

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizer Ingenieur und Architekt
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	101 (1983)
<b>Heft:</b>	4
<b>Artikel:</b>	Zur Bestimmung der dynamischen Steifigkeitsmatrix eines unendlichen Gebietes
<b>Autor:</b>	Wolf, John P.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-75046">https://doi.org/10.5169/seals-75046</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Bestimmung der dynamischen Steifigkeitsmatrix eines unendlichen Gebietes

Von John P. Wolf, Zürich

In der dynamischen Analyse der Bodenstruktur Interaktion wird der Boden als unendliches Gebiet betrachtet, das nicht mittels einer endlichen Anzahl von Finiten Elementen mit endlichen Abmessungen modelliert werden kann. Der einzuführende fiktive Rand würde Wellen reflektieren. Auch künstlich erzeugte Materialdämpfung erlaubt es nicht, mit einer vertretbaren Anzahl von Finiten Elementen auszukommen. Die Randelement-Methode eignet sich gut, um ein unendliches Gebiet zu modellieren. Die Diskretisierung beschränkt sich dabei auf die Kontaktfläche Boden-Struktur. Als praktische Anwendung wird die dynamische Analyse des Reaktorgebäudes des KKW Angra 2, auf Pfählen gelagert, besprochen.

In the dynamic analysis of soil-structure interaction the soil is regarded as an unbounded domain which cannot be modelled with a finite number of finite elements. The fictitious boundary, which would have to be introduced, would reflect waves. Also introducing material damping artificially does not allow a model to be established with a reasonable number of finite elements. The boundary-element method, however, is well suited to model an infinite domain. The discretization is limited to the structure-soil interface. As a practical application the dynamic analysis of the reactor building of the NPP Angra 2, founded on piles, is discussed.

## Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung der Analyse der Bodenstruktur Interaktion ist in Bild 1 dargestellt. Die Erregung besteht entweder aus einer zeitlich sich ändernden, an der Struktur angreifenden Last oder aus einer Erdbebenbewegung, die z. B. an der Oberfläche des Bodens vorgeschrieben ist. Gesucht ist die Beanspruchung der Struktur.

Die Modellierung der Struktur mit endlichen Abmessungen ist verhältnismässig einfach durchzuführen. Die Bewegungsdifferentialgleichungen der diskretisierten Struktur werden aufgestellt, zu deren Lösung leistungsfähige Methoden zur Verfügung stehen. Im allgemeinen kommt es zu einer Wechselbeziehung zwischen Struktur und Boden, so dass dieser auch modelliert werden muss. Der *horizontal geschichtete Boden* ist nun aber, im Gegensatz zur Struktur, *ein unendliches Gebiet*. Für statische Lasten kann ein fiktiver Rand in genügender Entfernung von der Struktur, wo die Beanspruchung vom praktischen Standpunkt aus abgeklungen ist, eingeführt werden. Dies führt zu einem endlichen Gebiet auch für den Boden, der ähnlich wie die Struktur modelliert werden kann. Das gesamte diskretisierte System, bestehend aus Struktur und Boden, kann dann einfach erfasst werden. Für dynamische Lasten kann dieses Vorgehen aber nicht verwendet werden. Der fiktive

Rand würde Wellen, die von der Struktur herkommen, reflektieren, anstatt sie durchzulassen. Sie könnten somit nicht mehr ins Unendliche abstrahlen. Diese Anforderung, das *Unendliche zu modellieren*, unterscheidet die Bodendynamik von der Strukturdynamik.

Im folgenden soll vorausgesetzt werden, dass der Boden und die Struktur sich (quasi) linear elastisch verhalten. In diesem Fall ist es günstig, die Bewegungsdifferential-Gleichungen im Frequenzbereich zu formulieren. Wird der Boden als Substruktur erfasst, muss nur seine sogenannte *dynamische Steifigkeitsmatrix*, bezogen auf die Freiheitsgrade längs der Bodenstruktur Kontaktfläche, bestimmt werden, d. h. die Amplituden der Kräfte in den Knoten infolge Einheitsamplituden der Verschiebungen für die harmonische Erregung mit der Frequenz  $\omega$ .

## Stab mit exponentiell zunehmender Fläche

Um zu belegen, dass es praktisch unmöglich ist, den unendlich ausgedehnten Boden mit einem endlichen Gebiet von z. B. Finiten Elementen, das durch einen fiktiven Rand begrenzt wird, abzubilden, soll ein *unendlich langer Stab mit exponentiell zunehmender Fläche* untersucht werden. Dieser soll als *grobes Modell* des als Halbraum betrachteten Bodens verwendet werden (Bild 2). Unter der Voraussetzung, dass die Kontaktfläche zwischen dem Boden und

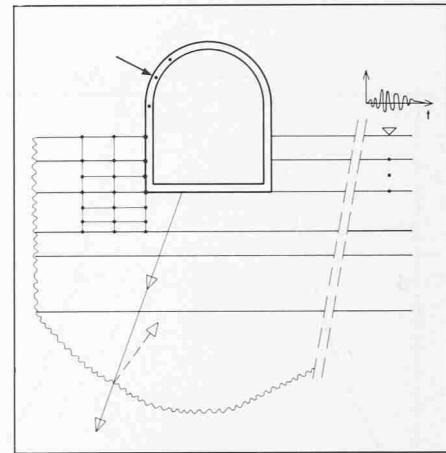


Bild 1. Aufgabenstellung der Analyse der Bodenstruktur Interaktion

der Struktur an der Oberfläche starr ist, kann dieser Stab mit vertikaler Achse und dem Elastizitätsmodul  $E$  für die Abschätzung des dynamischen Steifigkeitskoeffizienten  $S_0$  in vertikaler Richtung betrachtet werden.

$$(1) \quad P_0 = S_0 w_0$$

wobei  $P_0$  und  $w_0$  die Amplituden der Last und der Verschiebung im Punkte 0 an der Oberfläche darstellen. Die mit der Tiefe exponentiell zunehmende Fläche  $A(z)$  trägt der Lastausbreitung im Boden Rechnung.

$$(2) \quad A(z) = A_0 e^{z/d}$$

Die Länge  $d$  stellt die Tiefe dar, bei der die Fläche gleich  $A_0 e$  ist.

Mittels der Annahmen der Stabstatik kann<sup>1</sup> die Bewegungsdifferentialgleichung aufgestellt werden. Um den dynamischen Steifigkeits-Koeffizienten des unendlich langen Stabes herzuleiten, wird nur die Welle, die in der Richtung der positiven  $z$ -Achse, d.h. von der Kontaktfläche zwischen Boden und Struktur weg, sich fortpflanzt, zugelassen. Dies führt gemäss [1] zu

$$(3) \quad S_0 = \frac{EA_0}{d} (k_1 + i a_0 c_1)$$

Die Federkonstante  $k_1$  und die Dämpfungskonstante  $c_1$  sind Funktionen der dimensionslosen Frequenz  $a_0$

$$(4) \quad a_0 = \frac{\omega d}{c_p}$$

wobei  $c_p$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit darstellt. Das Bild 3 zeigt  $k_1$  und  $c_1$  als Funktion von  $a_0$ . Es ist bemerkenswert, dass für  $a_0 < 0,5$ ,  $c_1 = 0$  sich ergibt, d.h. es wird in diesem Frequenzbereich keine Energie abgestrahlt.

Aufgrund der gleichen Bewegungsdifferentialgleichung kann auch die Steifigkeitsmatrix eines Stabes der Länge  $h$  (siehe Bild 2) hergeleitet werden. An der unteren Begrenzung wird ein fiktiver Rand, der festgehalten wird, ein-

\* Vgl. Schweizer Ingenieur und Architekt, Heft 51/52: 1117-1121, 1982; Heft 1/2: 2-7, Heft 4: 42-46, 1983

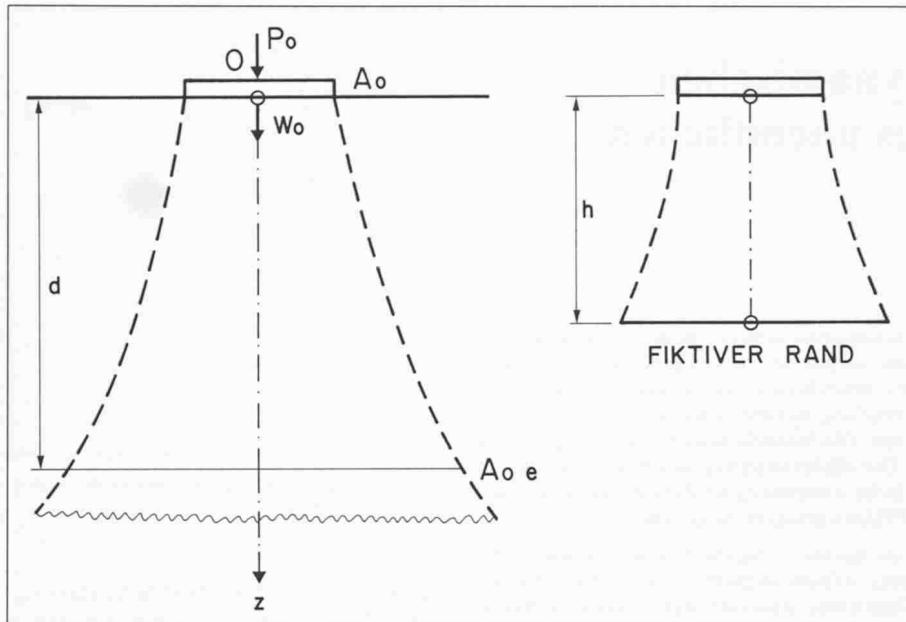


Bild 2. Stab mit exponentiell zunehmender Fläche als grobes Modell des Bodens

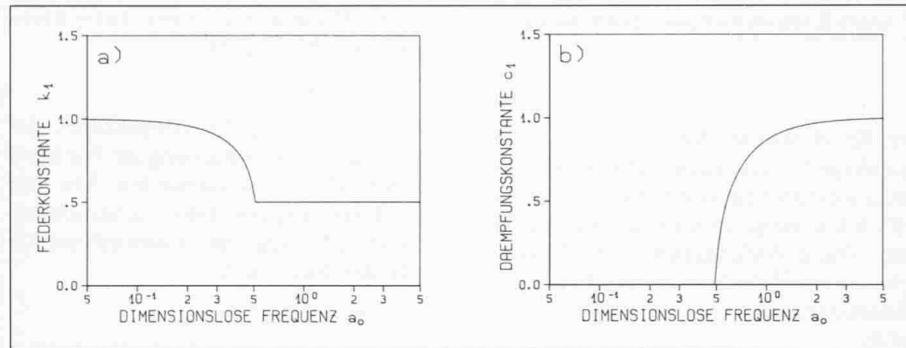


Bild 3. Dynamischer Steifigkeitskoeffizient

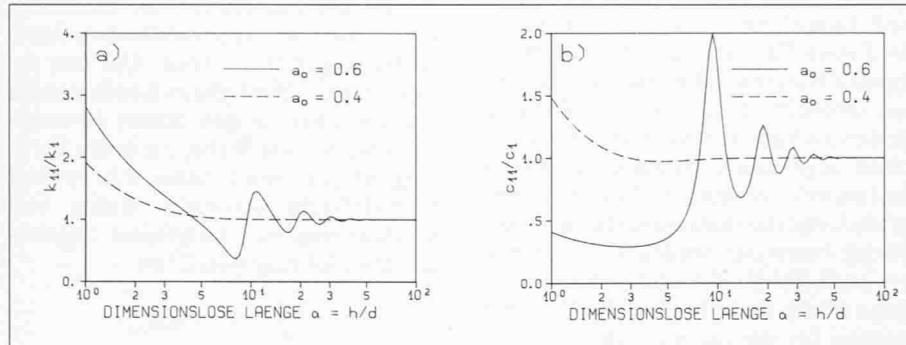
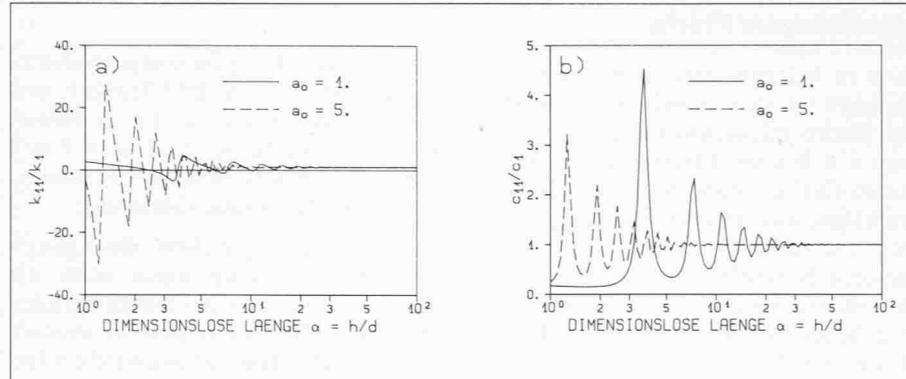


Bild 4. Konvergenz des dynamischen Steifigkeitskoeffizienten, niedriger Frequenzbereich

Bild 5. Konvergenz des dynamischen Steifigkeitskoeffizienten, hoher Frequenzbereich



geführt. In einem endlichen Stabelement werden sich Wellen in beiden Richtungen längs der Achse fortpflanzen. Um zu erreichen, dass die Amplituden der reflektierten Wellen, die sich gegen die Kontaktfläche Bodenstruktur zu bewegen, klein sind, muss Materialdämpfung eingeführt werden.  $S_0$  kann analog ausgedrückt werden als

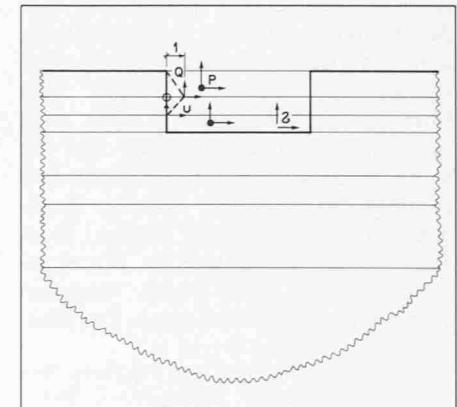
$$(5) \quad S_0 = \frac{EA_0}{d} (k_{11} + ia_0 c_{11})$$

$k_{11}$  und  $c_{11}$ , berechnet aus der dynamischen Steifigkeitsmatrix des Stabes der Länge  $h$ , sind Funktionen von  $a_0$  und vom Dämpfungsmass  $\xi$ . Für  $h \rightarrow \infty$ , wird  $k_{11}$  zu  $k_1$  und  $c_{11}$  zu  $c_1$  konvergieren. Um das Konvergenzverhalten zu studieren, werden  $k_{11}/k_1$  und  $c_{11}/c_1$  als Funktion der dimensionslosen Länge  $\alpha = h/d$  für die angegebenen  $a_0$  in den Bildern 4 und 5 dargestellt ( $\xi = 0,05$ ). Es ist offensichtlich, dass für einen vernünftigen Abstand  $h$  des fiktiven Randes die Approximation des dynamischen Steifigkeitskoeffizienten des endlichen Stabes an den des unendlichen unbefriedigend bleibt. Daraus folgt, dass die Modellierung des unendlichen Bodens durch ein endliches Gebiet mittels z.B. Finiter Elemente abzulehnen ist.

## Randelement-Methode

In der Finiten-Element-Methode erfüllen die gewählten Verschiebungsfunktionen mit den unbekannten Koeffizienten weder die Differentialgleichungen noch im allgemeinen die Randbedingungen genau. Dies führt dazu, dass das gesamte Gebiet *diskretisiert* werden muss, was, wenn es bis ins Unendliche reicht, wo ebenfalls (Abstrahlungs-) Randbedingungen zu erfassen sind, problematisch ist. Werden die Verschiebungsfunktionen so gewählt, dass sie die Differentialgleichungen genau erfüllen, wird die Diskretisierung auf den

Bild 6. Grundsätzliches Vorgehen in der Randelement-Methode



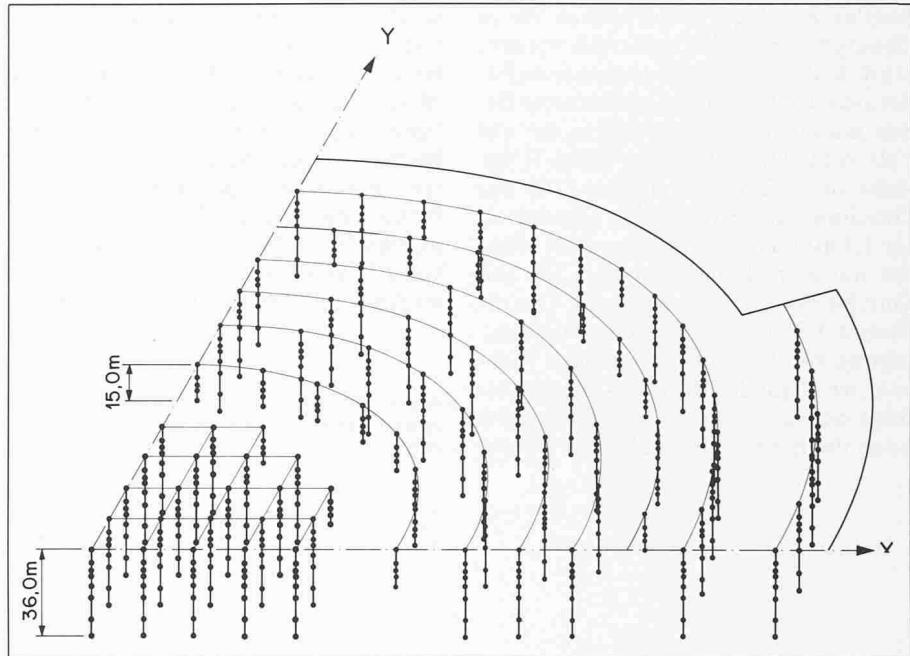
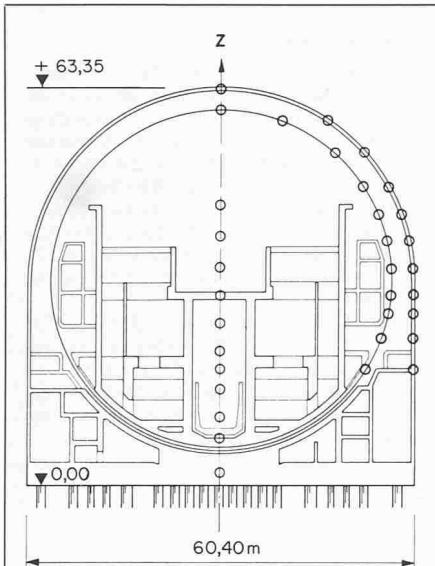


Bild 8. Diskretisiertes Pfahl-Boden-System

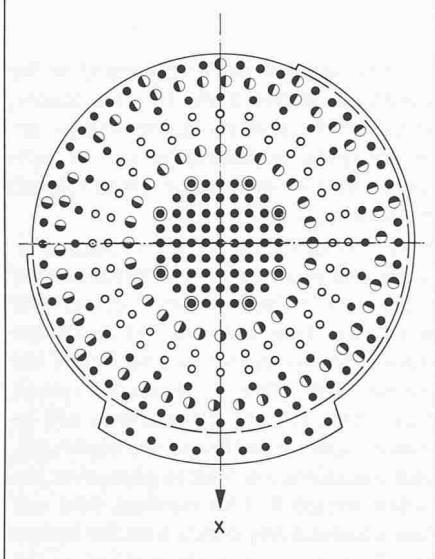


Bild 7. Reaktorgebäude Angra 2. Ansicht und Grundriss mit der Lage der Pfähle

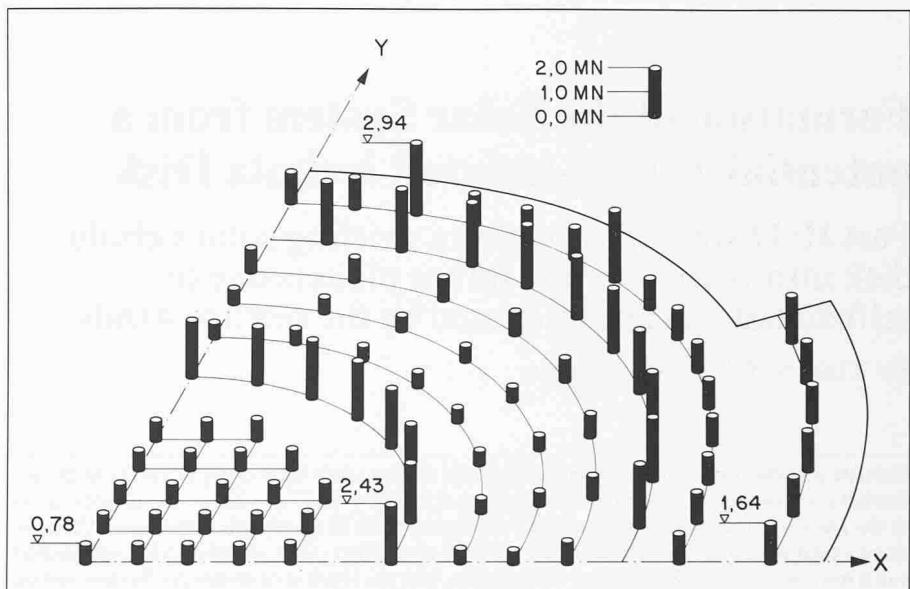


Bild 9. Maximale Querkräfte an den Pfahlköpfen

Rand beschränkt. Dies führt zur Randelement-Methode.

Eine Formulierung dieser Randelement-Methode soll anhand des Berechnungsvorganges der Steifigkeitsmatrix des Bodens (Bild 1) anschaulich erläutert werden. Für den geschichteten Halbraum (ohne Aushub) kann die Beanspruchung (Verschiebung, Spannungen) infolge Einzellasten bestimmt werden, wobei die Differentialgleichungen, die Übergangsbedingungen von Schicht zu Schicht, die Randbedingungen an der freien Oberfläche und die Abstrahlungsbedingungen im Unendlichen genau erfüllt werden (Bild 6). Das Verformungsbild  $u$ , das zur Bestimmung einer bestimmten Kolonne der dynami-

schen Steifigkeitsmatrix dem geschichteten Halbraum aufgezwungen wird, ist im Bild 6 angegeben. Es besteht aus einer Einheitsamplitude einer Lagekoordinate, wobei die andern verschwinden. Dies soll durch Lasten  $P$ , die nur an jenem Teil des Bodens angreifen, der später ausgehoben wird, erzeugt werden. Die Übereinstimmung wird nur im Sinne eines gewichteten Mittels möglich sein. Die Belastung führt zu Spannungen  $\sigma$  längs der Linie, die nach dem Abhub auf der Kontaktfläche Bodenstruktur liegt. Diese können zu den Amplituden der Knotenlasten  $Q$  aufintegriert werden, die die Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix darstellen. Alle Berechnungen können am geschichteten Halbraum ohne

Aushub durchgeführt werden. Nur die Linie des Halbraumes, die später die Kontaktfläche Bodenstruktur bildet, wird diskretisiert.

Dynamische Steifigkeitsmatrizen von Zylindern, eingebettet in einen geschichteten Halbraum, sind mittels der Randelement-Methode berechnet worden [2].

## Pfahlfundation des KKW Angra 2

Als praktisches Beispiel einer Analysis der Bodenstruktur Interaktion soll die seismische Berechnung der Pfahlfundation des Reaktorgebäudes des Kern-

kraftwerkes Angra 2 in Brasilien, die in [3] aufgeführt ist, kurz gestreift werden. Unterhalb der Fundamentplatte befindet sich der horizontal geschichtete Boden mit einer Stärke von 35 m, der auf Fels ruht. Die Fundation (Bild 7) besteht aus 202 Spitzenpfählen (146 mit Durchmesser 1,3 m, 56 mit Durchmesser 1,1 m) und 88 schwimmenden Pfählen mit einer Länge von 15 m (80 mit Durchmesser 1,8 m, acht mit Durchmesser 1,3 m). Die Erdbebenbeschleunigung von 0,1 g in horizontaler Richtung wirkt auf der Höhe des Felsens. Infolge der (approximativen) Symmetrie kann die Berechnung auf einen Viertel

beschränkt werden. Längs der Kontaktfläche zwischen den Pfählen und des Bodens werden 556 Knoten eingeführt (Bild 8), die auch die dynamische Steifigkeitsmatrix des Bodens festlegen. Als Beispiel der Resultate werden im Bild 9 die maximalen Querkräfte an den Pfahlköpfen dargestellt. Wie erwartet, werden die Pfähle am Rande stärker belastet (1,26mal den Mittelwert) als die im Zentrum (0,60mal den Mittelwert).

Adresse des Verfassers: Dr. J.P. Wolf, Elektrowatt Ingenieurunternehmung AG, Postfach, 8022 Zürich.

#### Zitierte Literatur

- [1] Wolf, J.P. und Weber, B. (1982): «On calculating the dynamic-stiffness matrix of the unbounded soil by cloning». Proceedings International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, A.A. Balkema (Rotterdam), pp. 486-494
- [2] Apsel, R.J. (1979): «Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems». Ph. D. Dissertation, University of California, San Diego
- [3] Wolf, J.P., von Arx, G.A., de Barros, F.C.P. and Kakuba, M. (1981): «Seismic analysis of the pile foundation of the reactor building of the NPP Angra 2». Nuclear Engineering and Design, Vol. 65, No. 3, pp. 329-341

## Formation of the Solar System from a potential-vortex-natured Nebula Disk

### Part II: Disintegration of the swirling solar nebula disk into vortices of the infant planets due to selfexcited vibrations caused by the surface winds

By Yian N. Chen, Winterthur

Evaluation of the present orbits of the planets and the asteroid's leads to the discovery of the primordial solar system as a potential-vortex-natured nebula disk. The winds on its surfaces caused by the gravity of the infant sun, similar to the surface flows of a bath-tub vortex, would have induced a tidal wave pattern in the disk due to a kind of the self-excited vibration. This wave pattern would have become unstable owing to nonlinearity, with the result of its disintegration into vortices representing the primeval planets. It can be shown that the local values of the vorticity and the coriolis acceleration of the nebula disk will then determine the angular momentum of the future planet about its own axis. The orbits of the inner planets Mercury, Venus, earth and Mars, and those of the asteroid's, divided by the various Kirkwood gaps, correspond then to the nodal circles of the tidal-wave pattern, whilst the orbits of the outer planets Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and Pluto correspond to the anti-nodal circles of this pattern. It can be further shown that this difference in the orbital patterns and the density distribution of these planets are an expression of the surface winds mentioned.

### Excitation of the tidal waves in the primordial gaseous disk of the solar system

The primordial gaseous disk of the solar system, as suggested in a previous chapter, is sketched in subfigure b of Fig. 11 corresponding to the present position of the planets and the asteroids (subfigure a). The disk represents a potential vortex superimposed on a gravitation field of a great mass  $M$  situated in the center of the disk. The disk of a dense mass rotates in a space of

a rather small density. The following flow model can be established from the *fluid-dynamic theory*:

A profile of the swirl velocities such as curve 1 can be supposed. In the boundary layer between the disk and the space, the swirl velocity  $v_{\varphi}$  is much less than that in the disk ( $v_{\varphi 0}$ ). The centrifugal force of the boundary layer can therefore not balance the gravity of the central mass  $M$ . A radial flow on the surface of the disk will be generated, as denoted by 2 in the outer planet field and by 2' in the inner planet field. On the other hand, the inflow (3) from the

zenithal direction will be generated by the gravitation of the mass  $M$ . This inflow, which will be strongly accelerated by approaching the central region, can be compared with a jet directed on a wall (Sketch in subfigure c).

In the central region (4), a very high pressure will be generated due to impact on the mass  $M$ . This high pressure center will deflect the flow outward (5) to stream within a thin layer over the surface of the gaseous disk. Due to strongly curved stream lines (5), the gaseous disk will be pressed tightly together in the region (6), until a deceleration 7 takes place over the further stretch 8. This outward flow will form a toroidal ring vortex with the inward flow 2' below it, much the same as on the bath-tub vortex (flows c and a' in Fig. 9). This toroidal ring vortex will increase the instability of the gaseous disk. However, the outward flow outweighs the inward flow, so that the effect of the latter on the surface of the gaseous disk will be masked by the former so far as their role as a surface wind is concerned. Fig. 11 a shows the variation of the radial velocities.

The outward flow of the inner field, will meet the inward flow (2) of the outer field at the position of Jupiter (9). The inward flow needs a much longer way to reach the same velocity as that of the outward flow in order to stop it. Therefore, Jupiter lies much nearer to the sun than to the outer edge of the gaseous disk.

The huge amount of gas carried by these two flows will be piled up there so that a very thick gas ring will be formed separating the outer field from the inner one. The wind over the surface of the inner field is very strong at the beginning along