

**Zeitschrift:** Schweizer Ingenieur und Architekt  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 101 (1983)  
**Heft:** 27/28

**Artikel:** Contrôle angulaire d'un pendule de torsion au moyen d'un moteur pas à pas et d'un microprocesseur  
**Autor:** Elfing, Anders / Anderson, Gary / Delfontaine, Guy  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-75171>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Contrôle angulaire d'un pendule de torsion au moyen d'un moteur pas à pas et d'un microprocesseur

par Anders Elfing, Gary Anderson et Guy Delfontaine, Ecublens

Le travail concerne un processus de limitation des vibrations propres d'un oscillateur de torsion en régime forcé au moyen d'un moteur pas à pas commandé par un microprocesseur. Sur la base de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti, on a recherché des fonctions de contrôle permettant d'obtenir le comportement angulaire désiré pour le système. Des critères d'optimisation ont été développés afin de juger de l'efficacité des différentes fonctions de contrôle pouvant être retenues.

Die Möglichkeit der Regelung der Bewegung und der Unterdrückung gewisser Schwingungen eines Torsionspendels wurde untersucht, mittels eines durch einen Mikroprozessor kontrollierten Schrittmotors. Von einer Differentialgleichung eines gedämpften Schwingers ausgehend, wurden geeignete Regelfunktionen gesucht, welche die verlangten Winkelbewegungen erzeugen. Ein Optimisationskriterium wurde eingeführt, um die Wirksamkeit der abgeleiteten Regelfunktionen zu beurteilen.

The possibility of controlling the motion and of suppressing certain oscillations of a torsional pendulum by means of a stepper motor controlled by a microprocessor has been investigated. Upon starting with the differential equation of a damped oscillator, control functions that are suitable to produce the required angular motion of the system are sought. An optimization criterion has been introduced in order to judge the effectiveness of the derived functions.

## Modèle mécanique et modèle mathématique

La tâche d'exécuter rapidement et avec précision le positionnement d'une machine mécanique, telle que la grue d'un navire [1], est souvent compliquée par les déformations élastiques du système. Celles-ci sont dues aux forces dynamiques créées par des accélérations et décélérations brusques. Il est donc important d'être capable de compenser ces déformations afin de supprimer le dépassement et les oscillations indésirables.

Comme exemple spécifique d'un tel système, nous examinons l'application de la théorie de contrôle au cas d'un pendule de torsion. Ce dernier possède un arbre viscoélastique qui porte à une extrémité un disque lourd mu par l'arbre au moyen d'un moteur pas à pas monté à l'autre extrémité (voir fig. 1). L'action

du moteur pas à pas est contrôlée par un microprocesseur. Quand le moteur fait tourner l'arbre autour de son axe longitudinal, le disque suit avec un décalage angulaire à cause de la déformation de l'arbre. L'intention est de démarrer le disque d'un état de repos et de lui faire atteindre une position angulaire finale dans une période de temps imposée. Le mouvement du disque doit s'arrêter à cette position finale de façon qu'aucun dépassement et aucune oscillation ne se produisent par la suite.

Dans la fig. 1 l'angle  $\varphi$  représente le déplacement angulaire imposé par le moteur pas à pas à l'extrémité supérieure de l'arbre. L'angle  $\psi$  est l'angle de rotation du disque autour de l'axe de l'arbre. Ces angles s'appellent respectivement la *fonction de contrôle* et la *fonction d'état*. En utilisant le principe du travail virtuel, on peut montrer que l'équation différentielle du mouvement du disque est, sous forme non dimensionnelle,

$$(1) \quad \ddot{\psi}(\tau) + 2\zeta\dot{\psi}(\tau) + \psi(\tau) = 2\zeta\dot{\varphi}(\tau) + \varphi(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_1,$$

où  $\tau$  est le temps non dimensionnel,  $\zeta$  la mesure non dimensionnelle de l'amortissement dans l'arbre et  $\dot{\psi} = d\psi/d\tau$ ,  $\ddot{\psi} = d^2\psi/d\tau^2$ . Si  $\zeta = 0$ , l'arbre est élastique. Quand  $\tau < 0$  ou  $\tau > \tau_1$  le moteur est bloqué et  $\varphi(\tau) = 0$ . Lorsque le disque est au repos dans sa position initiale  $\varphi = 0$  et  $\tau = 0$ ; dans sa position finale  $\psi = \psi_1$  et  $\tau = \tau_1$ , de sorte que les conditions initiales et finales sont

$$(2) \quad \psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$$

$$(3) \quad \psi(\tau_1) = \psi_1, \quad \dot{\psi}(\tau_1) = 0$$

Les énergies cinétique et potentielle du système doivent être nulles à  $\tau = 0$  et  $\tau_1$  parce que le disque doit être au repos pour  $0 \leq \tau$  et  $\tau \geq \tau_1$ . Cet état sera garanti si les conditions suivantes sont imposées:

$$(4) \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$$

$$(5) \quad \varphi(\tau_1) = \psi_1, \quad \dot{\varphi}(\tau_1) = 0$$

Du point de vue mathématique le problème de contrôle contenu dans (1) à (5) consiste en une équation différentielle non linéaire du deuxième ordre avec huit conditions aux limites.

Premièrement il faut déterminer une fonction de contrôle  $\varphi(\tau)$  qui est compatible avec (1) à (5). Une fois que  $\varphi(\tau)$  est connue, nous pouvons déterminer un ensemble d'instantanés de temps où des impulsions électriques de commande doivent être transmises du microprocesseur au moteur pas à pas. Ce type de système de contrôle à boucle ouverte donne une compensation appropriée des déformations dans l'arbre qui ont lieu pendant le processus de mise en action. Cette opération permet la réalisation du positionnement désiré.

## Fonction de contrôle non optimale

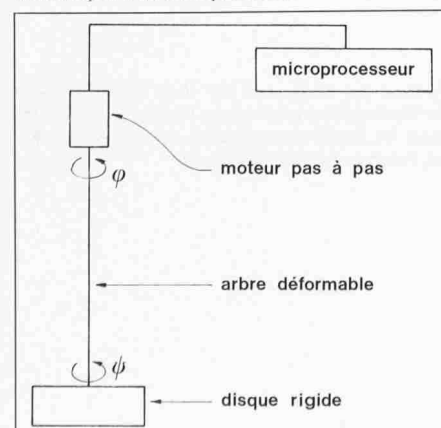
La solution du problème (1) à (5) n'est pas unique parce qu'on cherche deux fonctions qui ne satisfont qu'une seule équation différentielle. Une méthode pratique de déterminer au moins une solution très utile est de présumer qu'à la fois les fonctions  $\psi(\tau)$  et  $\varphi(\tau)$  peuvent être représentées comme polynômes de degré sept en  $\tau$ :

$$(6) \quad \psi(\tau) = \sum_{n=0}^7 A_n \tau^n,$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^7 B_n \tau^n,$$

où les deux ensembles de huit coefficients  $A_n$ ,  $B_n$  sont à déterminer. On choisit les polynômes du septième degré dans (6) parce qu'il y a huit conditions aux limites dans (2) à (5). (La méthode inhabituelle utilisée pour résoudre l'équation différentielle devient plus claire dans le cas où  $\zeta = 0$ .) Les coefficients sont déterminés à partir d'un ensemble d'équations algébriques et linéaires qui sont obtenues en substituant (6) dans l'équation différentielle (1) ainsi que dans les conditions aux limites (2) à (5). Les valeurs de ces coefficients sont déterminées numériquement en fonction du temps final imposé  $\tau_1$  et du paramètre d'amortissement  $\zeta$ . Dans le cas spécial où  $\zeta = 0$ , on peut montrer que

Figure 1. Un pendule de torsion actionné à son extrémité supérieure par un moteur pas à pas commandé au moyen d'un microprocesseur



$$(7) \quad \psi(\tau) = \psi_1 \eta^4 (35 - 84\eta + 70\eta^2 - 20\eta^3)$$

$$(8) \quad \varphi(\tau) = \psi_1 \eta^2 [\eta^2 (35 - 84\eta + 70\eta^2 - 20\eta^3) + (420/\tau_1^2) (1 - \eta)^2 (1 - 2\eta)]$$

où on a introduit une échelle (non dimensionnelle normalisée) du temps  $\eta = \tau/\tau_1$ . Il faut observer que  $\tau_1$  n'apparaît pas dans le côté droit de (7), mais il est présent dans (8).

## Processus de contrôle non optimal

La machine mécanique qui fut construite au laboratoire est la suivante: l'arbre du pendule consiste en une tige en plastique de 15 mm de diamètre et 1 m de longueur. Elle est contenue dans un tuyau en plexiglas qui est rempli d'une huile de silicone très visqueuse. Le coefficient d'amortissement pour cet arbre a été mesuré:  $\zeta = 0,21$ . Le disque a un diamètre de 200 mm, une épaisseur de 20 mm et un poids de 4,6 kg. Un moteur pas à pas Philips de 4 watts avec une boîte d'engrenage 1/20 est utilisé pour actionner l'arbre. Un microprocesseur Motorola M6800 génère les signaux de contrôle qui sont nécessaires à faire marcher le moteur au moyen d'une interface électronique.

En choisissant  $\psi_1 = 2$  radians et en utilisant  $\zeta = 0,21$ , on calcule les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  dans (6). Afin d'exposer les propriétés de la fonction de contrôle, on calcule  $\varphi(\tau)$ ,  $\dot{\varphi}(\tau)$ ,  $\ddot{\varphi}(\tau)$  dans l'intervalle  $0 \leq \eta \leq 1$  ( $\eta = \tau/\tau_1$ ) pour quelques valeurs du temps final imposé  $\tau_1$ . On a tracé les graphiques de ces quantités dans la fig. 2 pour le cas particulier de  $\tau_1 = 7$  (2,76 s - symboles carrés). Pour faire une comparaison, on a tracé également sur les mêmes axes les courbes correspondantes pour l'arbre élastique ( $\zeta = 0$ , symboles circulaires). En limitant notre attention seulement aux courbes de  $\dot{\varphi}$ , on observe que, pour  $\zeta = 0$ , la vitesse angulaire monte rapidement, reste presque constante pendant approximativement 60% de la durée du mouvement et enfin descend vers zéro. Cependant, pour  $\zeta = 0,21$ , la variation de la vitesse angulaire de contrôle est très différente. La courbe monte à une vitesse maximale évidemment supérieure, descend à un minimum, monte à un deuxième maximum et finalement descend à zéro.

Pour déterminer la séquence d'instantanés de temps non dimensionnel  $\tau_k$  auxquels le microprocesseur est obligé d'envoyer les impulsions au moteur pas à pas, il faut écrire la deuxième équation dans (6) sous la forme

$$(9) \quad f(\tau) = \sum_{n=0}^7 B_n \tau^n - \varphi(\tau) = 0$$

Pendant le mouvement, l'angle  $\varphi(\tau)$  reste entre les limites  $0 \leq \varphi \leq \psi_1$ . Cet intervalle est divisé en 306 pas identiques, c'est-à-dire  $\psi_1/306$ , en raison des caractéristiques de l'ensemble moteur/boîte à vitesse.

Pour un ensemble discret de positions angulaires  $\varphi_k = k\psi_1/306$ ,  $k = 1(1)306$ , on résout (9) numériquement pour les valeurs du temps  $\tau_k$  que l'on utilise pour calculer la durée de chaque impulsion de commande du moteur pas à pas. Il est clair que les positions angulaires sont réparties uniformément dans l'espace mais pas dans le temps. Dans le cas où  $\psi_1 = 2$  radians, l'incrément de la position angulaire est  $\varphi_k - \varphi_{k-1} = 1/153$  radian, qui équivaut à  $0,375^\circ$ . La séquence  $\{\tau_k\}$  est stockée comme fichier séquentiel dans la mémoire RAM du microprocesseur.

Nous avons réalisé le contrôle souhaité avec la fonction  $\varphi(\tau)$  qui a été définie dans (6) au moyen d'une série d'expériences exécutée en laboratoire. Ces essais furent exécutés pour plusieurs valeurs du temps final imposé, c'est-à-dire 5 (1) 10. Une performance de contrôle satisfaisante fut atteinte dans tous les cas sauf celui du temps final le plus petit  $\tau_1 = 5$  (1,9 s). La valeur la plus petite pour laquelle (6) demeure utilisable se trouve être  $\tau_1 = 5,7$ . Pour  $\tau > 5,7$ , le moteur pas à pas a assez de temps pour accomplir son but et n'a aucune difficulté particulière de le faire, spécialement pour les valeurs les plus grandes de  $\tau_1$ .

Une inspection du graphique montré dans fig. 3 de  $\dot{\varphi}(\tau)$  pour le cas de  $\tau_1 = 5$  révèle que le moteur pas à pas est contraint de changer deux fois la direction de la vitesse angulaire pendant le mouvement. Quand la valeur de  $\tau_1$  est moins que 5,7, le moteur pas à pas doit faire un plus grand effort afin d'effectuer sa mission. Il est cependant compréhensible que si le temps final imposé est trop court, le moteur sera simplement trop faible pour pouvoir répondre correctement.

Il en découle que le couple que le moteur pas à pas doit fournir au disque est un paramètre limitatif quand le temps final imposé est relativement court. Cette observation motive une utilisation de la théorie de contrôle optimal avec l'espérance que l'étendue d'application du processus de contrôle peut être étendue aux valeurs de  $\tau_1$  qui sont inférieures à  $\tau_1 = 5,7$ .

## Fonction de contrôle optimal

Nous avons établi précédemment que le problème de contrôle fondamental dans (1) à (5) ne possède pas une solution unique parce que (1) n'est qu'une seule

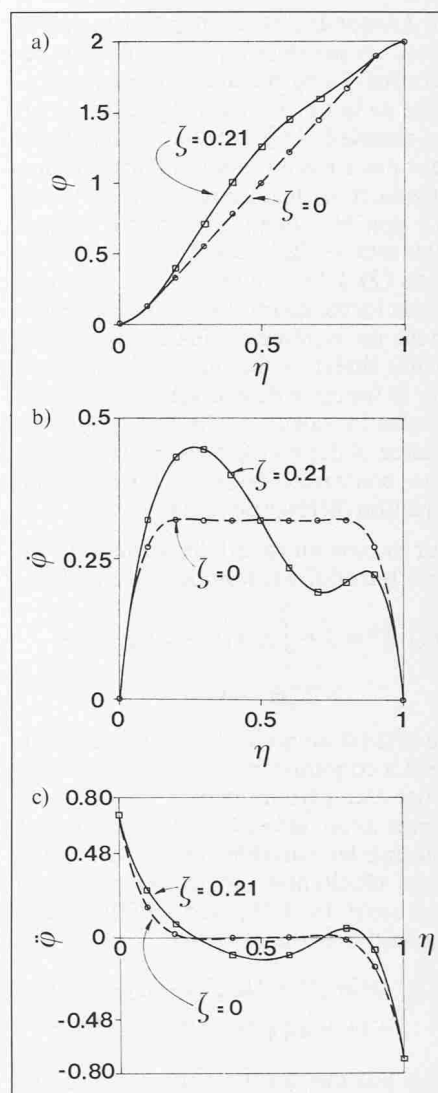


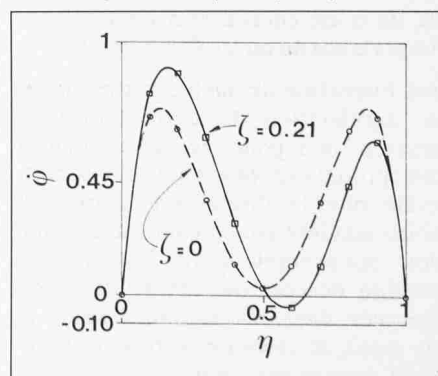
Figure 2. Les variations (a) de la fonction de contrôle  $\varphi(\tau)$ , (b) de la vitesse angulaire de contrôle  $\dot{\varphi}(\tau)$  et (c) de l'accélération angulaire de contrôle  $\ddot{\varphi}(\tau)$  en fonction de  $\eta = \tau/\tau_1$

équation différentielle à deux inconnues. On cherche maintenant à introduire une équation différentielle supplémentaire telle qu'il soit possible de déterminer la fonction de contrôle unique qui est optimale pour un cas spécifique.

Dans ce but on introduit l'intégrale

$$(10) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} (\dot{\psi}^2 + \alpha \dot{\varphi}^2) d\tau$$

Figure 3. La variation de la vitesse angulaire de contrôle en fonction de  $\eta = \tau/\tau_1$ , ou  $\tau_1 = 5$



où  $J$  s'appelle l'indice de performance et  $\alpha$  est un paramètre pondérant non déterminé. La forme quadratique particulière de la fonction à intégrer dans (10) est choisie (i) le couple fourni par le moteur pas à pas a rapport à l'accélération angulaire  $\ddot{\psi}$  du disque et (ii) le terme  $\dot{\phi}^2$  doit être inclus afin d'être compatible avec les huit conditions aux limites dans (2) à (5) – donc  $\alpha \neq 0$ . Le choix d'une forme quadratique garantit également un système d'équations différentielles linéaires. Le but est de déterminer la fonction de contrôle  $\phi(\tau)$  qui minimise la valeur de l'indice de performance  $J$  dans (10) tout en respectant une contrainte sous la forme d'une équation différentielle (1).

Sur la base du calcul des variations, on peut introduire le fonctionnel étendu

$$(11) \quad J^* = J + \int_0^{\tau_1} \lambda(\tau) [\ddot{\psi} + 2\zeta\dot{\psi} + \psi - 2\zeta\dot{\phi} - \phi] d\tau$$

où  $\lambda(\tau)$  est un multiplicateur de Lagrange. La condition nécessaire pour l'existence d'un extrémum de  $J^*$  est  $\delta J^* = 0$ . Après avoir effectué cette variation et éliminé les variables  $\phi$  et  $\lambda$  des équations résultantes, on trouve que  $\psi(\tau)$  doit satisfaire à l'équation différentielle du huitième ordre suivant:

$$(12) \quad D^4 [\alpha D^4 - 2[2\zeta^2(1 + \alpha) - \alpha] D^2 + (1 + \alpha)] \psi(\tau) = 0, \quad D = d/d\tau$$

Une fois que  $\psi(\tau)$  est connue, la fonction  $\phi(\tau)$  peut être déterminée de (1) ou, plus pratiquement, de sa forme intégrée

$$(13) \quad \phi(\tau) = (\frac{1}{2}\zeta) \cdot \left[ \dot{\psi}(\tau) + (\frac{1}{4}\zeta^2) \int_0^{\tau} e^{(x-\tau)/2\zeta} \psi(x) dx \right]$$

## Processus de contrôle optimal

L'équation différentielle (12) avec (13) et les conditions aux limites dans (2) à (5) a été résolue pour le cas de  $\zeta = 0,21$ ,  $\psi_1 = 2$  radians et  $\alpha = 0,05$  (à cause de sa longueur, la solution ne sera pas reproduite ici). Cette valeur relativement petite de  $\alpha$  est choisie afin de souligner l'importance du terme  $\ddot{\psi}^2$  dans (10).

Une inspection de quelques graphiques de l'accélération du disque  $\ddot{\psi}(\tau)$  en fonction de  $\tau$  pour les cas optimal et non optimal avec plusieurs valeurs de  $\tau_1$  révèle que le disque est clairement moins accéléré par le contrôle optimal (voir, par exemple, la fig. 3). Quand la fonction de contrôle optimal fut programmée dans le microprocesseur et des essais au laboratoire furent exécutés, le moteur pas à pas réussit à exécuter

le mouvement de contrôle correct même dans le cas où  $\tau_1 = 5$ . On se rappelle que le moteur n'avait pas réussi avec cette valeur de  $\tau_1$  quand la fonction de contrôle non optimal dans (6) fut utilisée.

## Conclusion

On a étudié la possibilité de réaliser le contrôle à boucle ouverte du mouvement d'un pendule de torsion muni d'un arbre viscoélastique. On a montré que même avec la présence d'un fort

## Bibliographie

- [1] Schmidtbauer B., et Rönnebeck, S. (1981): «Computer assisted manual control of cargo handling with ship cranes». Proc. First European Ann. Conf. Human Decision Making and Manual Control, pp. 287-296, Delft

amortissement interne, il est possible de déterminer des fonctions de contrôle optimal et non optimal applicables.

Adresse des auteurs: Institut Cerac SA, chemin des Larges-Pièces, 1024 Ecublens.

*Angewandte Mechanik in Industrie und Hochschule, Schluss*

# Etude analytique et par éléments finis du comportement sismique des ponts tournants de grandes dimensions

par Jean-Claude Mévillot, Vevey

Durant les deux dernières décennies, les méthodes de calcul numérique ont subi une évolution remarquable en parallèle avec les progrès extraordinaires réalisés dans le développement des ordinateurs, surtout en ce qui concerne la capacité de mémorisation et la rapidité de traitement des informations.

La méthode des éléments finis permet notamment d'étudier le comportement dynamique de structures importantes, telles que celles des gros engins de levage en particulier.

Dans le cas d'un séisme, l'excitation de la structure est provoquée par le mouvement du sol transmis à ses supports. Comme celui-ci ne peut pas être décrit de façon déterministe en raison de sa nature purement aléatoire, il faut avoir recours à une démarche probabiliste.

Le présent exposé a trait précisément à la méthode dite du spectre de réponse dont la portée est tout à fait générale. Un exemple concret en montre une application à l'étude du comportement sismique de ponts tournants de 380 tonnes.

Die numerischen Berechnungsmethoden sind in den zwei letzten Jahrzehnten durch eine bemerkenswerte Entwicklung gekennzeichnet, die parallel zu den ausserordentlichen Fortschritten der Computer-Technik verläuft, vor allem was Speichervermögen und Ausführungsgeschwindigkeit betrifft. Die Methode der finiten Elemente erlaubt u. a. die Untersuchung des dynamischen Verhaltens von bedeutenden Fachwerken, wie bei grossen Lasthebemaschinen.

Im Falle eines Erdbebens wird die Erregung des Gebildes durch die Bewegung des Bodens, die an ihre Träger übermittelt wird, verursacht. Nachdem diese Bewegung wegen ihrer rein willkürlichen Natur auf deterministische Art nicht beschrieben werden kann, muss auf eine probabilistische Vorgangsweise zurückgegriffen werden.

Der vorliegende Aufsatz beschreibt die Methode des sogenannten Antwortspektrums, deren Bereich ganz allgemein gültig ist. Ein konkretes Beispiel veranschaulicht die Anwendung dieser Methode an die Erdbebenverhaltens-Untersuchung von 380-Tonnen-Drehkränen.

During the last two decades, the methods of calculation have undergone a remarkable evolution, in parallel with the extraordinary progress achieved in the development of computers, more particularly as regards the latter's memory storage capacity and their speed of operation.

The method of finite elements can be used in particular for the study of the dynamic behaviour of large structures such as those of heavy lifting equipment.

In the case of an earthquake, the excitation of the structure is caused by ground movements which are transmitted to its supports. As these movements cannot be defined in a deterministic way, due to their purely random nature, the study must resort to a probabilistic analysis.

This paper covers the so-called method of response spectra which is of quite general bearing. A practical example is given of its application to the seismic behaviour of 380 ton capacity rotating bridge cranes.

## Introduction

Jusqu'à ces dernières années, l'inclusion dans les études de résistance du comportement dynamique des structures, telles que celles des engins de levage en parti-

culier, ne consistait qu'en une extension des calculs statiques courants, moyennant une majoration adéquate de certaines charges et une révision des coefficients de sécurité usuels. L'avènement récent des centrales nucléaires, avec tous les risques nouveaux que cela im-