

**Zeitschrift:** Schweizer Ingenieur und Architekt  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 101 (1983)  
**Heft:** 18

**Artikel:** Le critère d'adaptation en analyse des contraintes - exemples d'application  
**Autor:** Pedro, Michel del / Xenophontidis, Nicolas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-75129>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Le critère d'adaptation en analyse des contraintes – exemples d'application

par Michel Del Pedro et Nicolas Xenophontidis, Lausanne

Un élément mécanique ne peut être dimensionné de manière correcte, généralement, qu'en acceptant l'apparition de plastifications locales. Si les charges varient dans le temps, il faut contrôler que n'apparaisse pas un phénomène de fatigue oligocyclique (plastification en cycles fermés) ou d'endommagement plastique incrémental (plastification en cycles évolutifs), entraînant le risque d'une rupture rapide de l'élément. Le critère d'adaptation permet de juger si des contraintes résiduelles suffisantes pour empêcher ces processus destructifs peuvent s'établir dans le système qui n'est dès lors soumis qu'à la fatigue ordinaire en domaine élastique. Après le rappel de quelques relations classiques de l'analyse des contraintes, le présent article donne l'énoncé du critère d'adaptation et du théorème qui en découle. Trois cas d'application sont ensuite examinés: le premier est un exemple de principe, les deux autres sont tirés de la pratique industrielle.

Im allgemeinen kann ein mechanisches Element nur richtig dimensioniert werden, wenn man lokale plastische Verformungen akzeptiert. Wenn die Belastungen von der Zeit abhängen, muss man kontrollieren, dass keine oligozyklische Ermüdung (plastische Verformung in geschlossenen Zyklen) oder inkrementale plastische Beschädigung («plastische Verformung in evolutiven Zyklen») erscheint, die zum schnellen Bruch des Elementes führen würde. Das Anpassungskriterium (shakedown) erlaubt zu beurteilen, ob genügende Restspannungen, die diese Zerstörungsprozesse verhindern können, im System verbleiben. In diesem Fall wird das System nur einer gewöhnlichen Ermüdung im elastischen Bereich unterworfen. In diesem Beitrag werden zuerst einige klassische Gleichungen der Spannungsanalyse in Erinnerung gerufen. Sodann werden das Anpassungskriterium und der daraus folgende Satz formuliert. Schliesslich werden noch drei Beispiele untersucht: beim ersten handelt es sich um eine direkte Anwendung, wogegen die beiden anderen Fälle aus der industriellen Praxis stammen.

## Rappel de quelques relations de l'analyse des contraintes

L'état de contrainte en un point M d'un milieu continu est défini par 6 quantités indépendantes. En fonction du but recherché, nous utiliserons les notations indicielles  $\sigma_{ij}$  ou les notations habituelles  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  qui deviennent  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  dans les axes principaux.

En désignant par  $\varepsilon_{ij}$  les déformations relatives et en adoptant la convention d'Einstein, l'énergie volumique de déformation au point M peut s'écrire

$$(1) \quad u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

On définit la contrainte moyenne et les contraintes déviatoriques

$$(2) \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$(3) \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (\delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker})$$

Si  $G$  et  $\mu$  sont respectivement le module de glissement et le coefficient de Poisson et si l'on définit la quantité sans dimension

\* Vgl. Schweizer Ingenieur und Architekt, Heft 51/52: 1117-1121, 1982; Heft 1/2: 2-7; Heft 4: 42-46, 47-50; Heft 9: 275-278, 279-281; Heft 15: 409-412, 413-416, 1983; Heft 18: 478-484, 1983.

$$(4) \quad \varphi = \frac{3(1-2\mu)}{1+\mu}$$

on vérifie facilement que  $\varepsilon_{ij}$  et  $u$  peuvent s'écrire

$$(5) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( s_{ij} + \frac{\varphi}{3} \delta_{ij} \sigma_m \right)$$

$$(6) \quad u = \frac{1}{4G} (s_{ij} s_{ij} + \varphi \sigma_m^2)$$

L'énergie comprend deux parties

$$u = u_d + u_p$$

Le terme  $u_p$  est l'énergie hydrostatique correspondant à la variation relative de volume d'un élément autour du point M alors que le terme  $u_d$  représente l'énergie de distorsion nécessaire pour modifier la forme (les angles) de l'élément. L'énergie de distorsion est due aux seules contraintes déviatoriques. On montre qu'elle a pour valeur

$$(7) \quad u_d = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij}$$

Par la suite, seul le modèle de comportement de la plasticité parfaite, correspondant au diagramme bien connu de la figure 1, sera pris en considération.

Le critère de la plus grande énergie de distorsion, appelé également critère de Von Mises, affirme que l'écoulement plastique se produit dès que l'énergie  $u_d$

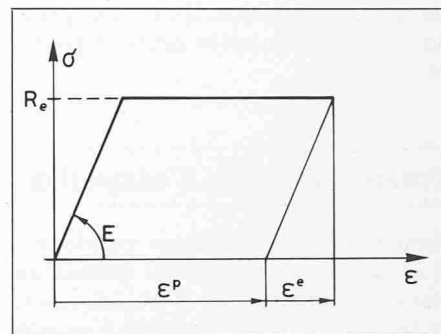


Fig. 1. Modèle de comportement «élastique – idéallement plastique» (plasticité parfaite)

dépasse une certaine valeur, la même quel que soit l'état de contrainte, et que l'on peut donc déterminer par un simple essai de traction. Dans un tel essai, quand la contrainte appliquée atteint la limite élastique  $R_e$ ,  $u_d$  devient

$$(8) \quad u_d = \frac{R_e^2}{6G}$$

Un état de contrainte  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  correspondant à l'écoulement plastique, appelé état limite de contrainte, doit respecter les conditions équivalentes ci-dessous, obtenues en égalant (8) à (7):

$$(9) \quad s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} R_e^2$$

$$(10) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 R_e^2$$

Dans l'espace des contraintes principales, ces relations représentent une surface cylindrique de section circulaire et de rayon  $R = \sqrt{2/3} R_e$ . L'axe du cylindre, d'équation  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , correspond à l'axe de symétrie ternaire des axes principaux.

Quand l'état de contrainte devient limite, la déformation comprend une partie élastique et une partie plastique:

$$(11) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

Prenons la différentielle de cette relations

$$(12) \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

En plasticité parfaite, la contrainte ne dépend que de la déformation élastique (fig. 1). Dès lors, par analogie avec la relation (5), l'accroissement de la déformation élastique peut s'écrire

$$(13) \quad d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left( ds_{ij} + \frac{\varphi}{3} \delta_{ij} d\sigma_m \right)$$

Pour le deuxième terme, nous pouvons admettre que la plastification – nécessairement faible pour que l'adaptation soit possible comme nous le verrons plus loin – se fait à volume constant. On peut montrer que cette condition est satisfaite quand les accroissements des composantes de la déformation plastique sont proportionnels aux contraintes déviatoriques.

$$(14) \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$$

Dans cette expression,  $d\lambda$  est une quantité scalaire infiniment petite et positive.

### Critère et théorème d'adaptation

Supposons que des charges extérieures  $P_k$  appliquées sur un système mécanique aient provoqué, après la plastification de certaines zones, la création d'un état de contrainte  $\sigma_{ij}$  en un point de ce système. Après la suppression de ces charges extérieures, il subsiste en général des contraintes résiduelles  $\varrho_{ij}$ , dues aux plastifications existantes. Nous appellerons «contraintes apparentes»  $\sigma_{ij}^a$  les différences entre les contraintes réelles sous charge et les contraintes résiduelles; elles sont de nature élastique.

$$(15) \sigma_{ij}^a = \sigma_{ij} - \varrho_{ij}$$

Les contraintes résiduelles satisfont les conditions d'équilibre intérieur sous charge nulle. Par analogie avec (3), définissons les contraintes déviatoriques correspondantes

$$(16) r_{ij} = \varrho_{ij} - \delta_{ij} \varrho_m \text{ avec } \varrho_m = \frac{1}{3} \varrho_{ii}$$

Supposons qu'après une ou plusieurs nouvelles applications des charges  $P_k$ , les contraintes résiduelles tendent vers une valeur constante  $\bar{\varrho}_{ij}$ , telle qu'aucune plastification supplémentaire ne puisse se produire. Répété ensuite un grand nombre de fois, le cycle des charges  $P_k$  ne provoquera que de la fatigue en domaine élastique; on dira que le système mécanique est adapté vis-à-vis des charges  $P_k$ .

Appelons  $P'_k$  le niveau maximum des charges pour lequel ce processus est encore possible. Le système mécanique a dès lors mobilisé toute sa capacité de résistance élastique; il est «complètement adapté». Des charges encore plus grandes entraîneraient une destruction rapide par *fatigue oligocyclique* ou par *endommagement plastique incrémental*

(tous les cycles provoquent une nouvelle plastification). Désignons par  $\bar{\varrho}_{ij}$ , avec un déviateur  $\bar{r}_{ij}$ , les contraintes résiduelles dans un système adapté. Le critère d'adaptation affirme que la somme de ces contraintes résiduelles et des contraintes apparentes doit respecter la condition de Von Mises.

$$(17) (\bar{r}_{ij} + s_{ij}^a) (\bar{r}_{ij} + s_{ij}^a) \leq \frac{2}{3} R_e^2$$

### Enoncé du critère d'adaptation

Il n'existe pas de formulation des conditions devant être remplies, à l'échelle globale, pour que l'adaptation d'un système soit possible. Les considérations qui précèdent montrent déjà qu'une structure mécanique peut comporter, pour une même morphologie, autant d'états adaptés que de cas de charges raisonnables peuvent être envisagés.

Le critère d'adaptation ne concerne dès lors que l'échelle locale et peut être énoncé comme suit: «Un système mécanique supportant des charges répétées est adapté, c'est-à-dire n'est soumis qu'à la fatigue élastique, si peuvent exister des contraintes résiduelles  $\bar{\varrho}_{ij}$  satisfaisant à la fois les conditions d'équilibre intérieur sous charges nulles et la relation (17) concernant l'énergie de distortion.»

### Théorème d'adaptation

Le processus d'adaptation fait l'objet d'un théorème pour lequel nous proposons la formulation suivante: Un système mécanique est adaptable si, pour un programme de charge donné, la possibilité d'existence d'un état de contrainte résiduel  $\bar{\varrho}_{ij}$  satisfaisant le critère d'adaptation peut être établie. Si tel est le cas, l'application répétée des charges entraînera la création d'un état de contrainte résiduel adapté  $\bar{\varrho}_{ij}$ , en général différent de  $\bar{\varrho}_{ij}$ .

La démonstration est basée sur l'examen de l'énergie  $W$  que provoqueraient dans le volume entier les contraintes  $(\bar{\varrho}_{ij} - \varrho_{ij})$  égales à la différence entre les

contraintes résiduelles  $\bar{\varrho}_{ij}$  de l'état adapté dont on connaît la possibilité d'existence et les contraintes  $\varrho_{ij}$  d'un état en voie d'adaptation.

Le déviateur et la moyenne de  $(\bar{\varrho}_{ij} - \varrho_{ij})$  étant respectivement  $(\bar{r}_{ij} - r_{ij})$  et  $(\bar{\varrho}_m - \varrho_m)$ , on a d'après (6)

$$(18) W = \frac{1}{4G} \int_V [(\bar{r}_{ij} - r_{ij})^2 + \varphi (\bar{\varrho}_m - \varrho_m)^2] dV$$

La fonction  $W$  est une énergie fictive puisque les contraintes  $\bar{\varrho}_{ij}$  et  $\varrho_{ij}$  n'ont pas d'existence simultanée. Son intérêt réside dans le fait que c'est une quantité définie positive représentant une norme commode pour l'étude du tenseur  $(\bar{\varrho}_{ij} - \varrho_{ij})$ .

On peut montrer que si  $\varrho_{ij}$  varie, la fonction  $W$  diminue ou devient stationnaire. Comme  $W$  est, par construction, une fonction positive avec une borne inférieure égale à zéro, elle tend nécessairement, en diminuant, vers une limite supérieure ou égale à la borne. Quand cette limite est supérieure à zéro (cas général), les contraintes résiduelles prennent une valeur constante (adaptée) désignée  $\bar{\varrho}'_{ij}$  et différente de  $\bar{\varrho}_{ij}$ . Elles sont égales à leur valeur particulière  $\bar{\varrho}_{ij}$  (supposée connue a priori) si  $W$  s'annule. Le théorème est ainsi démontré.

### Etat de contrainte monodimensionnel

Le critère d'adaptation prend une forme particulièrement simple quand l'état de contrainte résiduel et l'état de contrainte élastique sont monodimensionnels.

La relation (17) se réduit alors à l'inégalité suivante

$$(\bar{\varrho} + \sigma^a)^2 \leq R_e^2$$

soit, on prenant les racines carrées

$$(19) -R_e \leq \bar{\varrho} + \sigma^a \leq R_e$$

La valeur maximum de  $\sigma^a$  est obtenue quand  $\bar{\varrho} = -R_e$

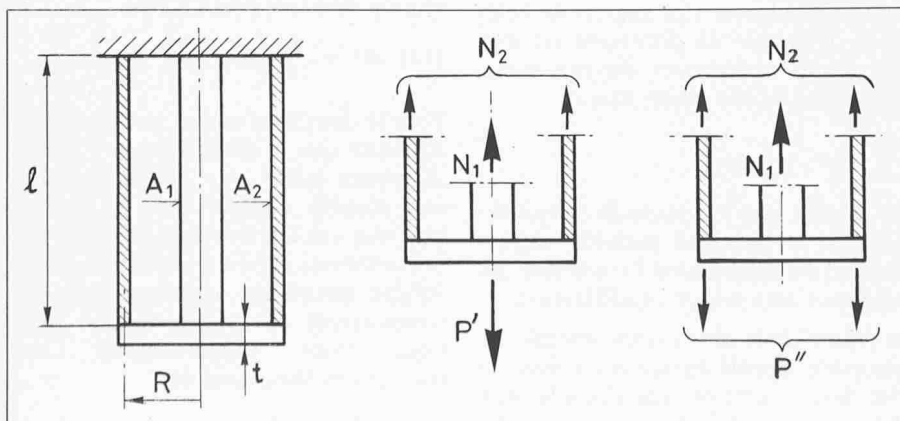
$$-R_e + \sigma_{\max}^a \leq R_e \Rightarrow \sigma_{\max}^a \leq 2 R_e$$

Dans ce cas limite d'adaptation, la contrainte apparente pouvant être appliquée est ainsi égale au double de la limite élastique.

### Exemple de deux cylindres en traction

La figure 2 représente deux cylindres coaxiaux de même longueur  $\ell$  et de même module  $E$ . Le premier a une section pleine  $A_1$ , le second est à paroi mince, sa section est  $A_2$ . Les extrémités su-

Fig. 2 Système de deux cylindres coaxiaux



périeures des cylindres sont bloquées, alors que leurs extrémités inférieures sont rendues solidaires par une plaque déformable circulaire de rayon  $R$  et d'épaisseur  $t$ .

Nous allons rechercher la condition d'adaptation du système, en supposant qu'il est soumis alternativement à une charge  $P'$  appliquée au centre et à une charge  $P''$  répartie uniformément sur la périphérie. Cet exemple ayant pour seul but d'illustrer le principe d'adaptation d'un système, on ne tiendra pas compte des contraintes de flexion créées dans la base des tubes par la plaque. On suppose d'autre part que cette dernière ne subit aucune plastification.

Pour le premier cas de charge, on a d'abord les conditions d'équilibre et de déformation

$$N_1 + N_2 = P';$$

$$\frac{\mathcal{L}N_1}{EA_1} = \frac{\mathcal{L}N_2}{EA_2} + \frac{3(1-\mu^2)R^2}{4Et^3} (P' - N_1)$$

En définissant les rapports

$$\alpha = \frac{A_1}{A_2} \text{ et } \beta = \frac{3(1-\mu^2)R^2 A_1}{4t^3 \mathcal{L}}$$

la résolution des équations précédentes donne

$$N_1 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} P' \quad N_2 = \frac{1}{1 + \alpha + \beta} P'$$

Pour le second cas de charge, on trouve semblablement

$$N_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha + \beta} P'' \quad N_2 = \frac{1 + \beta}{1 + \alpha + \beta} P''$$

Les conditions d'adaptation du système sont influencées de manière essentielle par la valeur des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Une étude de cette influence est intéressante mais ne peut être entreprise ici. Nous adopterons pour la suite les valeurs arbitraires  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$ . Il en résulte:

Premier cas de charge

$$N_1 = \frac{3}{5} P' \quad N_2 = \frac{2}{5} P' \quad N_2 = \frac{2}{3} N_1$$

Second cas de charge

$$N_1 = \frac{1}{5} P'' \quad N_2 = \frac{4}{5} P'' \quad N_2 = 4 N_1$$

Appelons  $N_e$  la force qui provoque la plastification du cylindre intérieur. La plastification du cylindre extérieur apparaît pour une force  $2N_e$  puisque  $A_2 = 2A_1$ . On remarque déjà que la résistance statique du système est ainsi  $P_s \leq 3N_e$ , l'égalité n'étant possible que si la plaque est indéformable ( $\beta = 0$ ). Nous verrons que le système atteint, compte tenu du programme de charge adopté, sa résistance maximum à la fatigue – il est adapté – quand les charges  $P'$  et  $P''$  sont égales toutes deux à  $\bar{P} = (15/7) \cdot N_e$ .

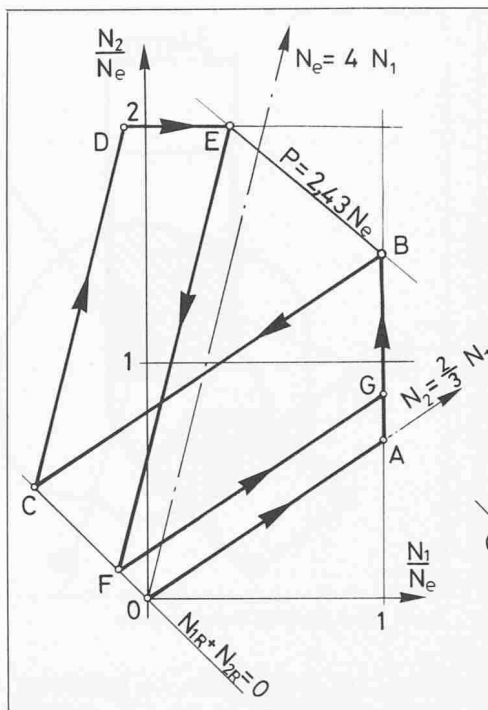


Fig. 3 Cycles avec endommagement incrémental

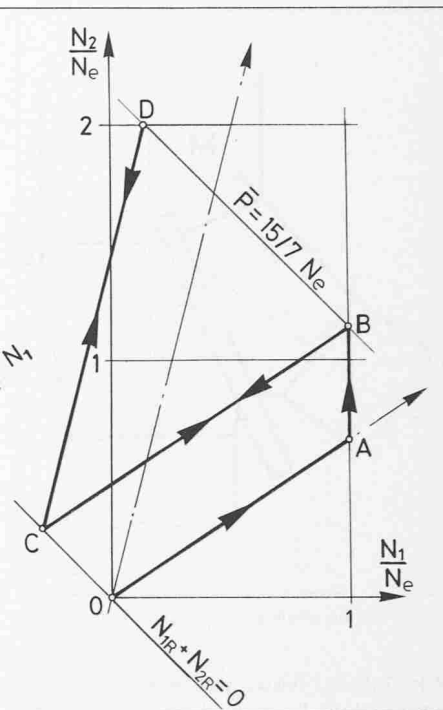


Fig. 4 Cycles du système adapté

Supposons d'abord que l'on applique des charges supérieures à  $\bar{P}$  par exemple  $N = (17/7) \cdot N_e = 2,43 N_e$ . Le processus de chargement peut alors être suivi sur la figure 3. Il comprend les étapes suivantes:

- Application de  $P'$ : 0AB, le cylindre 1 est plastifié, le cylindre 2 est resté dans le domaine élastique.
- Décharge: BC, le point C se trouve sur la droite correspondant à l'équilibre intérieur sous charge nulle;  $N_{1R}$  et  $N_{2R}$  sont les forces résiduelles.
- Application de  $P''$ : CDE, le cylindre 2 est également plastifié.
- Décharge: EF.
- Deuxième application de  $P'$ : FGB, le cycle a sa forme définitive.

A chaque cycle, les deux cylindres subissent une plastification supplémentaire. Ils vont donc subir un endommagement incrémental. Pour que le système soit adapté, il faut que les charges  $P'$  et  $P''$  satisfassent simultanément aux 5 conditions suivantes:

$$N_{1R} + N_{2R} = 0$$

$$N_{1R} + \frac{3}{5} P' \leq N_e \quad N_{2R} + \frac{2}{5} P' \leq 2 N_e$$

$$N_{1R} + \frac{1}{5} P'' \leq N_e \quad N_{2R} + \frac{4}{5} P'' \leq 2 N_e$$

On vérifie facilement que les solutions ont pour valeur commune maximum

$$P' = P'' \leq \frac{15}{7} N_e = \bar{P}$$

Le système est alors complètement adapté. Son comportement est représenté par la figure 4. Le cylindre 1 est plastifié une fois, lors de la première mise en charge, alors que le cylindre 2

ne l'est pas. Bien entendu, ce comportement est lié au choix initial des paramètres fait dans cet exemple ( $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ ).

## Exemples de nature industrielle

### Répartiteur d'une turbine hydraulique Pelton

Notre institut a participé souvent à des mesures tensométriques réalisées lors de l'essai de mise en charge d'organes ou structures hydrauliques. L'exemple que nous allons exposer brièvement ci-après est typique du problème posé par une *plastification locale dans une structure métallique*.

Le répartiteur d'une turbine Pelton a pour fonction de distribuer l'eau de la conduite forcée aux injecteurs. Dans le cas particulier la turbine avait une puissance de 150 MW sous une chute nominale de 830 m et comprenait cinq injecteurs. Le répartiteur, construit avec un acier de limite élastique  $R_e = 480$  MPa, avait un «diamètre» d'environ 15 m.

Les essais de mise en charge ont été effectués à la pression de 14,02 MPa ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$ ) correspondant à 1430 m d'eau, soit 1,72 fois la pression nominale statique. Une rosette à deux jauges perpendiculaires, collée à l'intérieur de l'un des tuyaux-culottes du répartiteur, a montré qu'un allongement plastique de 0,96 pour mille s'était produit, dans la direction circonferentielle, au point M représenté par les figures 5 et 6. Au même point, la contrainte axiale mesurée lors de la phase élastique était environ 15 fois

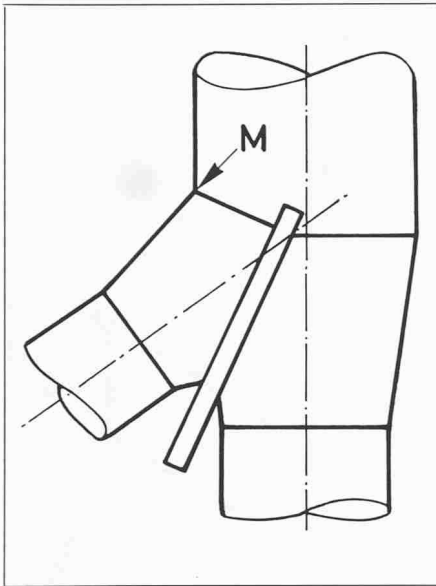


Fig. 5 Tuyau culotte d'un répartiteur hydraulique

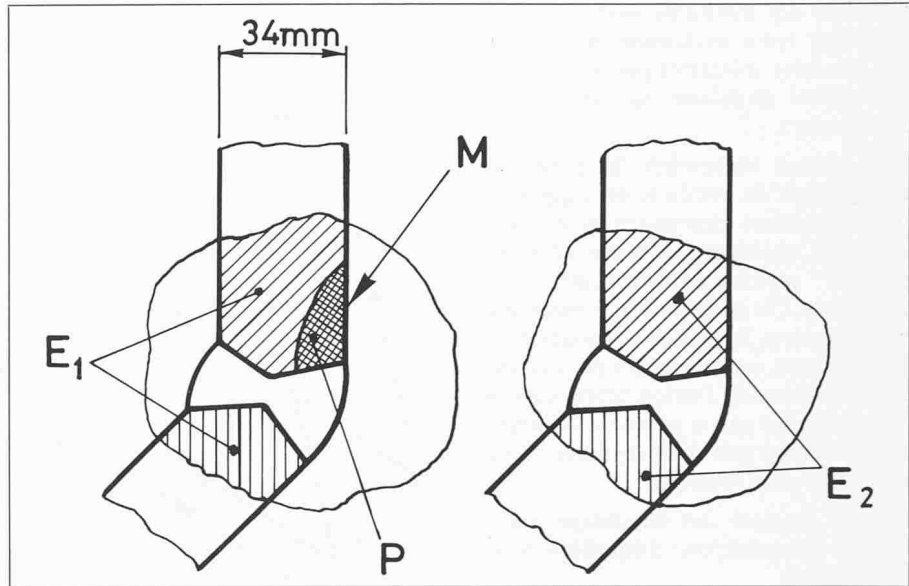


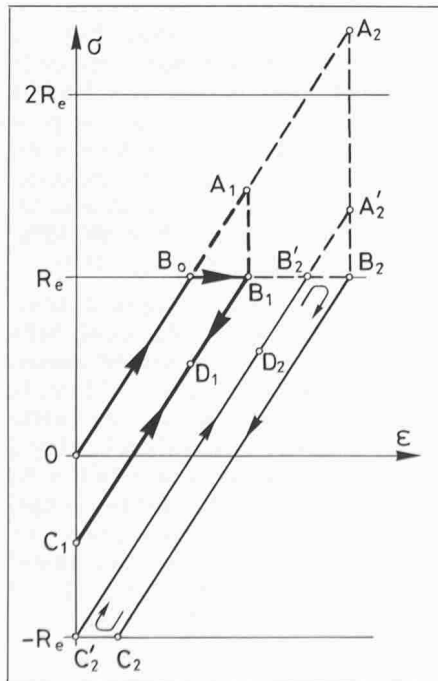
Fig. 6 Zone plastifiée du tuyau-culotte

plus faible. Nous pouvons ainsi admettre, dans les considérations qualitatives qui vont suivre, que l'état de contrainte au point M était monodimensionnel.

Aucune des très nombreuses jauges collées sur le tuyau-culotte, y compris celles qui se trouvaient à l'extérieur en face du point M, n'a révélé de déformation plastique. On peut en déduire que la zone plastifiée P autour du point M était de dimension très réduite, relativement à la zone E1 restée dans le domaine élastique. Dans ces conditions, le processus d'adaptation peut être décrit par la figure 7.

Lors de la mise en charge, la contrainte fictive atteint le point A1; elle a pour valeur  $\sigma^f = R_e + \varepsilon^p E = 480 + 0,96 \cdot 10^{-3} \cdot$

Fig. 7 Cycles de charge et décharge dans la zone initialement plastifiée



$0,21 \cdot 10^6 = 680$  MPa. La contrainte réelle correspond au point B1 pour lequel la déformation plastique  $\varepsilon^p = B_0 B_1$  est sensiblement égale à la moitié de la déformation élastique. Il s'agit donc du domaine des petites déformations plastiques.

Lors du retour de la pression à zéro, toutes les déformations s'annulent, y compris celles de la petite zone plastifiée, en raison de l'influence prépondérante de la partie du tuyau-culotte restée dans le domaine élastique. Il apparaît ainsi au point M une contrainte résiduelle de compression  $\bar{\sigma} = 0C_1 = -200$  MPa. Une nouvelle montée à la pression d'essai ne provoquerait pas de plastification supplémentaire car le point B1 ne serait plus dépassé: le système est adapté.

En réalité, lors des mises en charge ultérieures nécessitées par les conditions d'exploitation de la centrale, la hauteur de chute ne sera que de 830 m. En tenant compte des surpressions dues à la fermeture des injecteurs (coups de bélier), qui atteignent au maximum 10% de la pression statique, la pression dans le répartiteur ne dépassera pas 9,31 MPa, ce qui correspond au point D1 du diagramme. Ainsi, malgré le fait que le point C1 ne se trouve peut-être pas exactement sur l'axe  $0 \sigma$ , on peut affirmer que toute la zone a retrouvé un comportement élastique (E2, fig. 6). La sécurité d'exploitation du répartiteur, relativement à un risque de détérioration plastique est assurée de manière satisfaisante.

Toujours dans l'hypothèse d'une plastification locale, supposons que la déformation plastique initiale ait atteint le point B2, correspondant à la contrainte fictive du point A2, supérieure à  $2 R_e$ . Il suffit de suivre le processus de déchar-

ge-recharge sur le diagramme pour voir que s'établirait alors, avec une pression de 14,02 MPa, un cycle B2 C2 C2' B2' entraînant, s'il se reproduisait souvent, la fatigue oligocyclique de la zone concernée. (Avec une pression de 9,31 MPa seulement, le comportement redevient par contre élastique.)

L'analyse expérimentale des contraintes dans un répartiteur, que nous venons de résumer, confirme la règle suivante:

Une zone plastifiée, de dimension faible relativement à son environnement resté élastique, s'adapte toujours si l'état de contrainte est monodimensionnel et si la contrainte fictive lors de la première application des charges n'excède pas le double de la limite élastique.

#### Tubulure à haute pression d'une installation chimique

Certaines installations chimiques comportent des tubes pour le transport à très haute pression de gaz fourni par des compresseurs à pistons. La figure 8 représente un tronçon de longueur unité d'un tel tube; les symboles ont la signification suivante:

$r_i r_e$	rayons intérieur et extérieur
$p_i p_e$	pressions intérieure et extérieure $\Delta p = p_i - p_e$
$t_i t_e$	températures intérieure et extérieure $\Delta t = t_i - t_e$
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	contraintes axiale, tangentielle et radiale au point M.

Pour l'exemple examiné, la pression et la température sont plus grandes à l'intérieur qu'à l'extérieur quand l'installation est en fonctionnement. Ainsi les quantités  $\Delta p$  et  $\Delta t$  sont toujours positives ou nulles, et quatre cas fondamentaux sont à prendre en considération quant à leurs valeurs respectives:



- 1) 0, 0: l'installation est arrêtée
- 2)  $\Delta p, 0$ : le compresseur a démarré, la température n'a pas encore augmenté de manière appréciable
- 3)  $\Delta p, \Delta t$ : l'installation est en régime nominal
- 4) 0,  $\Delta t$ : le compresseur est arrêté; la température n'a pas encore baissé.

Pour la suite, il est commode de définir les grandeurs suivantes:

$$\lambda = \frac{r_e}{r_i} \quad \varphi = \frac{r_e}{r} \quad \sigma_0 = \frac{E \alpha \Delta t}{2(1-\mu) \ln \lambda}$$

Dès lors, les contraintes principales au point M, dues à la pression et à la température, ont pour valeurs en régime élastique (avec l'indice a pour être conforme aux notations de la relation (17)):

$$(20) \quad \begin{cases} \sigma_1^a = \frac{\Delta p}{\lambda^2 - 1} + \sigma_0 \left[ 1 - 2 \ln \varphi - \frac{2}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \right] \\ \sigma_2^a = \frac{\Delta p}{\lambda^2 - 1} (1 + \varphi^2) + \sigma_0 \left[ 1 - \ln \varphi - \frac{\varphi^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \right] \\ \sigma_3^a = \frac{\Delta p}{\lambda^2 - 1} (1 + \varphi^2) + \sigma_0 \left[ - \ln \varphi + \frac{\varphi^2 - 1}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \right] \end{cases}$$

Appelons  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$  les contraintes résiduelles d'un état adapté éventuel. Elles doivent satisfaire les conditions d'équilibre intérieur, soit pour les directions axiale et circonférentielle:

$$(21) \quad \int_{A_1} \bar{\sigma}_1 dA_1 = 0 \quad (22) \quad \int_{A_2} \bar{\sigma}_2 dA_2 = 0$$

Quant aux contraintes radiales, elles sont, par nature, symétriques par rapport à l'axe du tube. Leur somme est donc identiquement nulle sur une surface cylindrique de rayon  $r$ .

L'existence d'un état adapté implique que les contraintes  $\bar{\sigma}_i + \sigma_i^a$  satisfassent la condition de Von Mises exprimée par la relation (17). Pour donner aux résultats une forme aussi simple que possible, il est avantageux d'adopter les conventions d'écriture suivantes:

$$(23) \quad \beta = \frac{\Delta p}{R_e} \quad (24) \quad \gamma = \frac{\sigma_0}{R_e}$$

$$(25) \quad x = \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}{R_e} \quad y = \frac{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3}{R_e} \quad z = \frac{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1}{R_e}$$

$$(26) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{\varphi^2}{\lambda^2 - 1} \\ f_2 = -\ln \varphi + \frac{\varphi^2 - 1}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \\ f_3 = 1 - \frac{2 \varphi^2}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \\ f_4 = \ln \varphi - 1 + \frac{\varphi^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda \end{cases}$$

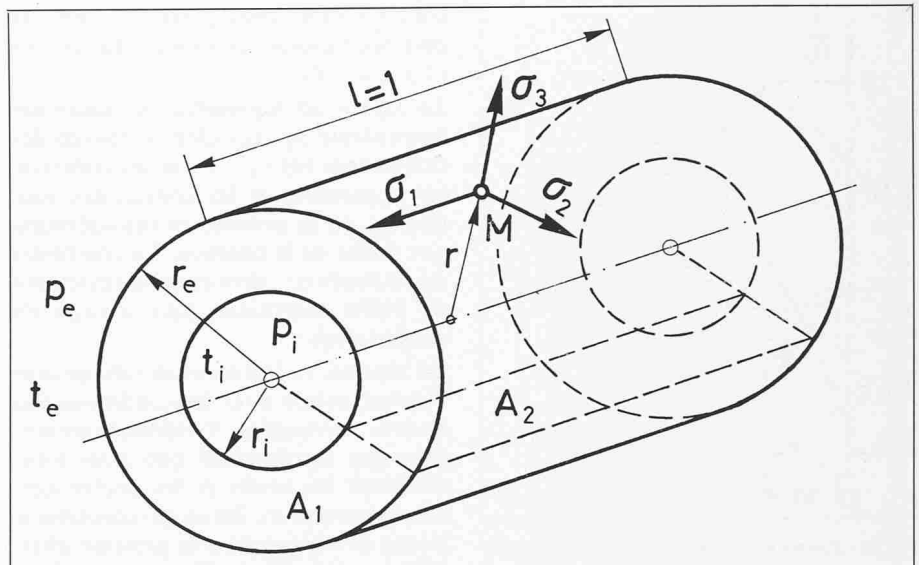


Fig. 8 Tronçon d'un tube à paroi épaisse

On trouve ainsi, tous calculs faits:

$$(27) \quad [x - (\beta f_1 - \gamma f_2)]^2 + [y - (2\beta f_1 + \gamma f_3)]^2 + [z - (\beta f_1 - \gamma f_4)]^2 \leq 2$$

soit encore

$$(28) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq (\sqrt{2})^2$$

Cette dernière relation représente la surface et l'intérieur d'une sphère de rayon  $\sqrt{2}$  et de centre  $C(x_0, y_0, z_0)$ . Si l'on considère un point M du tube (fig. 8), le rayon  $r$  et donc le rapport  $\varphi$  sont fixés. Pour ce point, le centre de la sphère se déplace dans un parallélogramme rectangle défini par les valeurs minima et maxima que peuvent prendre les coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  en fonction de  $\beta$  (pression) et  $\gamma$  (température). L'adaptation est possible si toutes les sphères (de même rayon  $\sqrt{2}$ ) ont une intersection commune (fig. 9). Cette exigence géométrique représente, compte tenu des relations (21) et (22), la condition d'existence d'un état adapté dans le tube.

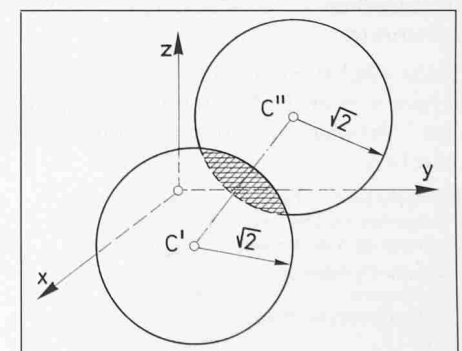
Arrivé à ce stade du problème, il est nécessaire de choisir des valeurs concrètes des grandeurs et de poursuivre par voie numérique. Nous allons donner de manière condensée les résultats relatifs à la tubulure de refoulement du second étage d'un compresseur de polyéthylène, avec une pression de service  $\Delta p = 250$  MPa et un écart de température  $\Delta t = 140^\circ \text{C}$ . Voici les autres données concernant ce cas particulier:

Rayon extérieur  $r_e = 60$  mm, rayon intérieur  $r_i = 25$  mm,  $\lambda = 2,4$ .  
Limite élastique et de rupture  $R_e = 600$  MPa,  $R_m = 900$  MPa.  
Contrainte d'origine thermique  $\sigma_0 = 288$  MPa.

Avec une pression alternée égale au dixième de la pression moyenne ( $\Delta p_a = 0,1 \Delta p = 25$  MPa), on a d'abord calculé le coefficient de sécurité à la fatigue, dans les conditions d'exploitation mentionnées ci-dessus, qui ne provoquent pas de plastification. Dans une section normale, les points les plus sollicités se trouvent alors à l'intérieur du tube ( $r = r_i$ ). La méthode de Goodman donne ainsi, pour une limite d'endurance qu'on peut estimer à 180 MPa, un coefficient de sécurité  $n = 1,62$ . C'est une valeur suffisante, compte tenu de la sévérité des contrôles subis par les tubes.

Nous avons ensuite abordé, à la demande de l'exploitant, la question suivante: la sécurité serait-elle encore acceptable si la pression moyenne était portée à  $\Delta p = 460$  MPa, avec une pression alternée  $\Delta p_a = 0,075 \Delta p = 34,5$  MPa et pour le même écart de température? Les calculs, menés par une méthode numérique, ont montré que la pression entraînerait (sans l'effet thermique qui soulage les contraintes) une plastifica-

Fig. 9 Condition d'adaptation dans l'espace x y z



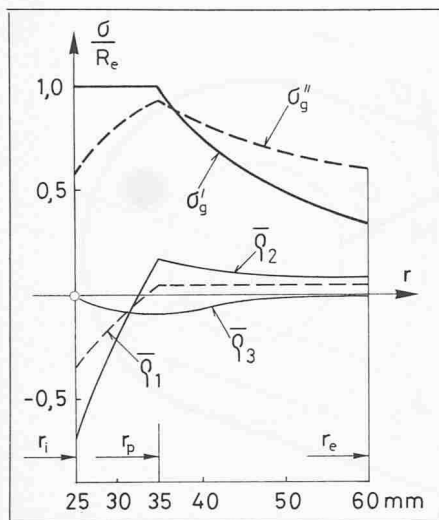


Fig. 10 Constraints résiduelles et contraintes équivalentes en fonction du rayon

tion jusqu'à un rayon  $r_p = 35$  mm. Cette plastification crée les contraintes résiduelles, satisfaisant les relations (21) et (22), indiquées sur la figure 10. On vérifie ensuite que la condition d'adaptation (27) est satisfaite pour les cas

d'exploitation cités précédemment, et ceci pour toutes les valeurs du rayon  $r$  ( $1 \leq \varphi \leq 2,4$ ).

La figure 10 représente la contrainte équivalente  $\sigma_g'$ , calculée au moyen des différences  $(\sigma_g' - \bar{\sigma}_i)$  entre les contraintes apparentes et les contraintes résiduelles, en ne prenant en considération que l'effet de la pression. La contrainte équivalente  $\sigma_g''$  tient compte également de l'effet thermique (qui soulage les contraintes).

En résumé, l'adaptation du tube permet d'éviter, même pour les conditions très sévères envisagées, l'endommagement plastique incrémental que pourraient entraîner les arrêts et les démarrages des compresseurs. En ce qui concerne le risque de fatigue dû à la pression alternée, la méthode de Goodman montre que le coefficient de sécurité est encore de  $n = 1,19$ , le point le plus sollicité n'étant plus à l'intérieur du tube, mais au rayon de plastification. Cette valeur a été jugée trop faible et les conditions d'exploitation plus sévères n'ont pas été adoptées. Il n'en reste pas moins que

sans le processus d'adaptation, le coefficient serait sensiblement inférieur à l'unité.

#### Bibliographie sommaire

- [1] Bleich, H. (1932): «Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes». Bauingenieur, 13, 261–267
- [2] Melan, E. (1936): «Theorie statisch unbestimmter Systeme». Prelim. Publ. 2nd Congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Berlin, pp. 43–64
- [3] Symonds, P.S. (1951): «Shakedown in Continuous Media». J. Appl. Mechanics 18, 85–89
- [4] Koiter, W.T. (1956): «A New General Theorem on Shakedown of Elastic-Plastic Structures». Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., B59, 24–34
- [5] Belytschko, T. (1972): «Plane Stress Shakedown Analysis by Finite Elements». Int. J. Mech. Sci., Vol. 14

Adresse des auteurs: M. Del Pedro, N. Xenophontidis, Laboratoire de mécanique appliquée de l'EPFL, Ecublens ME, 1015 Lausanne.

## Bauprogramm 1983 für die Schweizerischen Nationalstrassen

Kürzlich hat der Bundesrat das Bauprogramm 1983 für die Nationalstrassen genehmigt. Gemäss Angaben des Eidg. Departements des Innern sieht es folgendermassen aus:

Die Schwerpunkte der Bauarbeiten lagen beim Nationalstrassenzug N1 (Genfersee–Bodensee) auf den Abschnitten Flughafen Genf–Cointrin–Route de Meyrin, Lausanne–Yverdon, bei Löwenberg (Murten) und auf den Autobahnumfahrungen von Zürich und St. Gallen. Bei der Nationalstrasse

N2 (Basel–Chiasso) lagen grosse Baustellen bei Hergiswil (NW, Lärmschutzgalerie), bei Göschenen (UR) sowie in der Leventina, im Raume Biasca und auf der Nordrampe des Monte Ceneri im Kanton Tessin. Weitere Baustellen befanden und befinden sich auf der N3 (Walenseestrasse), der N5 im Raume Neuenburg und Yverdon, der N8 (Umfahrung von Interlaken, Brienzerseestrasse und Loppertunnel) sowie auf der N9 im untern Rhonetal und am

### Generelle Projektierung und Bauarbeiten

Das Nationalstrassennetz weist – entsprechend dem heutigen Stand der Bereinigung – eine Gesamtlänge von 1833 km auf.

Auf das ganze Netz bezogen waren Ende 1982 total für 1667,6 km oder 91,0% – vorbehaltlich der vom Parlament geforderten Überprüfung von 6 Teilstrecken – die generellen Projekte genehmigt.

Ende 1982 standen 185,5 km Nationalstrassen oder 10,1% der Gesamtlänge des Nationalstrassennetzes im Bau, nämlich:

Sechsspurige Autobahnen	1,9 km
Vierspurige Autobahnen	126,6 km
Zweispurige Autostrassen	52,4 km
Total Autobahnen und Autostrassen	180,9 km
Gemischverkehrsstrassen	4,6 km
Total	185,5 km (10,1%)

Bild 1. Schweizerische Nationalstrassen. Stand der Bauarbeiten, Ende 1982

