Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 101 (1983)

Heft: 49

Artikel: Zur Entstehung und Entwicklung der Baustatik

Autor: Ritz, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-75247

Zur Entstehung und Entwicklung der Baustatik

Von Peter Ritz, Kastanienbaum

Der geschichtliche Rückblick auf die Entstehungszeit der Baustatik zeigt, dass die Methoden seither – wenn auch langsam, so doch grundlegend – verändert und entwickelt worden sind. Die aus dem 19. Jahrhundert bekannten Methoden basieren auf der Elastizitätstheorie und wurden Anfang des 20. Jahrhunderts so verfeinert, dass sie dem Bauingenieur für seine statischen Berechnungen bis Anfang der sechziger Jahre genügten. Erst die Anwendung der Plastizitätstheorie sowie der Einsatz des Computers brachten neue baustatische Methoden. Aus Anlass des Jubiläums des Zentralschweizerischen Technikums Luzern untersucht der Autor die Entstehung der klassischen Baustatik und die Weiterentwicklung in den letzten 25 Jahren. Er zieht für die Ausbildung den Schluss, dass der Student heute mit der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie sowie mit der Computerstatik vertraut gemacht werden muss.

Einleitung

Um 1960 herum wurden in einer statischen Berechnung die Schnittkräfte entweder graphisch mit der *Festpunktmethode* oder analytisch mit der *Kraft- oder der Deformationsmethode* bestimmt. Die beiden letzteren Methoden kamen nur dann zur Anwendung, wenn ein System statisch bzw. kinematisch nicht zu hochgradig unbestimmt war. Immer beliebter wurde um diese Zeit die aus der Deformationsmethode abgeleitete numerische Methode nach *Cross*. Im Vorwort zur dritten Auflage des Buches von Suter: «Die Methode der Festpunkte» [1] schreibt *Traub* noch im Jahre 1951:

«Es ist das grosse Verdienst *Suters*, die Methode der Festpunkte so vervollkommnet zu haben, dass sie vielseitig und umfassend für die Berechnung fast sämtlicher statisch unbestimmter Konstruktionen, Stockwerkrahmen, Rahmen mit schräg und bogenförmigen Stäben u.a.m. angewendet werden kann. Die Methode der Festpunkte kann deshalb mit gutem Recht als die klassische Methode für die Berechnung von Rahmentragwerken bezeichnet werden.»

Über die Festpunktmethode hören die Studenten heute höchstens ein paar Sätze in Form eines historischen Exkurses. Die Kraftmethode und daraus entwickelte spezielle Verfahren wie die Clapeyronsche Dreimomentengleichung u. a. sowie die Deformationsmethode lernt der Studierende im Unterricht über Baustatik kennen. In der Praxis wird ein statisch unbestimmtes Tragwerk immer seltener von Hand mit diesen klassischen Verfahren berechnet; eher wird für eine Handrechnung die iterative Cross-Methode verwendet. Für umfangreichere statische Berechnungen steht heute eine grosse Zahl *Computerprogramme* zur Verfügung.

Das wichtigste Werkzeug des Ingenieurs war früher der *Rechenschieber*. In speziellen Kursen konnte dessen sichere und schnelle Handhabung erlernt werden. Heute besitzt bald jeder Lehrling und jeder Mittelschüler einen eigenen programmierbaren elektronischen Rechner.

Die innert kürzester Zeit immer leistungsfähiger werdenden *Computer* haben uns nicht nur die Rechnungsarbeit abgenommen. Mit der ungeheuer gesteigerten Rechenkapazität wurden auch entsprechende baustatische Methoden entwickelt; die erfolgreichste ist die sogenannte *Methode der finiten Elemente. E. Anderheggen* schreibt im Vorwort zu seiner Vorlesung «Grundlagen der Computerstatik» [2]:

«Parallel zur Entwicklung des Computers hat die Baustatik – wenn man darunter die numerische Erfassung des Verhaltens von Tragwerken mit Hilfe möglichst wirklichkeitsgetreuer mathematischer Modelle versteht – in den letzten zwanzig Jahren zweifellos grössere Fortschritte erzielt denn je. Diese Aussage wäre allerdings trivial, wenn man sie primär auf den Vergleich zwischen den Rechenleistungen moderner Computer und denjenigen des Rechenschiebers oder der Tischrechenmaschinen vergangener Zeiten stützte. Es liegt auf der Hand, dass heute in wenigen Sekunden Computerzeit Berechnungen durchgeführt werden können, deren Rechenvolumen jede Handrechnung ausschliessen würden. In den letzten Jahren hat man jedoch auch noch gelernt, die Probleme der Statik mit Hilfe neuer, äusserst effizienter und praktisch unbeschränkt anwendbarer Prozeduren zu behandeln. Wesentliche, rein theoretische Fortschritte sind ebenfalls erzielt worden.»

Vor etwa 25 Jahren erfolgte die Bemessung von Stahl-, Stahlbeton- und Holzkonstruktionen fast ausschliesslich durch einen querschnittsweisen Vergleich der elastisch berechneten Spannungen mit festgelegten zulässigen Spannungen. Für jeden damals ausgebildeten Ingenieur sind die Ritter- bzw. Hofackertabellen zur Bemessung von Stahlbetonquerschnitten ein Begriff. Heute hat sich sowohl im Stahlbau wie im Stahlbetonbau die Bemessung auf die beiden Grenzzustände *Tragfähigkeit* und *Gebrauchsfähigkeit* durchgesetzt (vgl. dazu [3]). Dazu werden Methoden der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie verwendet.

Die *Berechnungs- und Bemessungsverfahren* haben sich in den letzten 25 Jahren stärker entwickelt als je zuvor. Ein Rückblick auf die Entwicklung der Baustatik zeigt dies deutlich.*

Die Entstehung der Baustatik

Die Mechanik als Wissenschaft

Die Begründung der Mechanik als Wissenschaft kann etwa ins 17. Jahrhundert angesetzt und mit Namen wie *Galileo Galilei* (1564–1642, Bild 1), *Isaac Newton* (1643–1727) u. a. in Zusammenhang gebracht werden. Bei der Entwicklung der Balkentheorie stellt man fest, dass sich anfänglich Forscher wie *Galilei, Mariotte* (1620–1684), *Leibniz* (1646–1716), *Varignon* (1654–1722) und *Parent* (1666–1716) mit der Festigkeit des Balkens, also mit der *Bruchtheorie*, beschäftigt haben. Doch bald rückte die Frage nach den *Deformationen* in den Vordergrund. *Hooke* (1635–1703), *Jakob Bernoulli* (1655–1705), der erste grosse Mathematiker dieser berühmten Familie, *Euler* (1707–1783) und *Jakob Bernoulli II* (1759–1789) beschäftigten sich intensiv mit der elastischen Deformationstheorie. Im wesentlichen brachte *Coulomb* (1736–1806) die elastische Balkentheorie zum Abschluss, in dem er die Gleichgewichtsbedingungen mit der Bernoullischen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte und einem Materialgesetz, z. B. dem nach Hooke, verknüpfte. Die heutige Form der Differentialgleichung des elastischen Balkens verdanken wir schliesslich *Navier* (1785–1836, Bild 2). Sein im Jahre 1826 in Paris erschienenes «Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées» kann als erste umfassende Baustatik angesehen werden.

Als interessantes Detail ist zu vermerken, dass die Differentialgleichung der elastischen Platte, ein bedeutend schwierigeres Problem, schon im Jahre 1813 von *Lagrange* (1736–1813) auf der Grundlage von wesentlichen Vorarbeiten der Mathematikerin *Sophie Germain* (1776–1831) aufgestellt wurde.

Elastische Berechnungsmethoden

Analytische Methoden

Mit Hilfe der Balkendifferentialgleichung konnten nun auch die Schnittkräfte und die Verformungen *statisch unbestimmt* gelagerter Balken bestimmt

* Die historischen Ausführungen sind hauptsächlich Standardwerken von *I. Szabo, H. Straub* und *S.P. Timoshenko* entnommen [4, 5, 6].

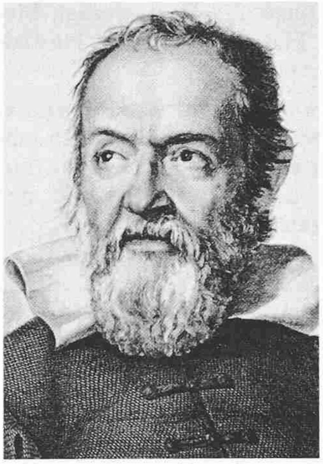


Bild 1. Galileo Galilei (1564–1642) [4]

Bild 2. Louis Marie Henri Navier (1785–1836) [4]

Bild 3. Carl Culmann (1821–1881), [Festschrift zur Feier des 50jährigen Bestehens des Eidg. Polytechnikums]

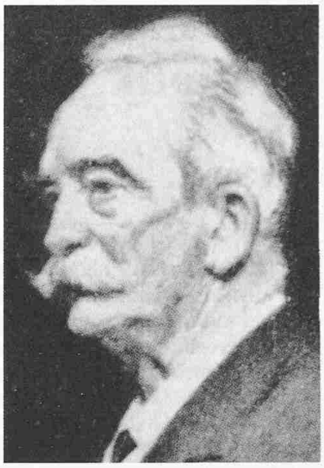


Bild 4. Otto Mohr (1835–1918) [6]

werden. *Navier* löste dieses Problem durch Integration der Differentialgleichung, wobei er die Integrationskonstanten aus den Auflagerbedingungen bestimmte. Diese mathematische Lösungsmethode, die sich nur für theoretische Einzelprobleme eignet, konnte die erste Bauingenieurgeneration, die Mitte des 19. Jahrhunderts langsam in Erscheinung trat, nicht befriedigen. Man suchte nach Lösungsmethoden, mit denen auch kompliziertere Tragwerke berechnet werden konnten.

Dem Franzosen *Clapeyron* (1799–1864) wird zugeschrieben, dass er im Jahre 1849 bei der Berechnung der Seinebrükke bei Asnières als erster die Stützenmomente des statisch unbestimmten Durchlaufträgers als Unbekannte eingeführt und damit die nach ihm benannte Dreimomentengleichung aufgestellt habe. Dieses Vorgehen wurde dann durch *Bresse* (1822–1883), Professor für angewandte Mechanik an der Ecole des Ponts et Chaussées in Paris, ausgebaut. *C. Culmann* (1821–1881, Bild 3), seit 1855 Professor am neu gegründeten Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, schreibt dazu in seinem Buch «Die graphische Statik», Ausgabe 1866 [7] auf der Seite 279 etwas kritisch:

«Nach *Bresse's* Cours de mécanique appliquée 1859 S. 143 soll Hr. *Clapeyron* zuerst das Moment über den Pfeilern als zu bestimmende Unbekannte betrachtet haben, doch haben wir uns nie dessen Originalabhandlung verschaffen können.

Herr Bresse jedoch, dem wohl Alles bekannt war, was Herr Clapeyron in dieser Sache gethan hat, hat sich bei seinen Untersuchungen auf Balken von gleichweiten Öffnungen mit gleichförmiger Belastung pro Öffnung beschränkt. Solche Beschränkungen geben zwar der Darstellung den eigenthümlichen Reiz der Einfachheit, sie gewähren jedoch sehr wenig Übersicht, weil dadurch von vornherein Allgemeines und Specielles vermengt wird.»

In dem im Jahre 1865 erschienenen dritten Band der «Cours de mécanique appliquée» von Bresse ist die *Dreimomentengleichung* für ungleiche Spannweiten, beliebige Lasten und verschiedene Höhen der Auflager in allgemeiner Form formuliert. Eine allgemeine analytische Formulierung der Dreimomentengleichung findet man jedoch bereits in einem Artikel aus dem Jahre 1860 [8] von *O. Mohr* (1835–1918, Bild 4), der zuerst Professor in Stuttgart, später in Dresden war.

Zur Berechnung der erforderlichen Stabenddrehwinkel der einfachen Balken verwendete Clapeyron das sehr alte *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*. Den Begriff «vitesses virtuelles» findet man bereits in einem im Jahre 1717 von *Johann Bernoulli* (1667–1748) an Varignon gerichteten Brief (vgl. [5], Seite 100). Clapeyron setzte die negative elastische Formänderungsarbeit gleich der Arbeit der äussern Kräfte. Damit hat er die Arbeitsgleichung in der noch heute gebräuchlichen Form verwendet.

Einen wichtigen Beitrag zur Lösung statisch unbestimmter Probleme hat *C. Maxwell* (1831–1879) in der Abhandlung aus dem Jahre 1864 «On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames» geleistet (vgl. [9], Seite 51). Er formulierte darin die zur Bestimmung der überzähligen Stabkräfte eines statisch unbestimmten Fachwerks erforderlichen Elastizitätsgleichungen. Im gleichen Artikel entwickelte er die von *Müller-Breslau* (1851–1925) als *Maxwellscher Satz* benannte Aussage von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Im klassischen Werk: «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen» von Müller-Breslau [10] sind die theoretischen Grundlagen zu dem heute als *Kraftmethode* bezeichneten Lösungsverfahren von statisch unbestimmten Tragwerken umfassend und vollständig zusammengestellt. Dieses Verfahren führt auf Gleichungssysteme mit der gleichen Zahl von Unbekannten wie das Tragwerk statisch unbestimmt ist. Für mehrfach statisch unbestimmte Systeme erfordert dies bald einmal umfangreiche und zeitraubende Berechnungen.

Um die Zahl der Unbekannten im zu lösenden Gleichungssystem zu reduzieren, hat wiederum *O. Mohr* als erster einen neuen Weg beschritten. In einer Publikation im «Zivilingenieur» der Jahre 1892 und 1893 hat er bei der Berechnung des Fachwerkes mit starren Knotenverbindungen die Knotendrehwinkel als Unbekannte eingeführt (vgl. [11], Seite 101). In der Publikation «Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen» von 1914 (vgl. [6], Seite 422 ff.) entwickelt *A. Bendixen* mit Hilfe der unbekannten Knotendrehwinkel eine systematische Berechnungsmethode, das sogenannte *Drehwinkelverfahren*, ein Spezialfall der *Deformationsmethode*. Durch Formulieren des Momentengleichgewichts an den Knoten gewinnt man die gleiche Zahl Gleichungen wie unbekannte Drehwinkel, womit die Unbekannten und damit die Stabendmomente berechnet werden können.

Čalisev entwickelte 1923 ein iteratives Verfahren zur Berechnung der unbekannten Drehwinkel. Im Jahre 1932 publizierte *H. Cross* in den Transactions of ASCE, Vol. 96 ein ähnliches Iterationsverfahren. Bei diesem Verfahren, der sogenannten *Methode Cross*, werden zuerst alle Knoten in Gedanken festgehalten und die Festeinspannmomente der belasteten Stäbe bestimmt. Indem man einen Knoten nach dem andern löst und die Momente ausgleicht, kann direkt die definitive Momentenverteilung durch sukzessive Approximation gefunden werden.

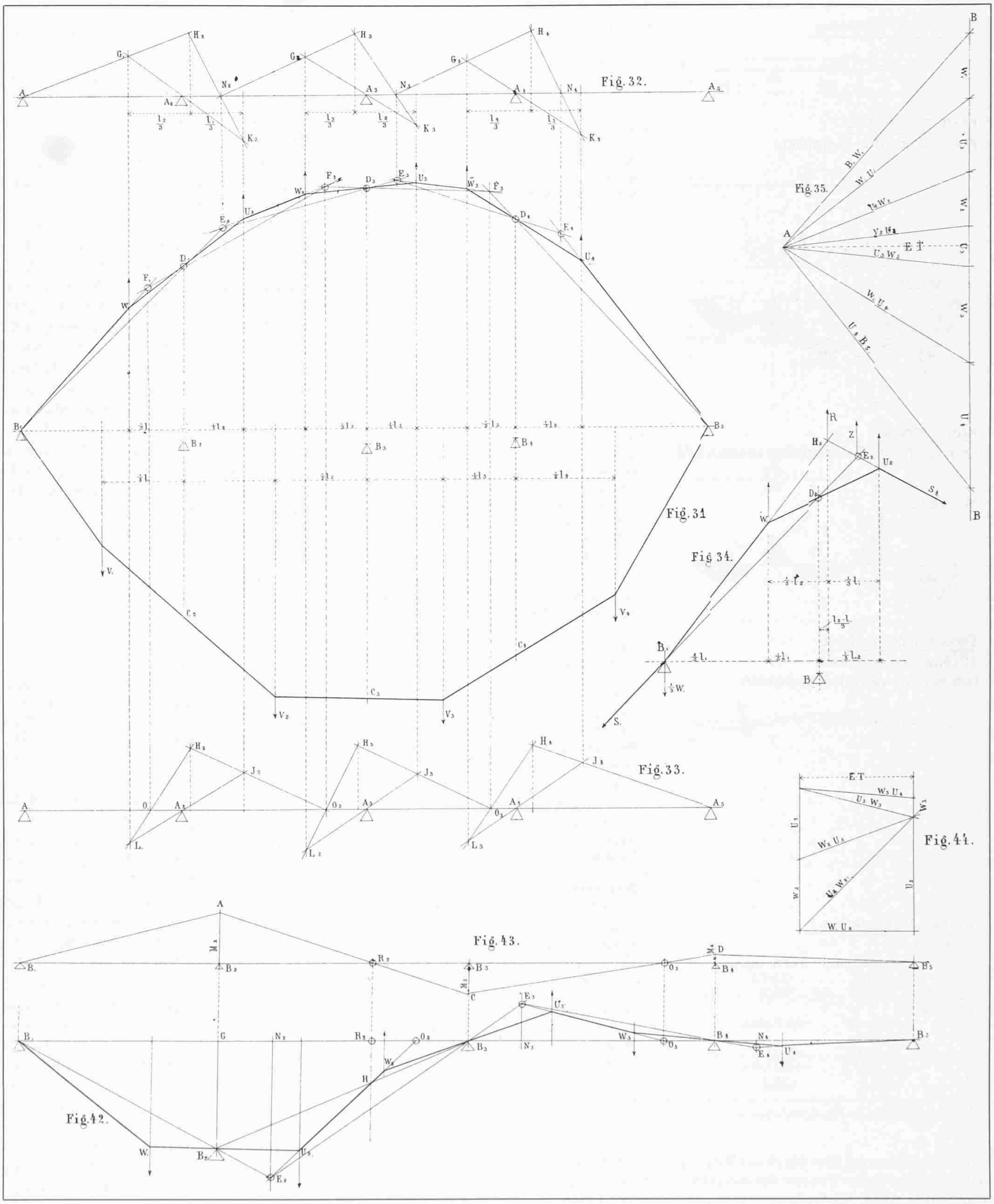
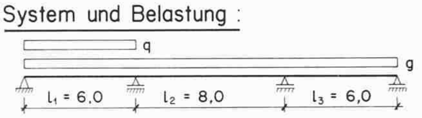


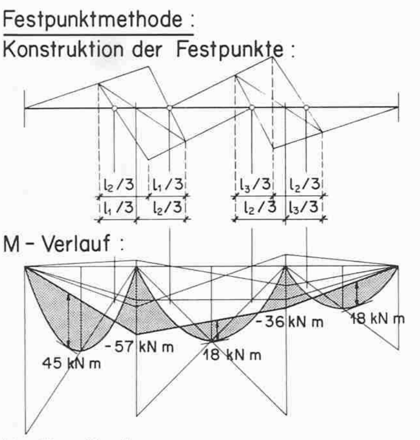
Bild 5. Konstruktion der Fixpunkte nach O. Mohr [13]

Graphische Methoden

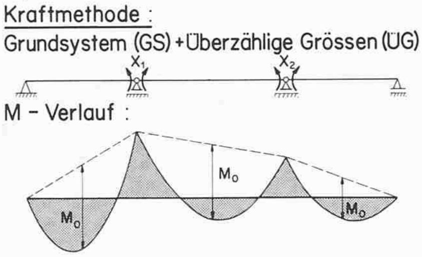
Obwohl bereits *Leonardo da Vinci* (1452–1519) das *Seilpolygon* in der Grundform benutzte und *Varignon* dessen Anwendung auf mehrere Kräfte zeigte, kann *C. Culmann* als der eigentliche Begründer der graphischen Statik angesehen werden. In seinem Buch «Die graphische Statik» von 1866 [7] und im ersten Band der zweiten Auflage von 1875 [12] – den zweiten Band konnte er selber nicht mehr publizieren – sind viele Aufgaben der Statik und Festigkeitslehre auf graphischem Weg anschaulich gelöst. Der mathematisch sehr gut geschulte Culmann gab oft auch noch die entsprechenden analytischen Lösungen an. Mit dem Seilpolygon konnten dank der Culmannschen Schlusslinie bei statisch bestimmt gelagerten Balken die Auflagerkräfte, die Querkräfte und die Momente bestimmt werden. Die vollständige graphische Behandlung von Durchlaufträgern gelang Culmann jedoch nicht. Dazu schreibt er in [7], Seite 278:



EI = konstant
g = 8 kN/m'
q = 8 kN/m'



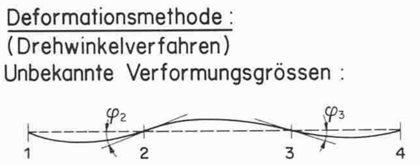
Vorgehen:
- Festpunkte konstruieren
- M_0-Momente und Kreuzlinienabschnitte ermitteln
- Schlusslinie und Momentenverlauf konstruieren



Vorgehen:
- Statisch bestimmtes GS wählen und ÜG (Kraftgrössen) einführen.
- Bestimmungsgleichungen für Unbekannte mittels Verträglichkeitsbedingungen (Clapeyronsche Gleichungen):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = -\delta_{10}$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = -\delta_{20}$$

δ_{ik}, δ_{io}: Formänderungsgrössen
- Lösung: $X_1 = -57{,}22$ kN m; $X_2 = -35{,}67$ kN m
- Berechnen der übrigen Schnittgrössen



Vorgehen:
- Unbekannte Verformungen (φ_2, φ_3) einführen
- Stabendmomente durch Superposition berechnen z.B. $M_{23} = S_{23} \cdot \varphi_2 + t_{23} \cdot \varphi_3 + M_{23}^0$
- Bestimmungsgleichungen für Unbekannte mittels Knotengleichgewicht:

$$(S_{21}+S_{23}) \cdot \varphi_2 + t_{23} \cdot \varphi_3 + M_{21}^0 + M_{23}^0 = 0$$
$$t_{32} \cdot \varphi_2 + (S_{32}+S_{34}) \cdot \varphi_3 + M_{32}^0 + M_{34}^0 = 0$$

S_{ik}, t_{ik}: Steifigkeiten; M_{ik}^0: Festeinspannmomente
- Lösung: $\varphi_2 = 4{,}9185$ $\varphi_3 = -0{,}1185$
- Berechnen der Stabendmomente
- Berechnen des definitiven Momentenverlaufes und der übrigen Schnittgrössen

Cross - Methode:

Festwerte:

S	3EI/l	4EI/l	4EI/l	3EI/l
κ	0,5	0,5	0,5	0,5
μ ←	0	0,5 ↔	0,5	0 →
Ausgleich:				
M°	-72,0	42,7	-42,7	36,0
		29,3		
	14,7	14,7	7,4	
	-57,3	57,4	-35,3	36,0
M	-57,3		-35,7	

Vorgehen:
- Festwerte (Steifigkeiten S, Verteilzahlen μ, Übergangszahlen κ) berechnen
- Festeinspannmomente berechnen
- Sukzessiver Ausgleich der Knotenmomente, bis die Knotengleichgewichtsbedingungen erfüllt sind → Stabendmomente M
- Berechnen des definitiven Momentenverlaufes und der übrigen Schnittgrössen

Bild 6. Methoden der Elastizitätstheorie

«Diese Bestimmung aber durch die Biegung, deren Gesetze in der Theorie der elastischen Linie ihren Ausdruck finden, entgeht gänzlich der graphischen Statik; wenigstens soweit wir derselben bis heute mächtig sind. Es wird gewöhnlich von dem Grundsatz ausgegangen, dass die Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens in jedem Querschnitt dem Moment der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte umgekehrt proportional seien. Nun sind aber diese Biegungen so unendlich klein und die Krümmungshalbmesser so unendlich gross, dass jede Construction derselben unmöglich ist und unmöglich sein wird, bis uns die Geometrie einfache Verhältnisse zwischen den entsprechenden Krümmungshalbmessern projectivischer Figuren liefert ... Da wir jedoch heute noch nicht im Stande sind, dies zu thun, *so müssen wir zur Rechnung greifen.*»

Culmann behandelte die Durchlaufträger mit einer *Kombination analytischer und graphischer Verfahren.* Mit Momentengleichungen berechnete er die Stützenmomente. Den restlichen Schnittkraftverlauf bestimmte er graphisch oder analytisch. Culmann, wie auch schon Clapeyron und Bresse, war bekannt, dass in einem nur durch ein Stützenmoment belasteten Feld die Lage des Wendepunktes der Biegelinie und somit auch die Lage des Momentennullpunktes (Fix- oder Festpunkt genannt) unabhängig von der Grösse des Momentes ist.

Als *Pionierleistung* auf dem Weg zur graphischen Behandlung von Ein- und Mehrfeldträgern kann ein Artikel von *O. Mohr* in der «Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover» aus dem Jahre 1868 [13] bezeichnet werden. Auf einfache Art ist in diesem Artikel dargelegt, dass bei bekanntem Momentenverlauf die Biegelinie eines Balkens der Momentenlinie unter einer fiktiven Last entspricht. Als fiktive Last muss das Biegemoment dividiert durch den Elastizitätsmodul und das Trägheitsmoment auf den Träger aufgebracht werden. Diese Aussage ist heute unter dem Namen *«Mohrsche Analogie»* bekannt. Doch dazu der Originaltext von Mohr:

«Aus der Vergleichung der beiden Ausdrükke

(4) $$H \frac{d^2 y}{dx^2} = k$$

und

(5) $$E \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T}$$

geht hervor, dass die elastische Linie eine Seilcurve ist, dass der Horizontalzug dieses Seils durch die constante Grösse E und die Verticalbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection durch die variable Grösse M/T dargestellt wird.»

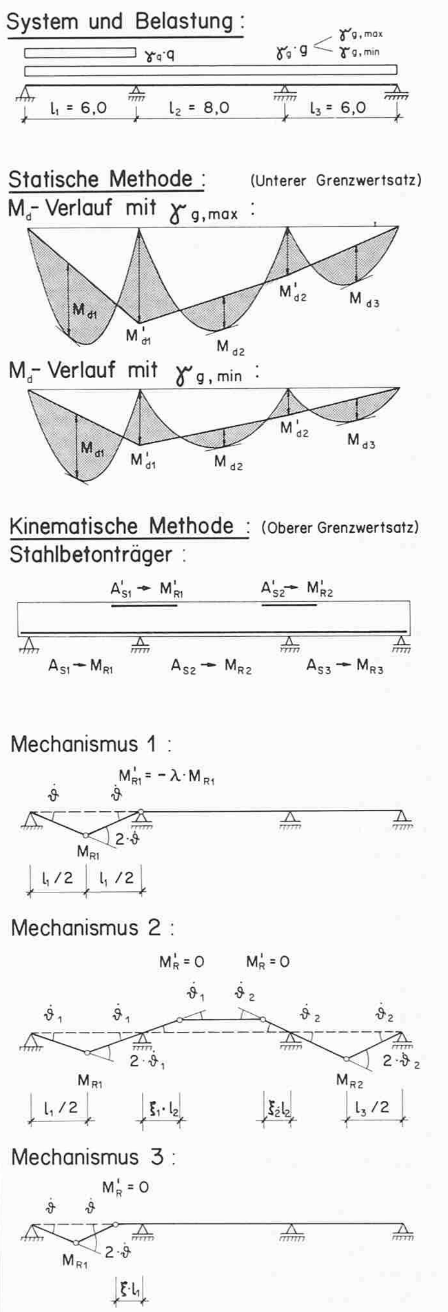
Dabei bezeichnet k die vertikale Belastung pro Längeneinheit auf ein vollkommen biegsames Seil, H die horizontale Seilkraft, M das Moment, E den Elastizitätsmodul und T das Trägheitsmoment. Mohr konnte somit die Biegelinie und auch die Stabenddrehwinkel eines Trägers mit beliebiger Belastung und beliebigem Verlauf des Trägheitsmomentes graphisch oder analytisch bestimmen. Ausgehend von der Tatsache, dass die Biegelinie eines kontinuierlichen Balkens eine stetige Kurve sein muss, stellte Mohr im gleichen Artikel dar, wie bei statisch unbestimmten Durchlaufträgern die unbekannten Stützenmomente und in der Folge der gesamte Momentenverlauf graphisch gewonnen werden kann. Mohr gelang es also, die Clapeyronschen Dreimomentengleichung graphisch zu lösen, womit die *Festpunktmethode* geboren war. Das aus der oben erwähnten Publikation entnommene Bild 5 veranschaulicht diese Tatsache deutlich.

Wie aus der Vorrede zur 2. Auflage seines Buches «Die graphische Statik» [12] sowie aus handgeschriebenen Notizen, die in der ETH-Bibliothek in Zürich aufbewahrt werden, hervorgeht, schien sich Culmann zu ärgern, dass er das

Mohrsche Lösungsverfahren nicht selber gefunden hatte. Jedenfalls lassen handgeschriebene Nachrechnungen und Auszüge, die Culmann von Mohrs Arbeiten machte, darauf schliessen, dass er dessen Methoden im vorgesehenen, aber nicht erschienenen 2. Band der 2. Auflage seines Werkes «Die graphische Statik» veröffentlichen wollte. Sein Schüler, Nachfolger und geistiger Erbe, *W. Ritter* (1847–1906), hat dann in seinem didaktisch ausgezeichneten Buch «Anwendungen der graphischen Statik» 3. Teil, Der kontinuierliche Balken [14], die Methode der Festpunkte umfassend dargelegt. Der im Vergleich zu Culmann offenbar bedeutend bescheidenere Ritter wird oft fälschlicherweise als Vater der Festpunktmethode bezeichnet. Ritter schreibt im Vorwort zu [14] selber:

«Die graphische Behandlung des kontinuierlichen Balkens stützt sich auf die Abhandlung, die vor etwa 30 Jahren Regierungsrat Professor Mohr der technischen Welt beschert hat. Selten wohl hat ein so einfacher Gedanke so reiche Früchte gezeitigt, wie das Mohr'sche Verfahren zum Zeichnen der elastischen Linie. Seitdem ist dem damals gelegten Fundamente Stein um Stein hinzugefügt worden, und heute sind wir so weit, dass wir nicht nur die alltäglichsten hierher gehörenden Fragen mit spielender Leichtigkeit beantworten können, sondern auch vor den schwierigsten Aufgaben, die uns die Bautechnik vorlegt, kaum mehr zurückschrekken.»

Die Festpunktmethode wurde später von *E. Suter* bis in alle Details ausgebaut. Nach seiner im Jahre 1916 erschienenen Dissertation: «Berechnung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern sowie Berechnung des mehrfachen Rahmens mit geraden Balken nach der Methode der Fixpunkte», und dann vor allem nach dem 734 (!) Seiten aufweisenden Buch «Die Methode der Festpunkte» aus dem Jahre 1923 [15], konnte mit der Festpunktmethode jedes beliebige Stabtragwerk behandelt werden. Beide Werke waren übrigens dem Andenken an W. Ritter gewidmet. Suters Werk enthält Angaben, Beispiele und Tabellen für konstante und variable Trägheitsmomente, gerade und bogenartige Stabachsen sowie unverschiebliche und verschiebliche Rahmen. Volle 40 Jahre konnte somit der Bauingenieur seine statischen Berechnungen mit den gleichen Theorien und den gleichen Hilfsmitteln durchführen, ein Wunschtraum, der heute in manch arg geplagtem Bauingenieur oft aufkommen mag (Bild 6).



Vorgehen:
- Statisch zulässiger Spannungszustand unter $\gamma_q \cdot q$ und $\gamma_{g,max} \cdot g$ wählen
  - · entsprechende M_0 aufzeichnen
  - · Schlusslinie wählen
- Querschnittswiderstand M_R so bestimmen, dass überall $M_d \leqq M_R / \gamma_R$ (Plastizitätsbedingung) erfüllt ist (M_R = Bruchwiderstand)
- Kontrolle, ob für $\gamma_{g,min}$ (günstiger Einfluss der Eigenlast) überall $M_d \leqq M_R / \gamma_R$ erfüllt ist

Vorgehen:
- Querschnittswiderstände als bekannt voraussetzen (evtl. bestimmen)
- Verschiedene Mechanismen annehmen
- zugehörige Gleichgewichtslasten (= obere Grenzwerte der Traglast) bestimmen (z.B. mit PVL)
- Mit kleinster Last Kontrolle der vorhandenen Sicherheit

$$\left.\begin{array}{r}\gamma_s = \gamma_q = \gamma_{g,max} = 1{,}4\\ \gamma_R = 1{,}3\end{array}\right\} \gamma = \gamma_s \cdot \gamma_R = 1{,}8$$

$\gamma = 1{,}82 > 1{,}8 \rightarrow$ i.O.

$\gamma = 1{,}93 > 1{,}8 \rightarrow$ i.O.

$\gamma = 1{,}81 > 1{,}8 \rightarrow$ i.O.

Bild 7. Methoden der Plastizitätstheorie

Plastische Berechnungsmethoden

Die Grenztragfähigkeit eines Tragwerkes hat verschiedene Wissenschaftler schon in der «vorelastischen» Zeit beschäftigt. Wie bereits erwähnt, versuchten schon *Galilei* und andere die Tragfähigkeit von Balken zu bestimmen. Coulomb stellte eine eigentliche Bruchtheorie der Gewölbe auf. Mit der Annahme von Bruchflächen im Erdmaterial gelang es ihm, den auf Stützmauern wirksamen Erddruck zu ermitteln. Die von Coulomb im Jahre 1773 vorgeschlagene Bruchtheorie, die er aus Festigkeitsuntersuchungen an einem auf Druck beanspruchten Mauerwerkpfeiler ableitete, wird in leicht modifizierter Form noch heute verwendet. Weitere Fliess- und Bruchbedingungen wurden von *Maxwell* (1856), *Tresca* (1868), *Mohr* (1889 und 1900) und *von Mises* (1913) entwickelt.

Kazinczy und *Kist* haben in ihren Arbeiten aus den Jahren 1914 und 1917 über statisch unbestimmte Träger zum erstenmal plastisches Verformungsverhalten mitberücksichtigt. *Ingerslev* (1921) und *Johansen* (1943) entwickelten die *Fliessgelenklinientheorie* für homogene Platten und Stahlbetonplatten (vgl. [16]). Die theoretischen Grundlagen der plastischen Berechnungsmethoden waren aber erst mit den auf Arbeiten von *Hill* (1951), *Drucker, Greenberg* und *Prager* (1951, 1952) zurückgehenden beiden *Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie* geschaffen. Die Grenzwertsätze gestatten, die Traglast von unten und von oben einzuschranken, wobei der statische Grenzwertsatz eine *untere* und der kinematische Grenzwertsatz eine *obere* Schranke der Traglast liefern.

Die Entwicklung von Baustatik und Konstruktion in den letzten 25 Jahren

Zwei wesentliche Faktoren haben die rasante Entwicklung der Berechnungs- und Bemessungsverfahren von Tragwerken in den letzten 25 Jahren geprägt: ein *differenzierteres Materialverständnis,* das nebst dem linearen auch zum Einbezug des nichtlinearen und plastischen Verformungsverhaltens in die Berechnung und Bemessung führte, sowie der *Computer.*

Nichtlineares und plastisches Materialverhalten

Die differenziertere Betrachtungsweise des Materials führte zu einer wesentlichen Änderung des Bemessungskonzeptes. Früher wurde ein Tragwerk unter Gebrauchslasten bemessen. Sowohl die Schnittkräfte wie auch die Spannungen in den Querschnitten wurden unter der Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens ermittelt. Mit der Bechränkung der so berechneten Spannungen meinte man, allen Forderungen bezüglich Sicherheit, Verhalten unter Gebrauchslasten, Dauerhaftigkeit etc. gerecht zu werden. Wie wir heute wissen, genügt die Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens wohl zur Beurteilung des Gebrauchszustandes von Stahl- und Holzkonstruktionen. Bei Stahlbetonkonstruktionen muss bereits zur Ermittlung von Deformationen unter Gebrauchslasten das nichtlineare Verformungsverhalten berücksichtigt werden, will man nicht böse Überraschungen erleben. Die effektive Tragfähigkeit aller Konstruktionen kann nur mit Hilfe von *Methoden der Plastizitätstheorie* zuverlässig ermittelt werden. Diese Tatsache wurde wohl bereits früher erkannt. B. Thürlimann, ein Pionier auf dem Gebiet der Plastizitätstheorie, verweist dazu in seinem Artikel «Zur Geschichte der Konstruktion und Theorie im Betonbau» [3] auf kritische Äusserungen von *E. Mörsch* und *R. Maillart.* Im Jahre 1938 schrieb Maillart in der Schweizerischen Bauzeitung:

«Für die Bemessung hat sich eine Berechnungsweise eingebürgert, die heute mit Recht von vielen Fachleuten kritisiert wird. ... Die jetzt übliche Berechnungsweise beruht auf dem Hookeschen Gesetz, einen sogenannten ‹Festwert› *n*, der jedoch in weiten Grenzen veränderlich ist, und auf sogenannten ‹zulässigen Spannungen›, die einen der Sicherheit entsprechenden Bruchteil von Streckgrenze und Betonfestigkeit darstellen sollen, was dadurch widerlegt wird, dass der Biegebruch allgemein nicht beim Erreichen eines bestimmten Mehrfachen der ‹zulässigen Spannungen› eintritt. Die gegenwärtige Berechnungsmethode ist also praktisch unzulänglich und zudem pädagogisch unerwünscht, da sie unrichtige Vorstellungen über das wahre Verhalten eines auf Biegung beanspruchten Betonquerschnittes vermittelt.»

Es dauerte noch fast 40 Jahre, bis diese Erkenntnisse in den schweizerischen Normen ihren Niederschlag fanden, wie nachfolgend am Beispiel des *Stahlbetons und Spannbetons* gezeigt wird. In den letzten 25 Jahren wurden aber grosse Anstrengungen unternommen, die Traglastberechnung und die Bemessung von Stahl-, Stahlbeton- und Spannbetontragwerken auf der Grundlage der Plastizitätstheorie zu vereinheitlichen (Bild 7).

Die 1956 in Kraft getretene SIA-Norm 162: «Normen für die Berechnung und Ausführung der Beton- und Eisenbetonbauten» [17] sind praktisch vollständig auf dem Konzept der zulässigen Spannungen unter Gebrauchslasten aufgebaut. Im Abschnitt Bemessung und zulässige Spannungen steht folgendes:

Art. 15:
1. Die Berechnung der Schnittkräfte hat auf wissenschaftlicher Grundlage zu erfolgen, unter Zulassung der im Eisenbeton notwendigen, vereinfachenden Voraussetzungen. (...)

5. Die Berechnung von Formänderungen kann unter der Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls durchgeführt werden. (Hookesches Gesetz, Superpositionsgesetz für die elastischen Formänderungen.)
6. Die Formänderungen können im allgemeinen mit den vollen Betonquerschnitten (ohne Abzug der Betonzugzone) unter Vernachlässigung der Stahleinlagen bestimmt werden.

Art. 17:
1. Der Eisenbetonquerschnitt ist als Verbundquerschnitt in Rechnung zu stellen, wobei der Beton und die Stahleinlagen als elastische Baustoffe zusammenwirken. Dabei ist die Verhältniszahl n des Elastizitätsmoduls von Zug- und Druckarmierung zu demjenigen von Beton sowohl in den Zug- wie in den Druckzonen $n = E_e/E_b = 10$ zu setzen.
2. Beim Spannungsnachweis wird angenommen, dass die Zugspannungen im Beton durch die Stahleinlagen allein aufgenommen werden.

In der gleichen Norm wurden in der Schweiz erstmals *Vorschriften über vorgespannten Beton* erlassen. Im letzten Artikel des Kapitels «Vorgespannter Beton» wird neben dem Nachweis der zulässigen Spannungen ganz schüchtern erstmals ein Bruchsicherheitsnachweis verlangt.

Art. 70:
Die Bruchsicherheit für Biegungsmomente und Querkräfte, bei gleichzeitiger Wirkung von Eigengewicht und Nutzlast, muss mindestens 1,8 betragen.

In der 1968 revidierten Norm SIA 162 [18] wird wohl verlangt, dass eine Bemessung sowohl ein normales Verhalten der Bauwerke unter Gebrauchslasten als auch eine ausreichende Bruchsicherheit sicherstellt. Die Bemessung wird aber fast ausschliesslich über zulässige Spannungen geregelt, wie Art. 3.02[6] zeigt:

«Im allgemeinen wird jedoch der Nachweis ausreichender Bemessung durch den Vergleich der vorhandenen mit den zulässigen Spannungen der Art. 3.06 bis 3.17 erbracht. Die vorgeschriebenen zulässigen Spannungen tragen den in Absatz 5 erwähnten Grundsätzen Rechnung.»

In den 1976 in Kraft getretenen Richtlinien 34 [19] und 35 [20] zur Norm SIA 162 wird die Ermittlung des Bruchwiderstandes von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken sowie von Druckgliedern geregelt. In der Richtlinie 34 wurde in der Schweiz erstmals die Bemessung eines Tragwerkes nach der Plastizitätstheorie durch Nachweis einer genügenden Traglast in einer Norm verankert.

Auch international hat sich die Bemessung auf die Grenzzustände der Tragfähikeit und der Gebrauchsfähigkeit durchgesetzt. In der CEB/FIP-Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton (1978) [21] sind für den rechnerischen Nachweis folgende Grundsätze aufgeführt:

6.1 *Allgemeines*
Um für das Tragwerk einen angemessenen Grad an Sicherheit und Gebrauchsfähigkeit zu erreichen, sind – gemäss dem Verfahren mit Teilsicherheitsbeiwerten – verschiedene Grenzzustände und verschiedene repräsentative Werte für die Einwirkungen entsprechend der nachfolgenden Abschnitte 6.2 und 6.3 zu betrachten.

In den meisten Fällen ist nachzuweisen, dass:

a) das Tragwerk gegenüber Versagen eine angemessene Tragfähigkeit besitzt, indem die Rechenwerte der aufzunehmenden Schnittgrössen mit den entsprechenden von den Querschnitten aufnehmbaren Werten verglichen werden:

$$S_{act,d} \leqq R_d \qquad [6.1]$$

b) das für die Gebrauchsfähigkeit massgebende Kriterium, z.B. die Begrenzung der Durchbiegung oder der Rissbreite, eingehalten wird.

Die Schnittgrössen und die Widerstände können nach der CEB/FIP-Mustervorschrift mittels linearem, nichtlinearem und plastischem Verformungsverhalten ermittelt werden.

Der in Revision stehenden Norm SIA 162 [22] liegt ebenfalls das gleiche Konzept zugrunde. Im speziellen wird in dieser Norm klar ausgedrückt, dass die Plastizitätstheorie die geeigneten Grundlagen zur Ermittlung der Tragfähigkeit liefert. Im Kapitel Tragfähigkeit sind folgende Grundsätze zur Ermittlung des Widerstandes aufgeführt:

1 Das Tragverhalten und der Kraftfluss in einem Tragwerk sind mit einem Modell nachzubilden, das die wesentlichen Einflussgrössen enthält.

An diesem Modell wird mit Hilfe der Plastizitätstheorie der Wiederstand bestimmt. Eine mathematisch geschlossene Lösung ist nur in einfachen Fällen möglich, hingegen erlauben die Grenzwertsätze eine Eingrenzung des Widerstandes am Modell.

2 Im allgemeinen sind die inneren Kräfte nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie zu ermitteln, beispielsweise nach der Theorie elastischer Tragwerke. Danach ist von einem Gleich-

gewichtszustand auszugehen, welcher die statischen Randbedingungen erfüllt und die Fliessbedingungen nirgends verletzt.

3 Das für die Umlagerung der inneren Kräfte notwendige Verformungsvermögen muss gewährleistet sein.

4 Eine ausschliessliche Verwendung der kinematischen Methode nach der Plastizitätstheorie ist nur zulässig, sofern durch ausreichende Erfahrung bekannt ist, dass für den untersuchten Fall die damit ermittelten oberen Grenzwerte für den rechnerischen Widerstand nicht wesentlich vom wirklichen Widerstand abweichen, und dass der angenommene Mechanismus dem wirklichen Tragverhalten nahe kommt. In der Regel trifft dies für hinsichtlich Geometrie, Bewehrungsanordnung und Lastkonfigurationen einfache Systeme zu.

Der Computer

Es kann nicht Thema dieses Beitrages sein, den Einfluss der seit den sechziger Jahren immer leistungsfähiger werdenden elektronischen Rechner auf die Entwicklung der Baustatik umfassend darzustellen. Eine grosse Flut von Artikeln, Büchern und Computerprogrammen wurde in den letzten 20 Jahren auf uns losgelassen.

Nachdem man anfänglich einfach die Handrechenmethoden der Baustatik programmierte und sich so die gesteigerte Rechenkapazität der Computer zunutze machte, wurde bald einmal eine eigentliche Computerstatik entwickelt. Die Stabtragwerksprogramme sind heute vorwiegend auf der *verallgemeinerten Deformationsmethode* aufgebaut. Dies trifft auch für das in Bild 8 verwendete STATIK-Programm zu. In jedem freien Knoten treten bei ebenen Tragwerken drei (zwei Verschiebungen und eine Rotation) und bei räumlichen Tragwerken sechs (drei Verschiebungen und drei Rotationen) unbekannte Verschiebungsparameter auf. Mit Hilfe von Knotengleichgewichtsbedingungen erhält man die zur Bestimmung der Unbekannten erforderliche Anzahl Gleichungen.

Eine sowohl auf Stab-, Platten-, Scheiben- und Schalentragwerke anwendbare Methode ist die *Methode der finiten Elemente*. Die Grundidee dieses Verfahrens ist das gleiche wie bei der verallgemeinerten Deformationsmethode. Ein Tragwerk wird in geometrisch einfache, sogenannte finite Elemente unterteilt. Diese Elemente können Stab-, Platten-, Scheiben- oder Schalenelemente sein. Die Verbindungspunkte dieser Elemente werden als Knoten definiert, und entsprechend dem Tragwerkstyp treten dort wieder unbekannte Verschiebungsparameter auf.

Durch Wahl geeigneter Verschiebungsansätze und Anwendung von Energieprinzipien können die erforderlichen Steifigkeiten berechnet werden. Durch Formulieren des Knotengleichgewichts erhält man wieder die zur Bestimmung der Unbekannten erforderlichen Gleichungen. Dies führt bereits bei einfachen Tragwerken auf grosse Gleichungssysteme. Es ist leicht einzusehen, dass die aufwendige Berechnung der Steifigkeiten und das Lösen der Gleichungssysteme nur dank leistungsfähigen Computern möglich ist.

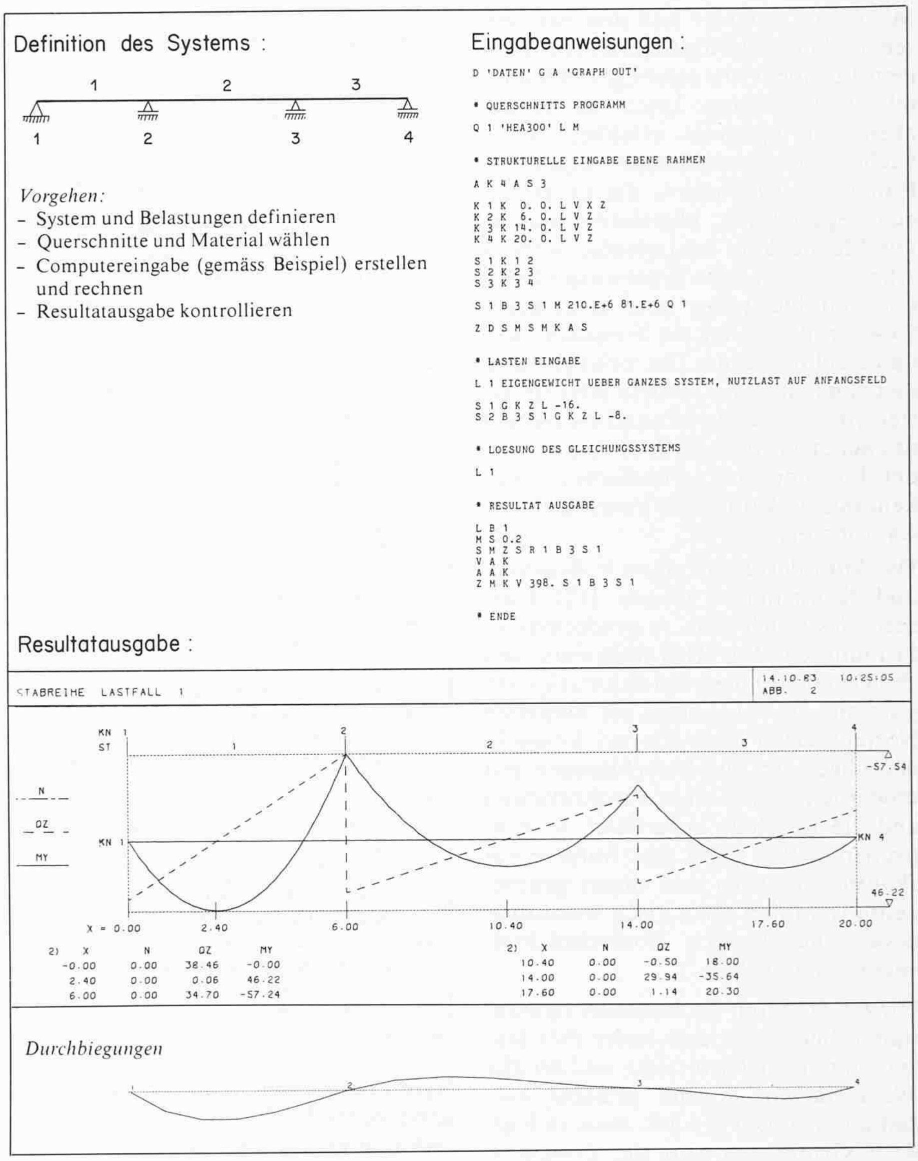


Bild 8. Computerprogramm «Statik» (Rechenzentrum ZTL, Horw)

Zur Ermittlung der Schnittkräfte mittels der Elastizitätstheorie stehen heute sehr gute *Applikationsprogramme* zur Verfügung. Programme, die eine Nichtlinearität bezüglich System (Formulierung des Gleichgewichtes am deformierten System) und Material berücksichtigen, sind ebenfalls vorhanden. Sie sind aber oft schwierig anzuwenden und mit einem sehr grossen Rechenaufwand verbunden. Für die Berechnung der Tragfähigkeit, eine immer wichtiger werdende Aufgabe, sind erst die auf der Plastizitätstheorie aufbauenden theoretischen Grundlagen bereitgestellt. Es sind auch bereits einige Einzelprogramme vorhanden; diese sind aber in der Praxis nur in Ausnahmefällen anwendbar. Die Plastizitätstheorie ist im Moment noch eine Domäne der Handrechnung. Ein weiterer Entwicklungsschritt bahnt sich unter dem Schlagwort *Computer Aided Design (CAD)* an. In nicht allzuferner Zukunft werden uns vom Computer und vom Plotter auch noch die Schalungs- und Armierungspläne unserer Tragwerke geliefert. Ein goldenes Zeitalter kündigt sich an – hoffentlich nicht nur für die Schadenexperten!

Forderungen an die heutige Ausbildung in Baustatik und Konstruktion

«Was nützt der Tiger im Tank, wenn ein Esel am Steuer sitzt.» Diesen kernigen Ausspruch des kürzlich verstorbenen Bundesrates Willi Ritschard können wir auch auf die Tätigkeit der Ingenieure in Baustatik und Konstruktion übertragen.

Mit dem Computer und den baustatischen Applikationsprogrammen steht dem Ingenieur ein mächtiges Hilfsmittel zur Verfügung. Leicht zu handhabende Programme erlauben heute auch dem mittelmässigen Ingenieur, Probleme anzupacken, die er früher dem Spezialisten überlassen musste. Die Möglichkeit, haufenweise numerische und graphische Ergebnisse zu produzieren, bietet aber noch lange keine Gewähr, dass einer ein Tragwerk richtig berechnen kann. Der sinnvolle Einsatz von mächtigen Mitteln setzt ein gesteigertes Verantwortungsbewusstsein des Benützers dieser Mittel voraus. Nur der Ingenieur mit gründlichen Fachkenntnissen kann diese Verantwortung wahrnehmen.

Die Anforderung an einen in Baustatik und Konstruktion tätigen HTL-Ingenieur lässt sich etwa folgendermassen formulieren: Der HTL-Ingenieur soll *Probleme mit normalem Schwierigkeitsgrad* auf der Grundlage der aktuellen Normen sicher lösen können. Er soll in der Lage sein, die Berechnungen mit modernen Hilfsmitteln durchzuführen und die Resultate zuverlässig zu kontrollieren. Vor allem aber muss er ein *Problem erkennen* und dieses gegebenenfalls an den theoretisch wesentlich besser ausgebildeten Hochschulabsolventen weitergeben.

Für die Höheren Technischen Lehranstalten heisst das, dass heute ihre Studenten mit *der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie* vertraut gemacht werden müssen. Der Student muss sich gewisse Grundkenntnisse der *Computerstatik* aneignen können. Das sogenannte «statische Gefühl» muss noch stärker als früher ausgebildet werden. Dazu muss der Kräfteverlauf in einem Tragwerk mit einfachen physikalischen Modellen qualitativ und quantitativ studiert werden. Dem Studenten sind dazu sowohl angepasste graphische Methoden wie einfache Handrechnungsmethoden zu vermitteln.

Damit ein Ingenieur auf dem Gebiet der Baustatik und Konstruktion tätig sein *darf*, muss in der Ausbildung ein gewisser *Schwellenwert* erreicht werden. Die Ausbildungszeit am Zentralschweizerischen Technikum Luzern, Abteilung Tiefbau, beträgt heute 225 Semesterstunden, die auf drei Jahre verteilt sind. Davon entfallen auf die Fächer Mechanik und Baustatik 24, Stahlbeton 18, Stahlbau 12 und Holzbau 7 Semesterstunden (Vorlesungs- und Übungsstunden). Die zur Verfügung stehenden Stunden haben sich in den letzten 25 Jahren praktisch nicht geändert.

Als Dozent für Baustatik und Stahlbeton stelle ich fest, dass die vorher dargelegten Forderungen mit den zur Verfügung stehenden Stunden nicht oder nur teilweise erfüllt werden können. Wohl kann der Baustatikunterricht teilweise gestrafft werden. Indem man die sowohl für die Elastizitäts- wie auch für die Plastizitätstheorie gültigen Prinzipien und Gesetze (Gleichgewicht, Kinematik) herausarbeitet, kann man beide Theorien gemeinsam behandeln. Gesamthaft wird der Stoffumfang aber trotzdem wesentlich vergrössert.

In naher Zukunft wird man über Massnahmen diskutieren müssen, um das gesteckte Ausbildungsziel zu erreichen. Eine Stundenreduktion in den allgemeinbildenden und den mathematisch-physikalischen Fächern steht ausser Diskussion. Eine Stundenverlagerung unter den verschiedenen bautechnischen Fächern ist nur beschränkt möglich, da der Stoffumfang auch auf andern Gebieten zugenommen hat. Eine vermehrte Spezialisierung während der 3jährigen Ausbildung an einer HTL scheint mir verfehlt. Man kann vielleicht durch gewisse Schwerpunkte in Konstruktionsübungen exemplarisch ein Gebiet vertiefter behandeln. Will man aber das Ausbildungsziel gegenüber früher nicht wesentlich ändern, wird man ernsthaft über eine *Verlängerung der Ausbildungszeit* diskutieren müssen.

Einem erfolgreichen HTL-Absolventen steht heute die Möglichkeit offen, nach einem Vorbereitungsjahr direkt ins 5. Semester der Eidgenössischen Technischen Hochschule einzutreten und dort das ETH-Diplom zu erwerben. Dieses 3½ Jahre dauernde Zusatzstudium wird aber eine Ausnahme bleiben. Mit dem HTL-Studium soll ein Absolvent in der Regel eine *abgeschlossene Berufsausbildung* erhalten. Selbstverständlich muss sich der in die Praxis eintretende Ingenieur dauernd um eine *fachliche Weiterbildung* bemühen. Aber gerade in einer wirtschaftlich rauhen Zeit sind die privaten Betriebe nur beschränkt in der Lage, ihr technisches Kader selber weiterzubilden. Mir scheint, dass die eidgenössischen und kantonalen Behörden *den Technischen Hochschulen* und *den Höheren Technischen Lehranstalten* klare Aufträge bezüglich vermehrter Weiterbildung erteilen sollten. Die damit verbundenen finanziellen Aufwendungen wären *Wirtschaftsförderung im besten Sinn.*

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *P. Ritz*, Ahornsteig 6, 6047 Kastanienbaum.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Suter:* «Die Methode der Festpunkte», Dritte Auflage, Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1951

[2] *E. Anderheggen:* «Grundlagen der Computerstatik», Vorlesung, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1975

[3] *B. Thürlimann:* «Zur Geschichte der Konstruktion und Theorie im Betonbau», Sonderdruck aus dem Jahresbericht 1980 des Vereins Schweiz. Zement-, Kalk- und Gips-Fabrikanten, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1981

[4] *I. Szabó:* «Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihre wichtigsten Anwendungen», Zweite Auflage, Birkhäuser Verlag Basel, Boston, Stuttgart, 1979

[5] *H. Straub:* «Die Geschichte der Bauingenieurkunst», Zweite Auflage, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1964

[6] *S.P. Timoshenko:* «History of Strength of Materials», McGraw-Hill Book Company New York, Toronto, London, 1953

[7] *K. Culmann:* «Die graphische Statik», Verlag von Meyer und Zeller, Zürich, 1866

[8] *O. Mohr:* «Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen». Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Band VI, 1860

[9] *H. Müller-Breslau:* «Die graphische Statik der Baukonstruktionen», Zweiter Band. 1. Abteilung, Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1907

[10] *H. Müller-Breslau:* «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen», Vierte Auflage, Alfred Kröner Verlag, Leipzig, 1913

[11] *F. Stüssi:* «Baustatik II», Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1954

[12] *C. Culmann:* «Die graphische Statik», Zweite Auflage, erster Band, Verlag von Meyer und Zeller, Zürich, 1875

[13] *O. Mohr:* «Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen», Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Band XIV, 1868

[14] *W. Ritter:* «Anwendungen der graphischen Statik», nach Prof. Dr. C. Culmann, Dritter Teil. Der kontinuierliche Balken, Verlag von Albert Raustein, Zürich, 1900

[15] *E. Suter:* «Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen», Verlag von Julius Springer, Berlin, 1923

[16] *A. Sawczuk* und *T. Jaeger:* «Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten», Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963

[17] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: «Normen für die Berechnung und Ausführung der Beton- und Eisenbetonbauten», Norm Nr. 162, Zürich, 1956

[18] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: «Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton», Norm SIA 162, Zürich, 1968

[19] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: «Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken», Richtlinie 34 zu Norm SIA 162 (1968), Zürich, 1976

[20] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: «Bruchsicherheitsnachweis für Druckglieder», Richtlinie 35 zu Art. 3 08, 3 09, 3 24 der Norm SIA 162 (1968), 1976

[21] Euro-Internationales Beton-Komitee/Internationaler Spannbeton-Verband: «CEB/FIP-Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton», Band II, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, 1978

[22] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: «Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbauten», 3. Gesamtentwurf zur Revision der Norm 162, Zürich, 1983