

**Zeitschrift:** Schweizer Ingenieur und Architekt  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 101 (1983)  
**Heft:** 6: Prof. Dr. Bruno Thürlimann zum 60. Geburtstag

**Artikel:** Ein Finite-Element-Modell für die Erfassung der Interaktion zwischen Schub, Normalkraft und Biegung  
**Autor:** Bazzi, Gianni  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-75056>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein Finite-Element-Modell für die Erfassung der Interaktion zwischen Schub, Normalkraft und Biegung

Von Gianni Bazzi, Zürich

Ein Finite-Element-Modell für die Erfassung der Interaktion zwischen Schub, Normalkraft und Biegung bei der nichtlinearen Analyse von Tragwerken wird kurz erläutert. Anhand einiger Anwendungsbeispiele werden die Eigenschaften des Elementes und sein Anwendungsbereich diskutiert.

A finite element model for the interaction of bending moments and normal and shear forces by the nonlinear analysis of structures is shortly presented. The properties and the application field of the element are discussed by means of some examples.

On présente un élément permettant la description de l'interaction entre le moment de flexion, l'effort axial et l'effort tranchant dans l'analyse nonlinéaire de structures du génie civil. Les propriétés de l'élément et son champs d'application sont discutées à l'aide de quelques exemples.

## Einführung

Baustatische Berechnungen verlangen oft die Anwendung *numerischer Algorithmen*. Dabei ist es notwendig, durch die Einführung *geeigneter mathematischer Modelle* das Problem räumlich und bei dynamischen Anwendungen auch noch *zeitlich* zu diskretisieren [1-5]. Die *räumliche* Diskretisierung erfolgt meistens nach der Methode der *Finiten Elemente*.

Die Diskretisation von Bauteilen, dessen Verhalten durch die Interaktion zwischen Schub, Normalkraft und Biegung massgeblich geprägt ist, erfolgt oft durch *mehrdimensionale Elemente*. Bei *Stahlbetonbauteilen* wird der Beton meistens durch multidimensionale isoparametrische Finite Elemente und die einzelnen Armierungsstäbe durch ein einaxiales Modell idealisiert. *Verbundprobleme* werden in einzelnen Untersuchungen durch separate nichtlineare Feder-Elemente modelliert. Dieses Vorgehen ist theoretisch untermauert und auch im Konzept einfach, stösst aber bei der Analyse von Tragwerken realistischer Grösse bald an die Grenze des tragbaren numerischen Aufwandes.

Die folgenden Herleitungen beschränken sich auf den wichtigen Fall, wo das Verhalten des Bauteiles im wesentlichen von der *Schubbeanspruchung* geprägt ist, wegen seiner geometrischen Abmessungen aber eine Idealisierung durch Balken-Elemente naheliegt. Die Grundlage für die Entwicklung dieses Elementes ist die *erweiterte Balkentheorie*: Der Balkenquerschnitt bleibt eben, aber nicht senkrecht zur Stabachse, so dass Schiebungen auftreten können. Diese Annahmen werden im folgenden für Balken sowohl aus Stahl wie auch aus Stahlbeton verallgemeinert. Eine detaillierte Herleitung ist in [5] oder [8] zu finden.

## Das Finite-Element-Modell

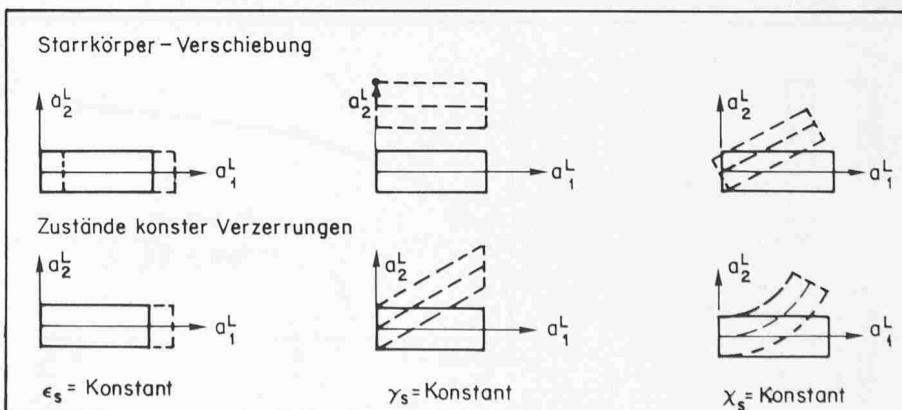
Im Blick auf die Forderung, dass auch Schiebungen auftreten können, ist es von Vorteil, sog. *natürliche Verschiebungsansätze* zu verwenden. Diese werden im lokalen Koordinatensystem  $a_1^L$  formuliert. Die verwendeten Starrkörper-Verschiebungs-Ansätze und die Ansätze, die Zuständen konstanter Verzerrungen entsprechen, sind in Bild 1 dargestellt.

Die Idealisierung der *Querschnittsgurten* (Flanschen) kann mit exzentrisch angeschlossenen einaxialen Elementen (engl. «stringers») erfolgen und weist somit keine besonderen Aspekte auf. Das Verhalten des Steges soll dagegen durch eine isotropische, mehraxiale, inkrementale Stoffgleichung der Form

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_T] \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

beschrieben werden, wobei die Indizes  $x$  und  $y$  eine Abkürzung für  $a_1^L$  und  $a_2^L$  darstellen. Die Koeffizienten der Matrix  $[D_T]$  sind von der jeweils verwendeten Stoffgleichung abhängig. Die Verzerrungskomponenten  $\Delta \epsilon_x$  bzw.  $\Delta \gamma_{xy}$  lassen sich in einem beliebigen Punkt

Bild 1. Natürliche (modale) Verschiebungsansätze



des Steges aus  $\Delta \epsilon_s$ ,  $\Delta \gamma_s$  bzw.  $\Delta \chi_s$  berechnen. Für den Wert der Verzerrungskomponenten  $\Delta \epsilon_y$  liefert dagegen die klassische erweiterte Balkentheorie mit Schubverzerrungen keine Information.

Zwei *Grenzfälle* sollen betrachtet werden. Einerseits entspricht die Annahme  $\epsilon_y = 0$  einem Zustand, bei dem jegliche Verschiebung senkrecht zur Stabachse verhindert wird. Andererseits entspricht die Annahme  $\sigma_y = 0$  einem Zustand, bei dem sich die Verschiebung senkrecht zur Stabachse unbehindert einstellen kann, damit die statische Randbedingung  $\sigma_y = 0$  erfüllt werden kann. Die Anwendbarkeit beider Hypothesen soll im folgenden für die verschiedenen Eigenschaften von Stahl- und Stahlbeton-Balken untersucht werden.

## Balken aus Stahl

Die Annahme unbehinderter Verschiebungen senkrecht zur Stabachse ( $\sigma_y = 0$ ) erscheint für den Steg von Stahlträgern meistens vernünftig. Der Vergleich zwischen experimentellen und berechneten Resultaten zeigt auch eine gute Übereinstimmung. Die Beschreibung des Stahlverhaltens erfolgt im folgenden durch die bekannte Fließbedingung von Von Mises mit kinematischer Verfestigung.

## Balken aus Stahlbeton

Stahlbeton ist ein zusammengesetztes, anisotropes Material. Würde man sein Verhalten durch eine einzige anisotropische Stoffgleichung beschreiben, dann könnte meistens die Annahme  $\sigma_y = 0$ , wie für Stahl, verwendet werden. Dies wäre aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, weil auf Grund der Anisotropie die gewohnte Stoffgleichungsformulierung im Hauptspannungsraum nicht mehr anwendbar ist. Es ist dabei einfacher, das Verhalten des Betons und das der Stahlarmerungen separat durch je eine isotropische Stoffgleichung zu beschreiben.

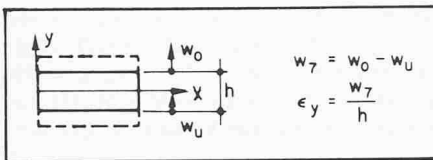


Bild 2. Zusätzliche innere Freiheitsgrade

Keine der zwei erwähnten Annahmen  $\epsilon_y = 0$  und  $\sigma_y = 0$  scheint aber das effektive Verhalten des Betons realistisch beschreiben zu können. Gerade die *Behinderung* (engl. «constraining»), die von der Bügelarmierung auf den Beton ausgeübt wird, stellt eine der hauptsächlichen Aspekte in den Mechanismen der Schubübertragung dar. In der Tat wirkt die *Bügelarmierung* wie eine elastisch-plastische Stützung für den Beton im Steg. Der Einfluss der Bügelarmierung wird «geschmiert» (und somit kontinuierlich) entlang der Stabachse angenommen.

Um die wesentlichen charakteristischen Aspekte von Stoffgleichungen zu zeigen, die vom hydrostatischen Druck abhängig sind, soll im folgenden für den Beton die bekannte *Fließbedingung von Drucker-Prager* verwendet werden. Dieses Materialmodell stellt nur eine erste Näherung für das effektive Beton-Verhalten dar, gibt aber den wesentlichen Aspekt der unterschiedlichen Eigenschaften infolge Zug- und Druck-Banspruchung wieder. Falls der Beton für den Bruch massgebend ist und sich in einem multiaxialen Druck-Spannungszustand befindet, sowie für die Beschreibung zyklischer Beanspru-

chung, sind differenziertere Formulierungen notwendig.

### Einführung innerer Freiheitsgrade

Eine Verallgemeinerung der klassischen Balkentheorie mit Schubverformung, die, wie oben bereits erwähnt, keine Information über die Verzerungskomponente senkrecht zur Stabachse liefert, soll durch die Einführung eines weiteren Verschiebungsansatzes erreicht werden (Bild 2). Dieser siebte Verschiebungsansatz entspricht einem Verzerrungszustand  $\epsilon_y$ , der über das ganze Element konstant ist.

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix braucht man einen einzigen Integrationspunkt entlang der Stabachse und mehrere Integrationspunkte über die Balkenhöhe. Die Anteile aus den als exzentrisch angeschlossenen, einaxial modellierten Flanschen werden separat dazu addiert. Der zusätzliche siebte Freiheitsgrad erhält nur Beiträge aus dem Betonsteg und aus der geschmierten Bügelarmierung des betreffenden Elementes. Als internen Freiheitsgrad kann er somit am Element-Niveau eliminiert werden (siehe zum Beispiel [1, 2]), womit sowohl die reduzierte Steifigkeitsmatrix als auch die Beziehung zwischen den üblichen sechs äusseren Verschiebungsincrementen und  $\Delta W_7$  erhalten wird. In der zur Zeit implementierten Version wird bei jedem einzelnen Element zuerst soweit iteriert, bis das Gleichgewicht beim zusätzlichen internen Freiheitsgrad erfüllt ist. Die

Steuerung der element-internen Gleichgewichtsiterationen beeinflusst allerdings in entscheidender Weise den gesamten numerischen Aufwand.

## Anwendungsbeispiele

### Schubwand

Der Steg eines Stahlbetonträgers kann oft als Schubwand idealisiert werden, die eine reine Schubbeanspruchung erfährt. Die Beschreibung dieses Zustandes durch ein Fachwerkmodell mit variabler Neigung der Betondruckdiagonalen (Bild 3) ist mehrmals diskutiert worden [6] und bildet die theoretische Grundlage der Richtlinie 34 zur Schweizer Stahlbeton-Norm 162.

Die theoretisch ermittelten Werte des Neigungswinkels für verschiedene Verhältnisse  $p_y/p_x$  der Bügel- zur Längsarmierung sind in Bild 4 mit den entsprechenden gerechneten Werten verglichen. Die Analyse wurde an einem einzigen Element durchgeführt, und der Armierungsgehalt wurde so gewählt, dass der Bruch immer durch das Fliesen sowohl der Bügel als auch der Längsarmierung eintritt.

### Stahlrahmen

Vorbereitende Untersuchungen hatten gezeigt, dass das Verhalten des Stahlrahmens des Bildes 5a unter der statischen Last  $P$  massgeblich von der Schubbeanspruchung beeinflusst war. Grosse Verschiebungseffekte infolge der grossen plastischen Schiebungen im Steg und damit verbundene Tragsystemumlagerungen waren zu erwarten, was eine geometrisch und materialbedingte nichtlineare Analyse notwendig machte.

In einer ersten Analyse erfolgte die räumliche Diskretisierung durch 25 isoparametrische zweidimensionale Elemente für die Stege und 100 Fachwerkelemente für die Flanschen der HEM-140-Träger. Das Materialverhalten wurde durch die Fließbedingung von *V. Mises* mit kinematischer Verfestigung beschrieben. Wie in Bild 5b ersichtlich ist, musste aber die Berechnung frühzeitig abgebrochen werden. Das für die Konvergenz notwendige Lastinkrement war so klein geworden, dass der Aufwand für die Berechnung unvernünftig wurde.

Die Berechnung konnte dann durch die Verwendung des neu entwickelten FE-Modells erfolgreich abgeschlossen werden. Der numerische Aufwand beträgt einen Bruchteil (weniger als 10 Prozent) desjenigen der vorhergehenden Analyse. Die verschobene Konfigura-

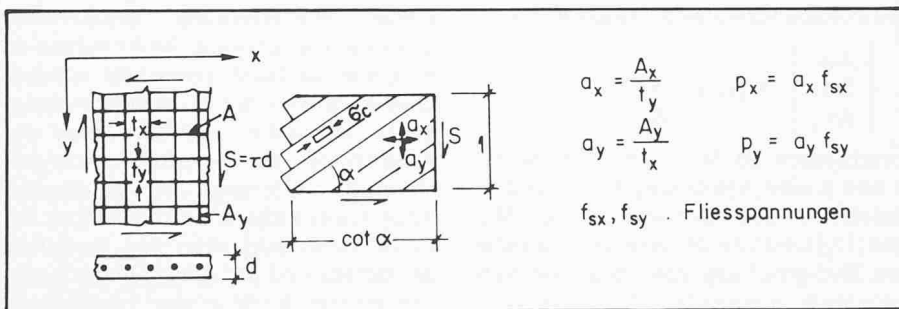
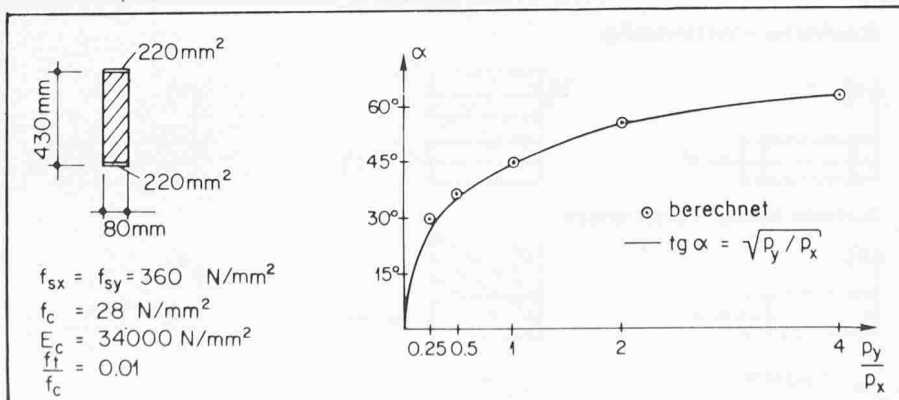


Bild 3. Schubwand-Element

Bild 4. Analytische und berechnete Werte der Diagonal-Neigungen



tion zeigt beim Erreichen der nominalen Bruchspannung einen deutlichen Knick unter der Last, und das Gesamtbild ist durch starke Schiebungen charakterisiert. Die Neigung der Träger unter der Last beträgt etwa 1:2,8 womit ein wesentlicher Teil der Last durch die Membranwirkung aufgenommen wird.

Als Vergleich wurde noch eine dritte Berechnung durchgeführt, bei der die Struktur durch Momenten-Krümmungs-Elemente diskretisiert wurde. Diese Elemente berücksichtigen aber nur das ungekoppelte Biege-Normalkraft-Verhalten und führen somit zu einer massiven Überschätzung des Systemwiderstandes.

### Stahlbetonbalken

Eine Serie experimenteller Versuche an zweifeldigen Stahlbetonbalken wurde von Leonhard, Walther und Diler in Berlin durchgeführt [7]. Das Verhalten des Balkens HH5 war massgeblich von der Schubbeanspruchung bestimmt. Der duktile Bruch wurde nach dem Fließen der Längs- und Schub-Armierung erreicht. Das gemessene und das berechnete Last-Durchbiegungs-Diagramm sind in Bild 6b dargestellt. Dazu ist in Bild 6a die verschobene Konfiguration für eine Last  $P = 140$  kN gezeichnet.

### Schlussbemerkungen

Das hier kurz dargestellte Finite-Element-Modell ist in [5] und [8] ausführlicher beschrieben. Die numerische Verifikation sowie die erwähnten Berechnungen wurden mit dem Computerprogramm PIFF durchgeführt. Als ein Instrument der Forschung hat dieses Programm zur numerischen Analyse des nichtlinearen Verhaltens von Tragwerken unter statischen und dynamischen Belastungen gedient. Dabei untersuchte man unter anderem Seilkonstruktionen, zyklisch belastete Stahlbetonträger, Aufprallprobleme beim Sprengen von Stahl- und Stahlbetonbrücken, erdbebeninduzierte Interaktionen zwischen nebeneinander stehenden Hochhäusern, Koppelung von biegemoment-

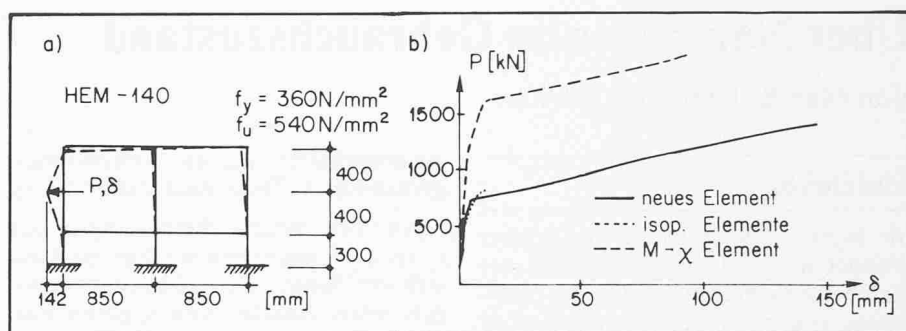


Bild 5. Stahlrahmen, System und Last-Durchbiegungs-Diagramm

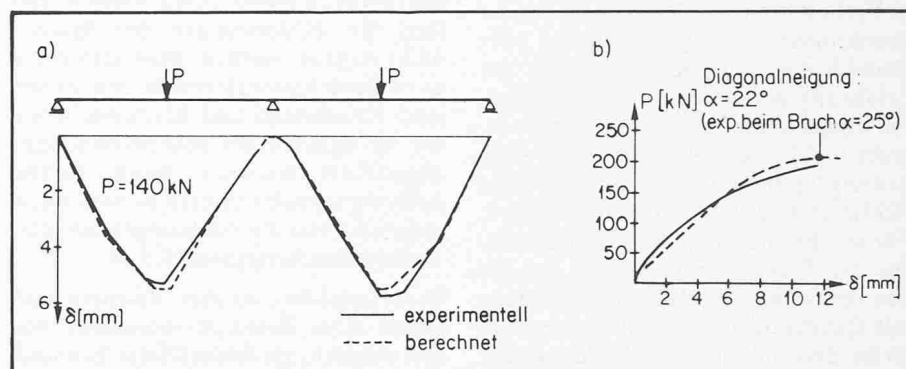


Bild 6. Verschiebungs- und Last-Durchbiegungs-Diagramm

### Zitierte Literatur

- [1] Zienkiewicz, O.C. (1971): «The Finite Element Method in Engineering Science». McGraw-Hill, London
- [2] Anderheggen, E. (1975): «Grundlagen der Computerstatik». Vorlesungsskriptum, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
- [3] Bathe, K.J., Wilson, E.L. (1976): «Numerical Methods in Finite Element Analysis». Prentice-Hall
- [4] Bazzi, G., Anderheggen, E. (1982): «The q-family of algorithms for time-step integration with improved numerical dissipation». Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, No. 4
- [5] Rossi, M., Bazzi, G. (1981): «Two Simple Reinforced Concrete Beam Elements for Static and Dynamic Analysis». IABSE Colloquium «Advanced Mechanics of Reinforced Concrete», Delft
- [6] Thürlimann, B. (1979): «Plastic Analysis of Reinforced Concrete Beams». IABSE, Vol. 28, Copenhagen
- [7] Leonhard, F., Walther, R., Diler, W. (1964): «Schubversuche an Durchlaufträgern». DASt, Heft 163, Berlin
- [8] Bazzi, G. (1982): «Ein Beitrag zur dynamischen Berechnung nichtlinearer Tragwerke». Dissertation, Inst. für Informatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
- [9] Anderheggen, E., Bazzi, G., Elmer, H., Friedrich, T., Maag, H., Theiler, J. (1983): «FLOWERS User's Manual». Inst. für Informatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

und schubresistenten Tragsystemen bei Hochhäusern, Stabilitätsberechnung von hohen Stahlbetonstützen von Brücken und von Stahlstützen unter der Berücksichtigung von Eigenspannungszuständen, Interaktionseffekte infolge Biegungs-, Normalkraft- und Schubbeanspruchung sowohl an Stahl- wie auch an Stahlbeton-Trägern. Das hier disku-

tierte Finite-Element-Modell wird voraussichtlich demnächst auch Bestandteil der Element-Bibliothek des neuen Finite-Element-Programmsystems FLOWERS [9] sein.

Adresse des Verfassers: Dr. G. Bazzi, Institut für Informatik, ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich oder CUBUS AG, Baumackerstr. 42, 8050 Zürich.