und Δ die Verlängerung darstellen. Eine exakte Lösung des Pro

Bild 17. Verlauf von N_s im dritten Riss (Wellenlänge 32 m)



blems wird recht kompliziert, weshalb hierauf nicht weiter eingegangen wird. Wir nehmen vereinfachend an, dass wegen des beträchtlichen Fließvermögens die tatsächliche Steifigkeit um einen Faktor 10 abgemindert werden kann. Das bedeutet, dass wir im Ausdruck (31) für N_s die Steifigkeit k ersetzen durch $k' = 0,1 k$. Die Stahlkraft N_s wird jetzt viel langsamer anwachsen mit der Zeit (Bild 19). Es lässt sich zum Beispiel leicht zeigen, dass N_s für $t = 10^{-3}$ s jetzt nur den Wert $0,095 N_A$ erreicht, was ungefähr 15 % des vorherigen Werts aus Bild 10a ist.

In unserem Beispiel war $N_A = 1,6$ MN. Mit $A_b = 0,16 \text{ m}^2$ wird die Betonspannung $\sigma_b = 10 \text{ MN/m}^2$ (100 kg/cm^2). Mit einer Bewehrung von 1 % würde das zunächst gemäss Formel (31) zu einer Stahl-

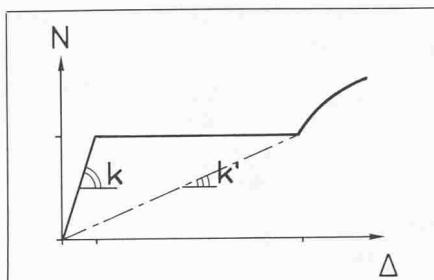
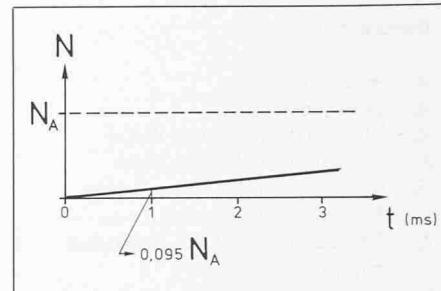


Bild 18. Ein Kraft-Verlängerungsdiagramm

spannung $\sigma_b = 1000 \text{ MN/m}^2$ (10^4 kg/cm^2) führen. Die oben eingeführten Reduktionsfaktoren werden diese Spannung abmindern bis auf eine Größenordnung von 50 MN/m^2 (500 kg/cm^2).

Zusammenfassend kann man sagen, dass die verschiedenen Reduktionsfak-

Bild 19. Verlauf von N_s bei einer um ein Zehnfaches geringeren Steifigkeit

toren dafür sorgen, dass im allgemeinen die Bewehrung nicht versagen wird. Die Natur ist uns gut gesinnt.

Adresse des Verfassers: A. L. Bouma, Professor ir. für nischen Hochschule Delft (Abt. für Bauingenieure). Stevinweg 1, NL-Delft 8.

Spannungsumlagerung in bewehrten Betonkonstruktionen durch Kriechen und Schwinden des Betons

Von A.S.G. Bruggeling, Delft

In diesem Beitrag wird gezeigt, dass die Spannungsumlagerung durch Schwinden und Kriechen einen Einfluss auf das Verhalten von Betonkonstruktionen hat. Dazu werden einige Beispiele besprochen. Es handelt sich um die Spannungsumlagerung in hoch bewehrten Betonstützen, in einem schlaff bewehrten Biegeträger und in einem teilweise vorgespannten Biegeträger. Im letzten Fall wird gezeigt, dass einfache Methoden zur Berechnung von teilweise vorgespannten Biegeträgern gerechtfertigt sind.

This article is dealing with the influences of creep and shrinkage on the behaviour of concrete structures. Three examples are discussed in detail, namely the redistribution of stress in columns with a high percentage of reinforcement, a beam in reinforced concrete and a beam in partially prestressed concrete.

It is shown that in the last case a simple design approach for partially prestressed concrete beams is justified.

Dans cet article on démontre que le retrait et le fluage ont une influence sur le comportement des constructions en béton. Trois exemples sont choisis pour discuter ce phénomène: une pile avec un haut pourcentage d'acier, une poutre en béton armé et une poutre en béton précontraint partiellement. Pour le dernier cas il est aussi démontré qu'une méthode simple pour le calcul des poutres en béton précontraint partiellement est admissible.

haben können. Die zeitabhängige Durchbiegung von Platten ist dafür ein Beispiel.

In den sechziger Jahren ist die teilweise Vorspannung entwickelt worden. Auch dabei war es notwendig, zeitabhängige Einflüsse in Betracht zu ziehen, weil sie nicht nur die Rissbreite unter Vollast beeinflussen können, sondern auch die Dauerfestigkeit unter wiederholter Belastung. Im folgenden Beitrag werden einige Gedanken zu den Problemen geäußert, die durch Spannungsumlagerung in bewehrten und vorgespannten Betonkonstruktionen hervorgerufen werden können, mit dem Ziel, einen Zusammenhang zwischen dem Verhalten unterschiedlicher Konstruktionen nachzuweisen.

Betonstützen

Besonders in Gebäuden spielen die *vertikalen Tragglieder* – die Stützen – eine wichtige Rolle. Die im Erdgeschoss oder im Keller stehenden Stützen tragen oft eine nahezu zentrische, hohe Belastung. Um die Abmessungen dieser Stützen zu beschränken, wird ein ziemlich hoher Bewehrungsgehalt gewählt.

Nach der Inbetriebnahme des Gebäudes steuert eine Klimaanlage (Zentralheizung) das Klima auch der Räume, in denen sich die Stützen befinden. Meistens ist die relative Feuchtigkeit der Luft gering und die Temperatur nahezu

Einleitung

Beton ist ein Material, das nach der Verarbeitung und der Erhärtung schwindet und unter Belastung kriecht.

Diese Eigenschaften können das Verhalten einer Betonkonstruktion beträchtlich beeinflussen. Durch die Entwicklung der Spannbetonbauweise hat man erst deut-

lich die wichtige Rolle des Schwindens und Kriechens erkannt: Die aktiven Vorspannkkräfte, die in eine Betonkonstruktion eingeleitet werden, verringern sich mit der Zeit, weil der Beton sich verkürzt.

Hat man einmal diese Erkenntnisse gewonnen, wird auch klar, dass Schwinden und Kriechen des Betons einen wichtigen Einfluss auf das Verhalten einer nicht vorgespannten Betonkonstruktion