

**Zeitschrift:** Schweizer Ingenieur und Architekt  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 101 (1983)  
**Heft:** 48

**Artikel:** Rechnergestützte Laborarbeiten im Bereich der Mechanik  
**Autor:** Ritter, Peter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-75241>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Rechnergestützte Laborarbeiten im Bereich der Mechanik

Von Peter Ritter, Horw

In der Einleitung wird am Beispiel eines aus Stäben bestehenden mechanischen Modells der Unterschied hervorgehoben zwischen dem konventionellen Vorgehen und den auf die Möglichkeiten des Computers ausgerichteten Methoden. Numerisch zu lösende Differentialgleichungssysteme erlauben die Berechnung mechanischer Systeme, welche einer geschlossenen Lösung nicht zugänglich sind. Das Beschreiben dieser neuen Wege stellt eine Herausforderung an den heutigen und künftigen Ingenieur dar.

Das Berechnungsmodell für das Finite Stabelement und das daraus aufgebaute Stabsystem wird mathematisch beschrieben, und die Lösungswege mit Hilfe von Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen werden aufgezeigt. Schwingende Stabsysteme erfordern eine Erweiterung des Berechnungsmodells. Dafür eignen sich Trägheitsmatrizen, welche am Finiten Stabelement herzuleiten sind. Die Überlagerung des Steifigkeits- und Trägheitseinflusses erfolgt in geschlossener Form am Stabelement und wird durch eine numerische Matrizenmethode auf den Teilstab erweitert. Die Lösung des Eigenwertproblems für die resultierende Koeffizientenmatrix des Systems geschieht durch Probieren nach herkömmlichen iterativen Methoden.

Die Anwendung der beschriebenen Methoden an drei sehr unterschiedlichen Stabsystemen – im Rahmen von schulischen Laborversuchen – erlaubt eine Kontrolle der Computerberechnungen hinsichtlich Wirksamkeit und Innovationsgehalt.

## Einleitung

### Rechenanlagen am Technikum

Seit dem Jahre 1964 kann an unserer Schule, die seit 25 Jahren besteht, mit einer *periodisch erneuerten Rechenanlage* gearbeitet werden. Die gegenwärtig installierte Anlage ist die vierte innerhalb dieser Zeitspanne. Die Speicherkapazität der zugehörigen Computer-Zentraleinheiten haben sich dabei um den Faktor 100 vergrössert. Externe Speicher stehen heute für eine praktisch unbeschränkte Datenmenge zur Verfügung. Eine dezentrale Peripherie mit Bildschirmterminals erlaubt den Zugriff auf die Rechenanlage vom Labor aus.

Dem Ingenieur eröffnen sich dadurch neue Möglichkeiten und neue Wege. Ihre Erschliessung stösst auf *Schwierigkeiten*, deren Umfang überraschend gross ist. Das Ausmass und die Zahl der Schwierigkeiten hängen mit den besonderen Anforderungen zusammen, die an eine genügende Ausbildung zu stellen sind. Sie können durch Schlagworte nicht überwunden werden. Im folgenden wird versucht, besondere *Merkmale rechnergestützter Ingenieurarbeit* zu beleuchten.

### Problembeschreibung: Mechanisches Modell

Der *Stab* spielt als einfacher Festkörper in der technischen Mechanik eine überaus wichtige Rolle: Man denke etwa an Stab-Tragwerke in der Statik, an Biegeträger in der Festigkeitslehre oder an schwingende Schaufeln oder rotierende Wellen in der Dynamik. Das *elastische*

*Biegeverhalten* des Stabes lässt sich mathematisch durch eine einzige Differentialgleichung beschreiben, und zwar sowohl für den ruhenden wie auch für den schwingenden Zustand. Ihre Lösung durch *Integration in geschlossener Form* gilt als klassisches Schulbeispiel und kann bei vielen praktischen Anwendungen als brauchbare Annäherung der Wirklichkeit betrachtet werden.

Sobald nun aber ein aus vielen Teilstäben mit unterschiedlicher Geometrie oder Elastizität *zusammengesetzter Stab* betrachtet wird, versagen die geschlossenen Methoden. Es müssen neue Wege beschritten werden, welche dank den neuen Möglichkeiten des Computers offen stehen.

Die Beschreibung eines mechanischen Systems erfordert eine sehr differenzierte Betrachtungsweise von gleichzeitig auftretenden mechanischen Zusammenhängen. Sie findet die ihr angemessene Darstellung durch *lineare Differentialgleichungssysteme* mit einer genügend grossen Anzahl von Freiheitsgraden als Systemkoordinaten. Die hohen Anforderungen an das Abstraktionsvermögen des Ingenieurs und der grosse numerische Aufwand machen es zunehmend schwieriger, die Qualität der Resultate zutreffend zu beurteilen.

Parallel durchgeführte *Versuche im Labor* erlauben eine kritische Würdigung. Die Wechselwirkung zwischen Versuchsanordnung und Berechnungsmodell erweist sich dabei als sehr hilfreich. Die im letzten Abschnitt zu beschreibenden Laborarbeiten umfassten Schwingungsversuche an Stabsystemen sehr unterschiedlicher Struktur:

- Rahmenkonstruktion einer Liftkabine
- Wellenstrang bzw. Modellrotor eines Motorschiffes
- Metallschlauch bzw. Kompensator

Eine der hauptsächlichsten Herausforderungen an den Ingenieur besteht heute darin, diese neuen Wege auch tatsächlich zu beschreiten. Eine erste Schwierigkeit entsteht dadurch, dass die *theoretischen Zusammenhänge* an einem System zu formulieren sind, wozu sich das mathematische Werkzeug der Matrizenrechnung als notwendig erweist. Eine zweite Schwierigkeit ergibt sich daraus, dass der *numerische Aufwand* zur Lösung des Problems die Möglichkeiten eines Taschenrechners übersteigt. Schliesslich liegt eine dritte Schwierigkeit darin, dass der Lösungsweg in die *Form eines Rechenprogrammes* gebracht werden muss. Dies erfordert die Kenntnis einer Computersprache sowie von Software-Entwicklungsregeln.

Diese Schwierigkeiten lassen sich unter bestimmten Bedingungen umgehen, indem man *fertige Software-Pakete* kauft oder deren Benutzungsrechte erwirbt, welche die jeweiligen Problemlösungen anbieten. Wenn diese Pakete und die erforderlichen Eingabelisten durch Hilfskräfte gehandhabt werden, welche nur die Handgriffe zur Computer- oder Terminalbedienung kennen, so ist die Qualität der Ergebnisse nicht gewährleistet. Ihre kritische Überprüfung durch Ingenieure ist notwendig.

Software-Pakete – als selbständige Produkte – werden ständig an Bedeutung gewinnen, besonders in Verbindung mit der Rationalisierung der Konstruktions- und Zeichnerätigkeit (Computer Aided Design). Die Mitwirkung bei der Herstellung und Anwendung dieser neuen Produkte gehört heute schon zum Tätigkeitsfeld des Ingenieurs. Seine Grundausbildung muss deshalb entsprechend breiter angelegt werden. Anhand von schulischen Arbeiten mit Stabsystemen – in Verbindung mit Laborversuchen – soll diese Problematik illustriert werden.

## Stab und Stabsystem

### Berechnungsmodell für ruhende Stäbe

Die *mathematische Beschreibung* des Finiten Stabelementes von der endlichen Länge  $l$  erfolgt durch das System von 5 Differentialgleichungen nach Bild 1. Fall 1 erfasst das elastische Verhalten nach der elementaren Biegetheorie, während Fall 2 den Schubeinfluss und den Einfluss der Membrankraft (Seil- und Knickeffekt) berücksichtigt.

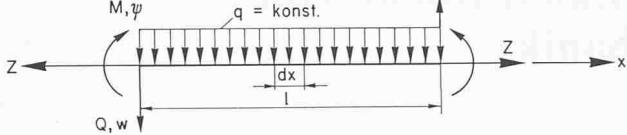
Zustandsgrößen (abgeleitet nach x)						Zustandsgrößen		
$[z']$	Fall 1)			Fall 2)		$[z]$		
$w'$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \left(-\frac{1}{GA_S}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$		$w$		
$\psi'$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{EI}\right) & 0 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{EI}\right) & 0 \end{bmatrix}$		$\psi$		
$Q'$	$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{Z}{EI}\right) & 1 \end{bmatrix}$		$Q$		
$M'$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & -Z & \left(1 + \frac{Z}{GA_S}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$		$M$		
$q'$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		$q$		
	(1)	ohne Schubeinfluss:			(2)	mit Schubeinfluss:		
		$w' = \psi$				$w' = \psi - \frac{Q}{GA_S}$		
		$w = \text{Auslenkung der elastischen Linie}$				$G = \text{Schubmodul}$		
		$\psi = \text{Neigungswinkel des Querschnitts}$				$A_S = \text{Schubquerschnitt}$		
		ohne Membrankraft Z:				mit Membrankraft Z:		
		$Q' = q$				$Q' = -\frac{ZM}{EI} + q$		
		$M' = -Q$				$M' = -Z\psi - Q + \frac{ZQ}{GA_S}$		
geschlossene Darstellung	(3) $w^{IV} = \frac{q}{EI}$							
Matrizen-Darstellung	(4) $[z'] = [A] \cdot [z]$				$[z'] = [A] \cdot [z]$			

Bild 1. Differentialgleichungssysteme und Zustandsgrößen. E = Elastizitätsmodul, I = Flächenmoment des Querschnittes

## Lösungsmethode

### Übertragungsmatrizen

Die Lösung des Systems von 5 Differentialgleichungen 1. Ordnung führt auf Übertragungsmatrizen, welche den Zustand an der Selle i mit dem Zustand an der Stelle (i + 1) verknüpfen. Im Falle 1 ist die Übertragungsmatrix als *geschlossene Lösung* erhältlich. Im Falle 2 führt eine *Reihenentwicklung* zum Ziel [1], welche mit einem *grossen numerischen Aufwand* verbunden ist.

Der Computer liefert nach entsprechender Programmierung die numerische Lösung dank guter Konvergenz sehr rasch. Dafür erweist sich die Herstellung eines Unterprogrammes (Subroutine) als zweckmässig.

$$(5) \quad [z]_{i+1} = [e^{[A]l}] \cdot [z]_i$$

Reihenentwicklung für die Übertragungsmatrix:

$$(6) \quad [U] = [e^{[A]l}] = [E] + [A]l + \frac{1}{2!}[A]^2 l^2 + \frac{1}{3!}[A]^3 l^3 + \dots$$

Gleichung (6) stellt die Lösung des Differentialgleichungssystems für den Stab endlicher Länge dar, mit konstanter

Geometrie und konstanten Materialeigenschaften. Es handelt sich um das elastische Verhalten des Finiten Elementes eines grösseren Systems, wenn man von diesem endlichen Stabstück auf ein Stabsystem übergeht. Die einfache Natur des Stabes, welche sich durch die dominierende Längsabmessung auszeichnet, erlaubt, das Berechnungsmodell für das Element einfach zu halten – im Vergleich etwa zu einem Schalenelement. Dank der Rechnerunterstützung kann der Schubeinfluss und die Membrankraftwirkung – in Form der Reihenentwicklung – berücksichtigt werden. Dies kann für einzelne praktische Anwendungen von ausschlaggebender Bedeutung sein, wie die Laborarbeiten zeigen.

*Abspaltung des Übertragungsvektors /P/ zu folge der Belastungsintensität q*

Die Übertragungsmatrix [U] kann wie folgt in Teilmatrizen aufgeteilt werden:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} w \\ \psi \\ Q \\ M \\ q \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & P_1 \\ U_{21} & U_{22} & P_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \psi \\ Q \\ M \\ q \end{bmatrix}_i$$

Abkürzungen für Verformungen:

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix} = [f]$$

Abkürzungen für Beanspruchungen:

$$\begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = [F]$$

$$(8) \quad \begin{bmatrix} f \\ F \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U_i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \\ F \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} P_i \\ 0 \end{bmatrix} \cdot q_i$$

$$(9) \quad [z]_{i+1} = [U_i] \cdot [z]_i + [P_i] \cdot q_i$$

$[U_i] \cdot [P_i]$  sind feldweise (elementweise) durch die Reihenentwicklung bestimmt.  $q_i$  ist die feldweise (elementweise) als konstant vorausgesetzte Belastungsintensität.

Für die Unterstützung der Laborarbeiten stand als Berechnungsmodell ein *einfach zusammenhängendes Stabsystem* im Vordergrund. Das Stabsystem ist durch sogenannte Knoten – d. h. reale oder fiktive Lagerstellen – unterteilt, an welchen Rand- oder Zwischenbedingungen nach freier Wahl eingeführt werden können, inklusive federnde Lager. Das vorangehend besprochene Finite Stabelement wird als *Feld* bezeichnet. Als *Teilstab* wird der zwischen zwei

	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	w <sub>5</sub>	w <sub>6</sub>	w <sub>7</sub>	w <sub>8</sub>	w <sub>9</sub>	w <sub>10</sub>
1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$						
2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$						
3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33} + b_{11}$	$a_{34} + b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$				
4	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43} + b_{21}$	$a_{44} + b_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$				
5			$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33} + c_{11}$	$b_{34} + c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$		
6			$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43} + c_{21}$	$b_{44} + c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$		
7					$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33} + d_{11}$	$c_{34} + d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$
8					$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43} + d_{21}$	$c_{44} + d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$
9							$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34}$
10							$d_{41}$	$d_{42}$	$d_{43}$	$d_{44}$

Bild 2. Koeffizientenmatrix, gebildet mit 4 Teilstäben, 5 Knoten, 10 Freiheitsgraden (Randbedingungen und äussere Belastungen sind vernachlässigt)

Knoten liegende Stabteil definiert. Er setzt sich aus einer endlichen Anzahl Feldern zusammen. Das Stabsystem schliesslich besteht aus einer Anzahl fluchtend angeordneter Teilstäbe.

Das *elastische Verhalten* eines Teilstabes mit  $n$ -Feldern wird durch fortgesetzte Multiplikation der zugehörigen Übertragungsmatrizen erfasst:

$$(10) [z]_{n+1} = ([U_n] \cdot \dots \cdot [U_1]) [z]_1 + \\ + \sum_{k=1}^n \left( ([U_n] \cdot \dots \cdot [U_j] \cdot \dots \cdot [U_1]) [P_k] \cdot q_k \right) + [P_n] q_n$$

$n \geq i \geq 1$   
 $n \geq j \geq k+1$

$$(11) n < j : [U_j] = [0]$$

### Steifigkeitsmatrizen

Der Übergang von Übertragungsmatrizen auf Steifigkeitsmatrizen erlaubt, das Anfangswertproblem in ein *Randwertproblem* zu transformieren. Während bei Übertragungsmatrizen der Zustandsvektor sowohl die Verformungs- wie die Beanspruchungskomponenten enthält, welche jeweils am gleichen Rand des Stabes auftreten, findet bei den Steifigkeitsmatrizen eine Separation statt: Die Beanspruchungskomponenten an *beiden* Rändern werden mit den Verformungskomponenten an *beiden* Rändern verknüpft. Bei den Übertragungsmatrizen erfolgt die Verknüpfung des Zustandes von einem Rand zum andern.

Die Verwendung von Steifigkeitsmatrizen steht bei der *Finite-Element-Methode (FEM)* im Vordergrund. Die hier angewandte Methode umfasst beide Arten von Matrizen: Resultierende Übertragungsmatrizen und -vektoren beschreiben das Verhalten der Teilstäbe. Steifigkeitsmatrizen dienen zur Darstellung des Systems. Sie erlauben, die gegenseitige Verknüpfung der Teilstäbe in den Knoten – durch Superposition – zu for-

mulieren. Die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Teilstäbe werden durch *Transformation* aus den resultierenden Übertragungsmatrizen gewonnen.

Gleichung (10) gilt für einen Teilstab und kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$(12) [z]_{n+1} = [U] [z]_1 + [Q]$$

$[U]$  = resultierende Übertragungsmatrix

$[Q]$  = resultierender Übertragungsvektor

Anstelle des Indexes 1 wird nun der Index  $a$  geschrieben, welcher den Anfang des Teilstückes markieren soll, und anstelle des Indexes ( $n+1$ ) der Index  $e$ , welcher auf das Ende des Teilstabes hinweisen soll. In Teilmatrizen aufgelöst lautet nun Gleichung (12):

$$(13) \begin{bmatrix} f_a \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ F_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Bei Steifigkeitsmatrizen muss die Verknüpfung von  $[F_a]$ ,  $[F_e]$  mit  $f_a$ ,  $f_e$  erfolgen. Die Auflösung nach den beiden erstgenannten Vektoren ergibt (14a), (14b).

Da beim Übergang auf Steifigkeitsmatrizen das Schnittufer am Ende des Teilstabes als diesem zugehörig zu betrachten ist – und nicht etwa das Schnittufer des nächsten Elementes, wie bei Übertragungsmatrizen, gemeint ist – hat bei Gleichung (14b) ein Vorzeichenwechsel zu erfolgen, siehe (15).

Damit ist das *Transformationsgesetz* bekannt. Die Teilmatrizen der Steifigkeitsmatrix sind durch die Übertragungsmatrix bestimmt. Sie entstehen als Matrizenprodukte, wobei  $[U_{12}^{-1}]$  eine inverse Teilmatrix der Gesamtma-

trix  $[U]$  darstellt. Die Zusammenfassung lautet:

$$(16) \begin{bmatrix} F_a \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ f_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$[C]$  = Resultierende Steifigkeitsmatrix des Teilstabes, symmetrisch

$$(17) [C] = [C]^T$$

$[ ]^T$  bedeutet die transponierte Matrix

$|D|$  = Resultierender Belastungsvektor des Teilstabes zufolge der verteilten Belastungsintensität  $q_i$

### Koeffizientenmatrix des Gesamtsystems

Steifigkeitsmatrizen erlauben die Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten, da die Knotenlasten in Abhängigkeit von unbekannten Teilstabverformungen ausgedrückt werden können. Diese Methode heisst deshalb auch *Deformationsmethode*. Sie erlaubt das Einführen von sehr vielen Freiheitsgraden, wie es ein grösseres System erfordert. Die Aussage, dass an jedem Knoten Gleichgewicht bestehen muss, führt zu einem linearen Gleichungssystem, welches eine Abbildung des mechanischen Systems darstellt. Die zugehörige Koeffizientenmatrix enthält nur überlagerte Elemente derjenigen Steifigkeitsmatrizen, welche von den unmittelbar angrenzenden Teilstäben herrühren.

Da entferntere Teilstäbe als die unmittelbar benachbarten keine Beiträge an das Knotengleichgewicht liefern, bleibt die Matrix des Stabsystems nur schwach besetzt, wenn viele einfach zusammenhängende Teilstäbe auftreten (vgl. Bild 2).

$$(14a) \begin{bmatrix} f_a \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{12}^{-1} U_{11} & U_{12}^{-1} \\ -U_{22} U_{12}^{-1} U_{11} + U_{21} & U_{22} U_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ f_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_{12}^{-1} Q_1 \\ -U_{22} U_{12}^{-1} Q_1 + Q_2 \end{bmatrix}$$

$$(14b) \begin{bmatrix} f_a \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{12}^{-1} U_{11} & U_{12}^{-1} \\ U_{22} U_{12}^{-1} U_{11} - U_{21} & -U_{22} U_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ f_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_{12}^{-1} Q_1 \\ U_{22} U_{12}^{-1} Q_1 - Q_2 \end{bmatrix}$$

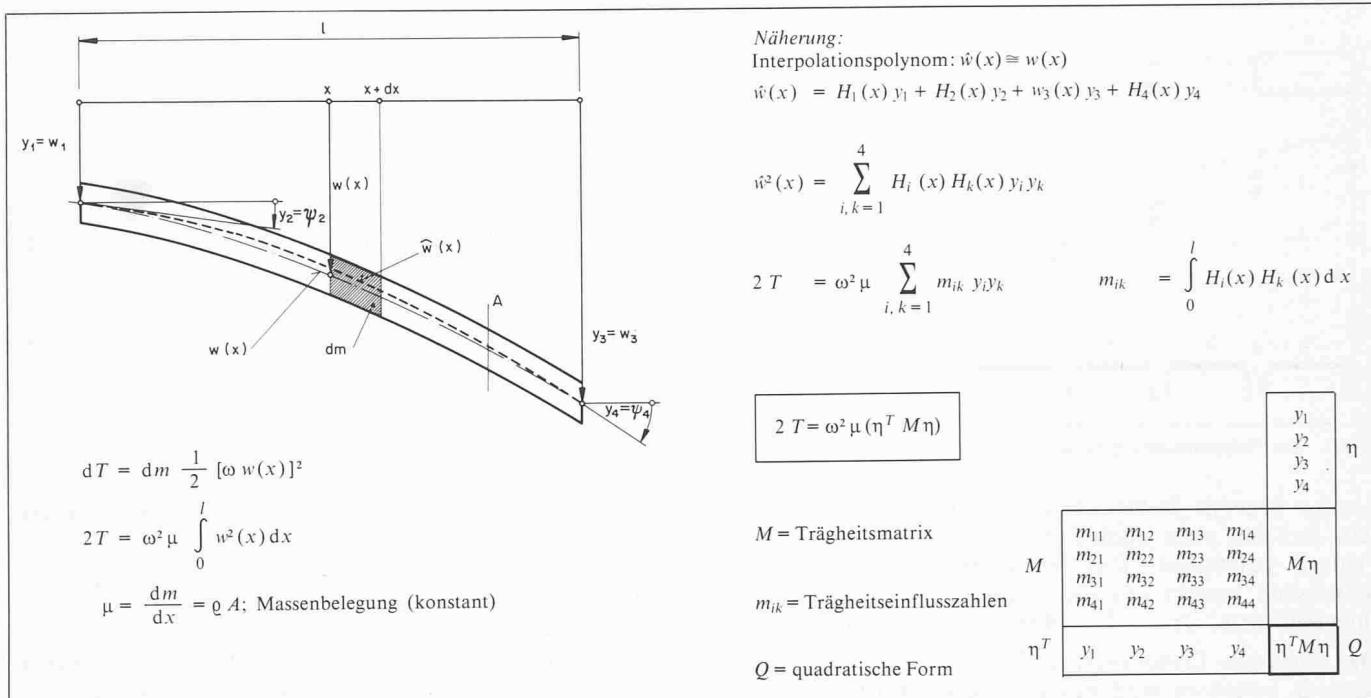


Bild 3. Interpolation der Schwingungsform: Träigkeitseinflusszahlen als Elemente der Trägheitsmatrix

## Berechnungsmodell für schwingende Stäbe

### Grundlagen

Nach dem Prinzip von D'Alembert muss die Trägheitswirkung der schwingenden Massen berücksichtigt werden, um die Gleichgewichtsbetrachtung in den Knoten aufrechterhalten zu können. Wenn es gelingt, diejenigen Knotenlasten des zwischen zwei Knoten liegenden Teilstabes auszudrücken, welche ausschliesslich auf Trägheitswirkung zurückzuführen sind, kann die oben beschriebene Methode der Steifigkeitsmatrizen einfach erweitert werden. Das Verfahren läuft dann darauf hinaus, eine Steifigkeitsmatrix und eine *Trägheitsmatrix* von gleicher äusserer Form aufzubauen, bestehend aus unterschiedlichen Einflussgrössen als Matrixelementen [2].

Die Schwierigkeit besteht darin, die Trägheitswirkung zu erfassen, ohne die richtige Schwingungsform zu kennen. Der Ausweg, welcher sich durch den Ersatz der kontinuierlich verteilten Masse durch Punktmassen ergibt, soll hier nicht beschritten werden. Die Wahl der Verformungen  $w$  und  $\psi$  an beiden Rändern als lokale Koordinaten des Finiten Stabelementes erlaubt, den Verlauf der elastischen Linie innerhalb dieses Elementes sehr genau durch ein kubisches Interpolationspolynom zu approximieren. Die vier Randkoordinaten bilden dabei notwendige und hinreichende Stützwerte. Dafür eignen sich Hermitesche Interpolationspolynome [2].

Der Aufbau der Trägheitsmatrix geschieht auf der Stufe des Feldes, d. h. am Finiten Stabelement (vgl. Bild 3). Die Addition der Steifigkeits- und Trägheitswirkung liefert den dynamischen Gesamtzusammenhang an diesem Feld, entsprechend dem Prinzip von D'Alembert. Die zugehörige Matrizensumme wird im Folgenden als Gesamtmatrix des Feldes bezeichnet. Was jetzt einzige noch fehlt, ist die Berücksichtigung der lokalen Dämpfung am Element in Form einer Dämpfungsmaatrix. Sie wurde bei den vorliegenden Arbeiten nicht erfasst.

Während die genannten Verformungen als lokale Koordinaten des Feldes dienen, werden zur Beschreibung des Systems *globale Koordinaten* verwendet. Dafür eignen sich die Randverformungen der Teilstäbe. Damit die lokalen Koordinaten nicht mehr in Erscheinung treten, muss eine resultierende Gesamtmatrix des Teilstabes gewonnen werden, welche den dynamischen Gesamtzusammenhang am ganzen Teilstab liefert. Dies geschieht mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. Durch Transformation der Gesamtmatrix des Feldes gelingt es, die Übertragungsmatrix zu ermitteln, welche den dynamischen Einfluss enthält. Die fortgesetzte feldweise Multiplikation dieser Übertragungsmatrizen liefert die resultierende Übertragungsmatrix des Teilstabes. Durch Rücktransformation in die Form einer Steifigkeitsmatrix gewinnt man schliesslich die Gesamtmatrix des Teilstabes, welche den dynamischen Gesamtzusammenhang mit Hilfe der globalen Koordinaten ausdrückt.

Diese Methode erlaubt eine sehr *feine Strukturierung* des Systems, ohne die Zahl der Unbekannten zu erhöhen. Die praktische Folge sind kleine lineare Gleichungssysteme und mässige Ansprüche hinsichtlich Kapazität der benötigten Zentralspeicher. Hingegen sind grössere externe Speicher erforderlich, wenn die Zahl der Felder hoch ist.

### Trägheitsmatrizen und Drehträgheit

Die *kinetische Energie* eines Finiten Stabelementes lässt sich mit Hilfe von Matrizen als quadratische Form darstellen (Bild 3). Die Matrizelemente der Trägheitsmatrix entstehen dann als Integralausdrücke:

$$(18) \quad m_{ik} = \int_0^l H_i(x) H_k(x) dx$$

Sie enthalten in dieser Form Massenzahlen der kinetischen Energie zufolge Auslenkungsamplitude aller Massenteilchen entlang der interpolierten Schwingungsform.

Für gewisse stabartige Federkörper – wie etwa Metallschläuche – erweist sich die Berücksichtigung der *Drehträgheit* bei der Schrägstellung der Materialquerschnitte als von ausschlaggebender Bedeutung, wie die entsprechenden Laborversuche zeigen.

Das Differential für den Drehanteil der kinetischen Energie lautet:

$$(19) \quad dT = d\theta \frac{1}{2} [\omega \psi(x)]^2$$

$\psi(x)$  = Amplitudenwert für den harmonischen Zeitverlauf des Querschnittneigungswinkels

$d\theta = \text{lokales Massenträgheitsmoment}$

$$= dm i^2 = \frac{dm}{dx} i^2 dx$$

$i = \text{lokaler Trägheitsradius bezüglich der Biegeachse}$

$$(20) \quad d\theta = \mu i^2 dx$$

Näherung:

$$(21) \quad \psi(x) \approx \hat{w}'(x)$$

Damit lässt sich der Drehanteil als endliche Summe schreiben:

$$(22) \quad 2T = \omega^2 \mu i^2 \sum_{i,k=1}^4 n_{ik} y_i y_k, \text{ wobei}$$

$$(23) \quad n_{ik} = \int_0^l H'_i(x) H'_k(x) dx$$

Mit den *Hermiteschen Polynomen*

$$(24) \quad H_1(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}$$

$$H_2(x) = \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) l$$

$$H_3(x) = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3}$$

$$H_4(x) = \left( -\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) l$$

$$H'_1(x) = \left( -6 \frac{x}{l} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{1}{l}$$

$$H'_2(x) = 1 - 4 \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2}$$

$$H'_3(x) = \left( 6 \frac{x}{l} - 6 \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{1}{l}$$

$$H'_4(x) = -2 \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2}$$

lauten zum Beispiel die Matrixelemente

$$(25) \quad m_{11} = l \frac{156}{420}, \quad n_{11} = \frac{1}{l} \frac{36}{30}$$

Die Superposition zur resultierenden Trägheitswirkung liefert zum Beispiel für das erste Matrixelement:

$$(26) \quad t_{11} = \omega^2 \mu m_{11} + \omega^2 \mu i^2 n_{11}$$

$$t_{11} = \omega^2 \mu l \left( \frac{156}{420} + \frac{i^2}{l^2} \frac{36}{30} \right)$$

### Transformation in Übertragungsmatrizen

Die Gesamtmatrix drückt das D'Alembertsche Prinzip am Element aus:

$$(27) \quad [C] - \omega^2 \mu l [T] [f] = [F]$$

Für  $|F| = |0|$  bildet  $\omega^2$  den Eigenwert.

Nun ist aber das *Eigenwertproblem am System* zu lösen. Deshalb wird die Gesamtmatrix  $[R]$  mit angenommenem Eigenwert in eine Übertragungsmatrix  $[U]$  transformiert, welche die Verknüpfung mit allen Nachbarfeldern von Stabangfang bis Stabende erlaubt.

Erst nach der Rücktransformation der resultierenden Übertragungsmatrix zur resultierenden Teilstab-Gesamtmatrix und nach dem Zusammenfügen zur Koeffizientenmatrix des Systems kann das Eigenwertproblem iterativ gelöst werden.

$$(28) \quad \begin{bmatrix} F_a \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ f_e \end{bmatrix}$$

$$[R] = [C] - \omega^2 \mu l [T]$$

Die Auflösung nach den beiden Vektoren  $\{f_e\}$  und  $\{F_e\}$  – letztere mit Vorzeichenwechsel aus bereits genannten Gründen – ergibt:

$$(29) \quad \begin{bmatrix} f_e \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{12} & R_{11} & R_{12}^{-1} \\ R_{22} R_{12}^{-1} R_{11} & -R_{22} & R_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ F_a \end{bmatrix}$$

Wie ein Vergleich mit Gleichung (15) zeigt, gelten dieselben Rechenregeln wie bei der Transformation der Übertragungsmatrix in die Steifigkeitsmatrix. Das heisst für die Transformation und die Rücktransformation kann dasselbe Unterprogramm als Subroutine verwendet werden.

### Lösung des Eigenwertproblems

Die Eigenwertgleichung (27) kann in dieser allgemeinen Form nicht für den Teilstab und auch nicht für das Gesamtsystem aufgestellt werden, da die Verknüpfung von Steifigkeit und Trägheit auf der Stufe des Feldes erfolgt. Die Gesamtmatrizen der Felder werden rein numerisch transformiert, multipliziert, rücktransformiert und superponiert, wobei bei jedem Iterationsschritt für den Eigenwert die Rechnung zu wiederholen ist.

Der Algorithmus besteht im *iterativen Aufsuchen der Eigenwerte* als Nullstellen der Determinante der Koeffizientenmatrix. Zur Berechnung der Determinante wird das Verfahren von *Cholesky* [3] verwendet. Die Nullstelle wird mit Hilfe der Regula Falsi ermittelt, wobei als Kriterium zum Abbruch der Iteration die genügend gute Übereinstimmung zweier Näherungswerte dient.

Anschliessend wird der Eigenvektor durch Lösen des um einen Freiheitsgrad verminderteren linearen Gleichungssystems berechnet. Aus den nun mehr bekannten Verformungen der

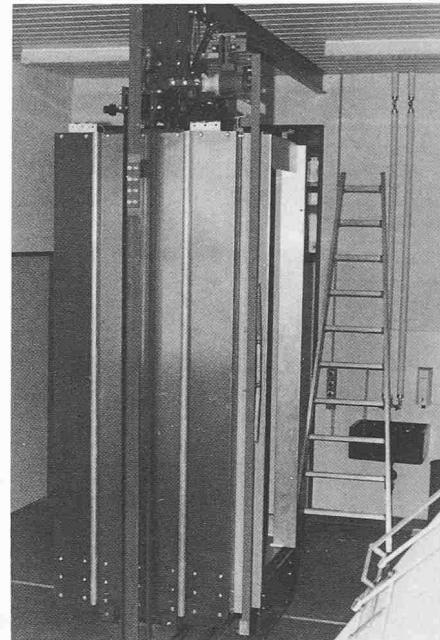


Bild 4. Liftkabine. Der Rahmen ist oben aufgehängt und trägt die auf den unteren Konsole abgestützte Kabine

Teilstäbe werden die zugehörigen Belastungen ermittelt. Mit Hilfe der Übertragungsmatrizen werden innerhalb der Teilstäbe die Zustandsgrößen an sämtlichen Feldgrenzen berechnet.

### Laborarbeiten

#### Programme «Swing-Krit» und «Flex»

Im Rahmen von schulischen Arbeiten wurde seit 1971 das Programm Swing-Krit [4] entwickelt. Es dient zur Berechnung der kritischen Drehzahlen von Wellensträngen und Eigenfrequenzen von Durchlaufträgern und Federkörpern. Damit können schwingende Stabsysteme mit maximal 10 Knoten, 9 Teilstäben und 180 Feldern berechnet werden. Die Wirkung von Membran- und Knickkräften kann wahlweise berücksichtigt werden.

Seit 1979 wurde die Version Flex daraus abgeleitet und weiterentwickelt. Sie dient zur Berechnung von statischen Biege- und Knickproblemen an Durchlaufträgern. Das ruhende Stabsystem umfasst maximal 20 Knoten, 19 Teilstäbe und 760 Felder.

#### Rahmen einer Liftkabine

Die Kabine ist in einer Rahmenkonstruktion auf Gummi gelagert (Bild 4). Der Rahmen besteht aus zwei vertikalen Längsträgern in Leichtbauweise, welche durch ein massives Joch, an welchem die Aufhängung erfolgt, horizontal verbunden sind. Die elastische Lagerung erfolgt auf Konsolen am unteren Ende der Längsträger (Bild 4).

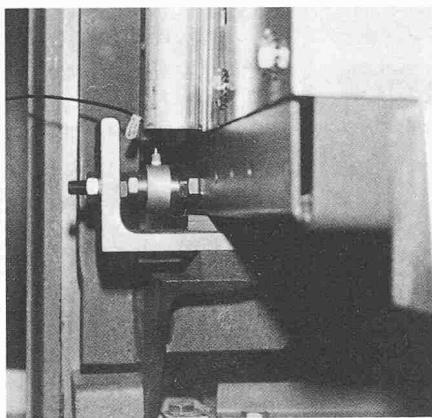


Bild 5 (links). Untere Lagerstelle der Liftkabine. Der Kraftfluss erfolgt durch das untere Gummielelement und wird seitlich durch das L-Profil - als Schubkraft - auf den Kraftsensor und die Kabine übertragen

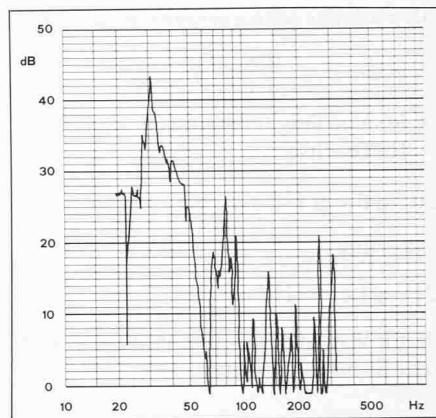


Bild 6 (rechts). Frequenzgang der Kraftübertragung an der Lagerstelle gemäss Bild 5

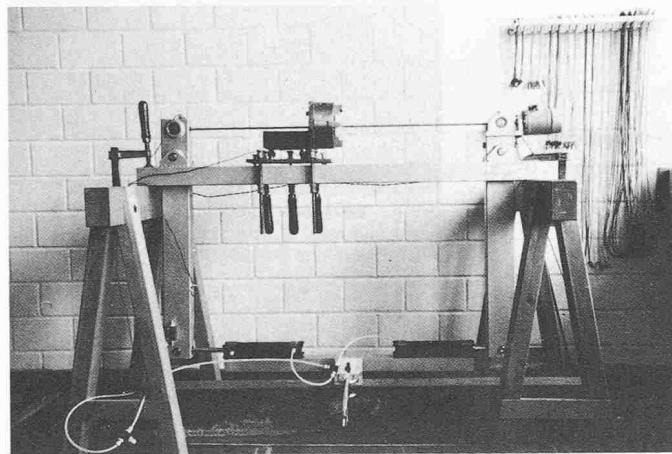


Bild 7. Versuchsstand mit Modellrotor für gleichzeitiges Schwingen und Knicken. Weiche Lagerung in der Mitte; Kraftsensoren am Lagerbock. Pneumatikzylinder unten, mit Hebel zum Erzeugen der Knickkraft am Rotor

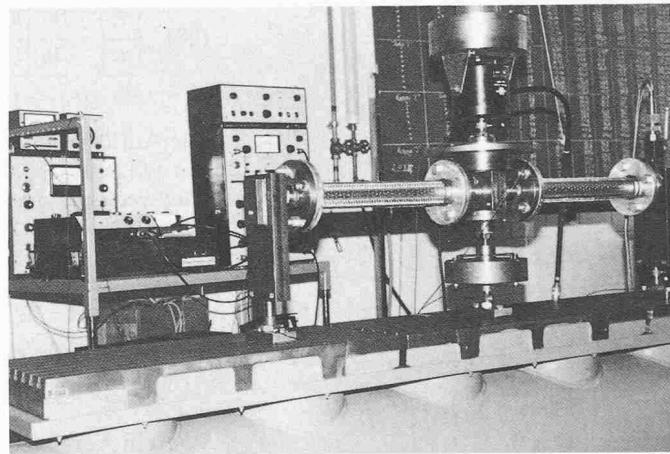


Bild 8. Schwingungsprüfstand für Metallschläuche

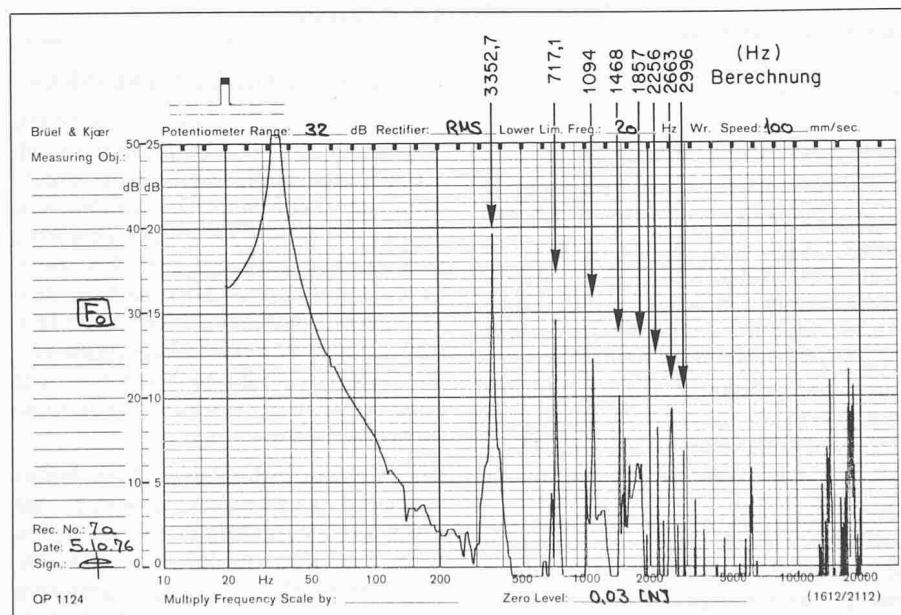


Bild 9. Frequenzgang der Kraftübertragung am Federkörper eines Metallschlauches. Die Pfeile geben die Lage der mit dem Computer berechneten Eigenfrequenzen an

Der Laborversuch bestand darin, den Frequenzgang der an der Abstützung übertragenen Kräfte zu messen (Bild 5), wenn die Seilaufhängung zum Schwingen angeregt worden war. Das Übertragungsverhalten wird durch die Eigenfrequenzen der Längsträger erheblich beeinflusst (Bild 6). Sie waren Gegenstand der Berechnung und Messung.

### Wellenstrang bzw. Modellrotor

Der Anlass zu dieser Untersuchung bildeten störende Schwingungen an der Antriebswelle des Motorschiffes Unterwalden auf dem Vierwaldstättersee. Es wurde ein einfacher Versuchsstand gebaut, mit welchem die Stabilität eines Modellrotors grundsätzlich untersucht

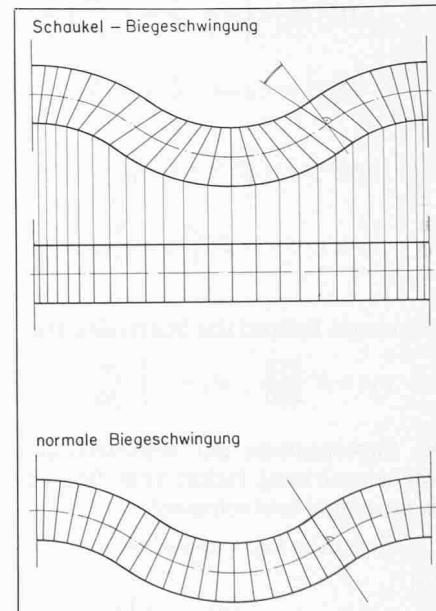


Bild 10. Schwingungsformen (schematisch). Oben: Berechnete und gemessene Schwingungsform des Metallschlauches. Unten: Theoretische Schwingungsform bei elementarer Stabbiegung

werden konnte (Bild 7). Insbesondere konnte eine axiale Druckkraft pneumatisch erzeugt werden.

Die kritischen Drehzahlen sind von der Axialkraft - d.h. vom Propellerschub der Schiffswelle - stark abhängig. Messung und Computerrechnung stimmen gut überein.

Ausserdem konnte beim mittleren weichen Lager, mit welchem ein wassergeförmtes Gummilager simuliert wurde, unter bestimmten Bedingungen ein «Rattern» festgestellt werden, welches mit ungefähr halber Drehfrequenz erfolgt.

### Metallschlauch

Gegenstand der Untersuchung war der wellrohrförmig ausgebildete *Federkörper* eines Metallschlauches. Zur Aufnahme von Dehnungen bei Rohrleitungssystemen in der Haustechnik in der Verfahrens- und Maschinentechnik spielen diese weitverbreiteten Bauteile eine wichtige Rolle. Sie werden häufig auch als *Schwingungs- und Körperschalldämpfer* eingesetzt. Das Dämpfungsverhalten ist durch die Eigenfrequenzen des Federkörpers massgeblich beeinflusst. Auf einem zu diesem Zwecke entwickelten Prüfstand können Durchlaufanalysen des sinusförmig angeregten Prüflings durchgeführt werden (Bild 8). Dabei wird der Frequenzgang der Kraftübertragung gemessen. Das elastische und das Trägheitsverhal-

ten des Federkörpers können durch das Berechnungsmodell eines stabartigen Systems von Federkörpern simuliert werden, wobei der Einfluss der Schubsteifigkeit und der Drehträgheit berücksichtigt wird.

Die vorstehend beschriebene und programmierte Berechnungsmethode erlaubt, die *Eigenfrequenzen* zu berechnen. Dabei ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, und zwar bis zu Schwingungszahlen höherer Ordnung (Bild 9). Die Interpretation der Eigenschwingungsformen zeigt, dass der Federkörper eine von der herkömmlichen Biegeschwingung abweichende Schwingung ausführt (Bild 10). Wegen der gegenüber der geringen Biegesteifigkeit überwiegenden Drehträgheit des Querschnitts entsteht eine charakteristische *Schaukelbewegung* (Bild 10).

Die eigentlichen Stab-Biegeschwingungen- deren Schwingungszahlen in den einschlägigen Normen der Hersteller dieser Produkte [5] zu finden sind - scheinen bedeutungslos zu sein. Der Einfluss der auf dem Federkörper auf-

### Literaturverzeichnis

- [1] Haefeli, H.G.: «Zur Reihenentwicklung der Lösungsfunktionen eines linearen zeit-invarianten Gleichungssystems.» Die höhere technische Bildung am Zentral-schweizerischen Technikum Luzern, Luzern/Horw 1977
- [2] Zumühl, R.: «Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode.» Ingenieur-Archiv XXXII. Band 1963
- [3] Zumühl, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 3. Aufl. Springer-Verlag, 1961
- [4] Eggenberger, E.; Zampino, A.; von Holzen, R.; Tanner, F.; Ritter, P.: «Kritische Drehzahlen von Rotoren und Eigenfrequenzen von Trägern (Programm Swing-Krit.)» Schulische Arbeiten 1971/73/76 am Zentral-schweizerischen Technikum Luzern
- [5] Standards of the Expansion Joint Manufacturers, Inc. 5. Edition 1980 EJMA, White Plains, New York 10604

liegenden äusseren Umflechtung ist Gegenstand von weiteren Untersuchungen.

Adresse des Verfassers: Prof. P. Ritter, dipl. Ing. ETH, Vorsteher der Abteilung Maschinentechnik, Zentral-schweizerisches Technikum Luzern, 6048 Horw.

## Niederschlagskarten für den Kanton Zürich

Von Dietmar Grebner und Christian Göldi, Zürich

Für den Kanton Zürich wurde 1936 und erneut im Jahr 1943 eine Karte mit den mittleren Jahresniederschlägen sowie 1933 bzw. 1943 eine Karte mit den grössten Tagesniederschlägen seit 1893 erarbeitet. Im vorliegenden Bericht wird eine neue Ausgabe dieser Karten erläutert. Sie entstanden anhand der Messperiode 1881–1979. Die Beschreibung gibt die Kriterien für die Auswahl der verwendeten Stationen, die Behandlung lückenhafter Messreihen, Abschätzungen des Einflusses von Inhomogenitäten und die Analysenmethode wieder. In der Diskussion werden Hinweise für die Interpretation der Karten gegeben. Angaben über die Genauigkeit der Messungen, die Abhängigkeit der Niederschlagsmengen von der Orographie und vor allem über die Bedeutung der Isolinien in der Karte der grössten Tagesniederschläge sollen zur geeigneten Anwendung beitragen.

### Einleitung

Um Wasserbauanlagen mit genügender Sicherheit bemessen zu können, ist unter anderem die Kenntnis der lokalen und regionalen Niederschlagsverhältnisse von ausschlaggebender Bedeutung, da der Niederschlag in seiner räumlichen und zeitlichen Verteilung zu den wesentlichsten Faktoren für die Grösse des Abflusses in den Gewässern zählt. Die erforderlichen Informationen setzen umfangreiche Messungen und deren Auswertung nach verschiedenen Gesichtspunkten voraus.

In der Schweiz werden glücklicherweise seit vielen Jahrzehnten, vor allem durch die *Schweizerische Meteorologische Anstalt* (SMA), in einem dichten Netz von Beobachtungsstationen Niederschlagsmessungen durchgeführt. Die meisten Messungen erfolgten mit sogenannten *Tagessammeln*, in denen die Summe der täglichen Niederschläge erfasst wird. Messungen mit *Regenschreibern*, die den Verlauf der Regenereignisse registrieren, wurden hingegen nur an wenigen, ausgewählten Stationen durchgeführt.

Die Bemühungen, dieses umfangreiche Datenmaterial in geeigneter Form zu-

sammenzufassen und darzustellen und damit dem Ingenieur gesicherte Grundlagen zur Projektierung und Bemessung von Wasserbauten zur Verfügung zu stellen, gehen vor allem auf [Kropf, 1944; Hörler, 1960; Hörler, Rhein, 1962] zurück.

Für den Kanton Zürich erstellte das *kantonale Meliorations- und Vermessungsamt* im Jahre 1933, gestützt auf 62 Messstationen, eine Karte der mittleren Jahressummen und 1936, gestützt auf 56 Stationen, eine Karte der grössten Tagesniederschläge seit 1893. Im Jahre 1943 erschienen für beide Karten Neubearbeitungen, die auf 65 Messstationen basierten und die Messperiode von 1893 bis 1942 umfassten. In neuester Zeit wurden von Zeller, Geiger und Rötlisberger [1977, 1978] neben anderen auch für einige Stationen im Kanton Zürich und seiner näheren Umgebung die Niederschlagsdaten, insbesondere von 1901 bis 1970, *extremwertstatistisch* ausgewertet und in Tabellen und Diagrammen dargestellt.

Zur weiteren Ergänzung der vorhandenen Daten und Darstellungen erteilte das Amt für Gewässerschutz und Wasserbau des Kantons Zürich der *versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie* der ETH Zürich den Auftrag, die Karten der mittleren Jahressummen und der grössten Tages-