Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 101 (1983)

Heft: 7: Prof. Dr. Bruno Thürlimann zum 60. Geburtstag II.

Artikel: Traglastberechnung gekrümmter Stahlbeton- und Spannbetonträger aufgrund der Plastizitätstheorie

Autor: Walther, René / Houriet, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-75083

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

eines deterministischen Sicherheitsmasses η_0 bzw. μ_0 tritt das den Gefährdungszustand beschreibende Gefährdungsbild. Der Ingenieur wird gezwungen, sich den Grenzzustand der Tragfähigkeit durch eine *wirklichkeitsnahe Extremalbetrachtung bildlich vorzustellen:* Der Sicherheitsnachweis erfolgt am abgeleiteten Gefährdungsmodell, wobei die Festsetzung der Bemessungswerte sowohl auf Grund empirischer Erfahrung als auch wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen erfolgen kann.

Der Vorteil der Methode der Gefährdungsbilder ist hauptsächlich darin zu sehen, dass sie den Ingenieur anregt, alle Gefahren zu erfassen und die kritischen Gefährdungszustände selbst bauwerkspezifisch zu beurteilen. Die Arbeit wird dadurch dem Ingenieur nicht leichter gemacht. Im Gegenteil. Der beschriebene Weg setzt ein höheres Mass an Denkarbeit und grundbautechnischer Erfahrung voraus. Aber verdient der Grundbau nicht einen vermehrten Aufwand an kritischem Denken?

Eine Schlussfolgerung

Die ganze Schwierigkeit um die ingenieurmässige Behandlung grundbaulicher Probleme kann mit nachstehenden Merksätzen bewusst gemacht werden:

- Massgebend für die Behandlung grundbaulicher Probleme ist nicht in erster Linie die Wahl der Berechnungsmethode, noch die Wahl der Sicherheitsdefinition, sondern das richtige Erfassen des Baugrundverhaltens.
- Bei grundbaulichen Arbeiten entstehen immer dann Schwierigkeiten, wenn irgendwelche bedeutsamen Einflüsse übersehen oder nicht richtig erfasst werden.
- Im Grundbau ist immer mit Überraschungen zu rechnen. Alle Risiken bereits im voraus bemessungsmässig abdecken zu wollen, wäre im allgemeinen wirtschaftlich nicht zu vertreten.
- Bei der Lösung grundbaulicher Probleme ist der Weg der beste, auf dem die naturgemäss versteckten Gefahren und Risiken rechtzeitig erkannt werden können.

Sicherheit im Grundbau schaffen bedeutet nicht einfach $\eta \geqq 1{,}5$ oder $\mu \leqq 10^{-5}$ nachweisen, sondern: den Baugrund erfassen, Informationen beurteilen, Risiken abwägen, Entscheidungen treffen, Bauausführung beobachten, Verhalten kontrollieren, Erkanntes analysieren und Schlussfolgerungen ziehen.

Adresse des Verfassers: Dr. Ing. *U. Vollenweider*, Büro Dr. U. Vollenweider, Beratende Ingenieure ETH/SIA, Hegarstr. 22, 8032 Zürich.

Traglastberechnung gekrümmter Stahlbeton- und Spannbetonträger aufgrund der Plastizitätstheorie

Von René Walther, Lausanne, und Bernard Houriet, Tramelan

International gesehen setzt sich immer mehr das Prinzip durch, Tragwerke für die beiden Grenzzustände der Gebrauchsfähigkeit und der Tragfähigkeit zu bemessen. Dies wird auch bei der neuen SIA-Norm 162 der Fall sein.

Die Grundlagen dazu wurden bereits in der von B. Thürlimann massgeblich beeinflussten Richtlinie 34 zur Norm SIA 162 gelegt, die erstmals die Plastizitätstheorie für den Tragfähigkeitsnachweis von Stahlbeton- und Spannbeton-Tragwerken offiziell zuliess. Allerdings bleibt man noch vielerorts auf halbem Wege stehen, indem zwar wohl die einzelnen Querschnitte plastisch, d. h. aufgrund ihres Bruchwiderstandes bemessen werden, die Schnittkraftverteilung jedoch den mit Hilfe der Elastizitätstheorie bestimmten Grenzwertlinien entnommen wird. Der Grund für die Wahl dieser hybriden Methode liegt darin, dass der Plastizitätstheorie noch vielfach mit einiger Skepsis begegnet wird und diese noch nicht für alle Beanspruchungsarten und Tragsysteme erarbeitet worden ist. So wird die genannte hybride Methode nach wie vor bei der Schubbemessung angewendet, was allerdings keine grossen Konsequenzen hat, denn da sich die Querkraft als erste Ableitung aus den Biegemomenten ergibt $Q = (dM/dx)$, schlägt eine plastische Umlagerung der letzten nur wenig auf die Querkraftverteilung durch.

Bei gekrümmten Trägern hingegen besteht eine derart ausgeprägte Interaktion zwischen Querkraft, Biege- und Torsionsmomenten, dass diese bei Traglastbetrachtungen unbedingt berücksichtigt werden muss, was aber bisher wegen noch unvollständiger plastizitätstheoretischer Grundlagen kaum möglich war. Aus diesem Grunde wurde an der ETH Lausanne ein Forschungsprojekt über die Plastizitätstheorie gekrümmter Stahlbeton- und Spannbetonträger durchgeführt, über deren Ergebnisse hier kurz berichtet wird.

Bezeichnungen

n_{rp}	Anzahl der Fliessgelenke
n_h	Grad der statischen Unbestimmtheit
a	vertikale Verschiebung
ω_m	aufsummierte Biegerotation
ω_t	aufsummierte Torsionsrotation
$W_{i,m}$	innere Biegearbeit
$W_{i,t}$	innere Torsionsarbeit
M_o, T_o, V_o	plastische Bezugsschnittkräfte
M_*, T_*, V_*	plastische Bezugsschnittkräfte im fiktiven Bezugsquerschnitt
$m = M/M_o$, $m_* = M/M_*$; $t = T/T_o$, $t_x = T/T_*$; $v = V/V_o$, $v_* = V/V_*$	dimensionslose Schnittkräfte
$B_f = A_t \cdot \sigma_f$	plastische Bügelkraft
$u = 2(b + h)$	Querschnittsumfang
$\kappa = \text{Max.}(A_s/A_i, A_i/A_s)$	max. Verhältnis der Längsarmierungsflächen

Modellbildung

Die ersten theoretischen und experimentellen Untersuchungen über das plastische Verhalten von gekrümmten Trägern wurden für prismatische Stäbe mit konstanten Querschnitten aus Stahl durchgeführt [2, 3]. Dies ist wohl der Grund, weshalb man auch bei entsprechenden Arbeiten über Stahlbeton zunächst nur von prismatischen Querschnitten mit konstantem Widerstand und zentralsymmetrischer Bewehrungsanordnung über die ganze Stablänge ausging [4, 5], obwohl dies hier nur von geringem Interesse ist, da man im Stahlbeton bestrebt ist, die Bewehrung dem Beanspruchungsverlauf anzupassen. Im übrigen wurden auch nur einfeldrige Träger unter Einzellasten behandelt.

Daher bestand ein Hauptziel der durchgeführten Untersuchung [1] darin, ein Rechenmodell zu entwickeln, das den folgenden spezifischen Gegebenheiten des Stahlbetons und des Spannbetons gerecht wird:

- Variable Querschnittswiderstände

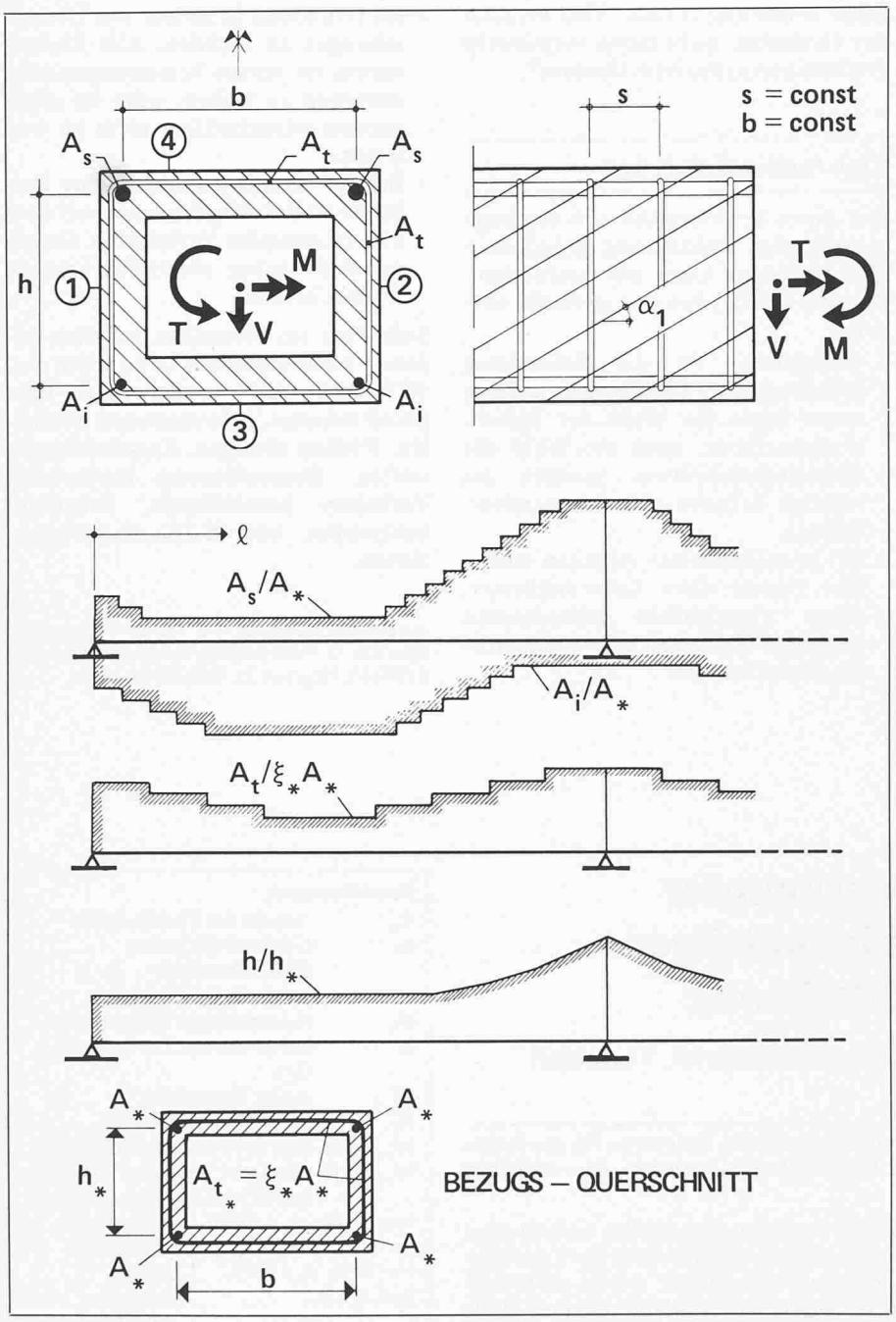


Bild 1. Verlauf der Widerstandselemente und Bezugsquerschnitt

entlang dem gekrümmten Stab, wobei sowohl die Biege-, Schub- und Torsionsbewehrung wie auch die statische Höhe abgestuft werden können (Bild 1).

- Durchlaufende Träger über zwei und drei Feldern mit verschiedenen Einspannverhältnissen über den Auflagern und den Zwischenstützen.
- Berücksichtigung beliebiger Lastfälle
- Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Fliessgelenke.

Der Modellbildung wurde ein *räumliches Fachwerk* zugrunde gelegt, das bereits von *P. Lampert* [6] für die Herleitung der Interaktion von Biegung und Torsion entwickelt und von *P. Lüchinger* [7, 8] für Biegung, Torsion und Schub erweitert worden ist. Dieses Modell, das sowohl *Hohl- wie Vollquerschnitte* erfasst, setzt immerhin voraus, dass es sich um stabförmige Tragwerke handelt (Balkentheorie gültig). Sehr gedrungene Träger und Querbiegung können damit nicht behandelt werden. Da zur Vereinfachung eine Symmetrie mit Bezug auf die vertikale Querschnittachse angenommen wurde, ist es auch nicht möglich, den Fall einer asymmetrischen Torsionsvorspannung zu erfassen, der allerdings für Durchlaufträger nur von geringer praktischer Bedeutung ist [9].

Rechenmethode

Anwendung der Plastizitätstheorie

Die Plastizitätstheorie erlaubt es, den Grenzzustand der Tragfähigkeit zuverlässig zu vermitteln, wenn folgende *drei Bedingungen* erfüllt sind.

- Die Rotationsfähigkeit der plastifizierten Zonen ist genügend gross, um die Bildung eines Bruchmechanismus zu gewährleisten;
- Ideal plastisches Verhalten nach der Bildung der Fliessgelenke;
- Die elastischen und plastischen Verformungen sind von erster Ordnung klein, so dass die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System aufgestellt werden können.

Grundformen der Bruchmechanismen

Um die Besonderheiten der Plastizitätstheorie gekrümmter Träger darzulegen, wird zunächst der Fall eines *Einfeldträgers mit voller Torsions- und Biege-Einspannung an beiden Auflagern* behandelt. Es können dabei die drei in Bild 2 dargestellten Grundmechanismen auftreten. Daraus geht hervor:

- Die Anzahl, die Art und die Lage der Fliessgelenke können verschieden sein;
- Die Zahl der Fliessgelenke kann um 1 oder 2 geringer sein als die durch das statisch unbestimmte System erlaubte maximale Anzahl. Diese beträgt:

$$n_{rp,\,max} = n_h + 1 = 3 + 1 = 4$$

Welcher Mechanismus sich in Wirklichkeit einstellen wird, hängt vom jeweiligen Verhältnis von Längs- zu Querbewehrung ab.

Die Mechanismen I und III können sich bilden, bevor die Biegetragfähigkeit voll ausgeschöpft ist. Dies wäre lediglich beim Mechanismus II der Fall, der in Stabmitte ein Fliessgelenk aufweist. Wie noch gezeigt wird, ist es jedoch nicht unbedingt wirtschaftlich, den gekrümmten Stab so zu bemessen, dass sich der Mechanismus II einstellen müsste.

Wahl der Rechenmethode

Die Vielzahl der möglichen Bruchformen lässt es zum vornherein als angezeigt erscheinen, die *statische* Methode der Plastizitätstheorie zu benützen. Dabei zeigt sich aber, dass die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen allein nicht immer ausreichen, um die Traglast zu ermitteln. So sind für den *dreifach statisch unbestimmten Stab* des Bildes 2 ingesamt vier Unbekannte zu bestimmen, nämlich die Traglast selbst und drei überzählige Grössen. Im Falle des Mechanismus ① stehen dazu aber zunächst nur zwei Gleichungen zur Verfügung, da nur zwei Fliessgelenke vorhanden sind. Der plastische Widerstand eines Fliessgelenkes ist zwar i.a. eine Funktion aller drei Schnittkräfte

M, V und *T;* diese sind jedoch durch die bekannten Gleichgewichtsbedingungen gekrümmter Stabelemente miteinander verknüpft und können nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Für eine vorgegebene Schnittkraftkombination liefert ein Fliessgelenk daher nur eine statische Plastizitätsbedingung. Somit ist es für die Mechanismen Ⓘ und Ⓘⓘ unverlässlich, die fehlenden Bestimmungsgleichungen aus kinematischen Bedingungen herzuleiten. Wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, ist das in einem gegebenen Querschnitt auftretende plastische Torsionsmoment eine direkte Funktion der Fliessgelenkrichtung. Da diese Richtung beim Mechanismus Ⓘ für beide Fliessgelenke vorgegeben ist, verfügt man somit über genügend Bestimmungsgleichungen, um die Traglast zu bestimmen. Beim Mechanismus Ⓘⓘ genügt dazu die sich aus der Geometrie ergebende Feststellung, dass sich die Achsen der drei Fliessgelenke in einem Punkte schneiden müssen.

Eine kinematische Kontrolle ist aber auch bei einem Mechanismus des Typs Ⓘⓘⓘ erforderlich, obwohl für diesen an sich genügend Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen zur Ermittlung der Traglast vorhanden sind. Damit muss jedoch sichergestellt werden, dass das angenommene, statisch zulässige Beanspruchungsfeld auch mit dem implizite zugrunde gelegten Bruchmechanismus verträglich ist, d. h., dass die Vorzeichen der plastischen Schnittkräfte mit denjenigen der zugehörigen Fliessgelenk-Rotationen übereinstimmen.

Für herkömmliche Tragwerke wie z. B. gerade Durchlaufträger erübrigt sich eine solche Kontrolle im allgemeinen, da hier jede Unverträglichkeit zwischen Beanspruchungs- und Bewegungsfeld sofort ins Auge springt. Anders jedoch bei gekrümmten Trägern, bei denen sich recht komplizierte räumliche Mechanismen (z. B. Ⓘⓘⓘ) mit kombinierten Biege-Torsions-Fliessgelenken beliebiger Richtung einstellen können. Für solche ist es nun mit elementaren Mitteln nicht mehr ohne weiteres erkennbar, ob die einzelnen Schnittkräfte gleiche Vorzeichen haben wie die zugehörigen Rotationskomponenten. Trifft dies nicht zu, so ist die wirkliche Traglast kleiner als die berechnete (untere Schranke). Zu jedem statisch zulässigen Gleichgewichtszustand gibt es einen kinematisch zulässigen Bruchmechanismus, wovon nur ein einziger, das heisst der eigentliche Bruchmechanismus, mit den Schnittkräften auch verträglich ist.

Die Berücksichtigung all dieser Bedingungen kompliziert die Berechnung verständlicherweise erheblich, um so mehr als die Plastizitätsbedingungen selbst nichtlineare Funktionen von *M, V* und *T* sind (siehe folgenden Abschnitt). Exakte Lösungen können daher nur mit Hilfe von Computern gefunden werden, wozu im vorliegenden Falle eine *«gelenkte statische Methode»* gewählt wurde, d. h. eine, bei der die kinematischen Bedingungen bereits bei der Formulierung der Gleichungssysteme berücksichtigt werden (Mech Ⓘ und Ⓘⓘ) oder bei der kinematische Verträglichkeit nachträglich kontrolliert wird (Mech Ⓘⓘⓘ).

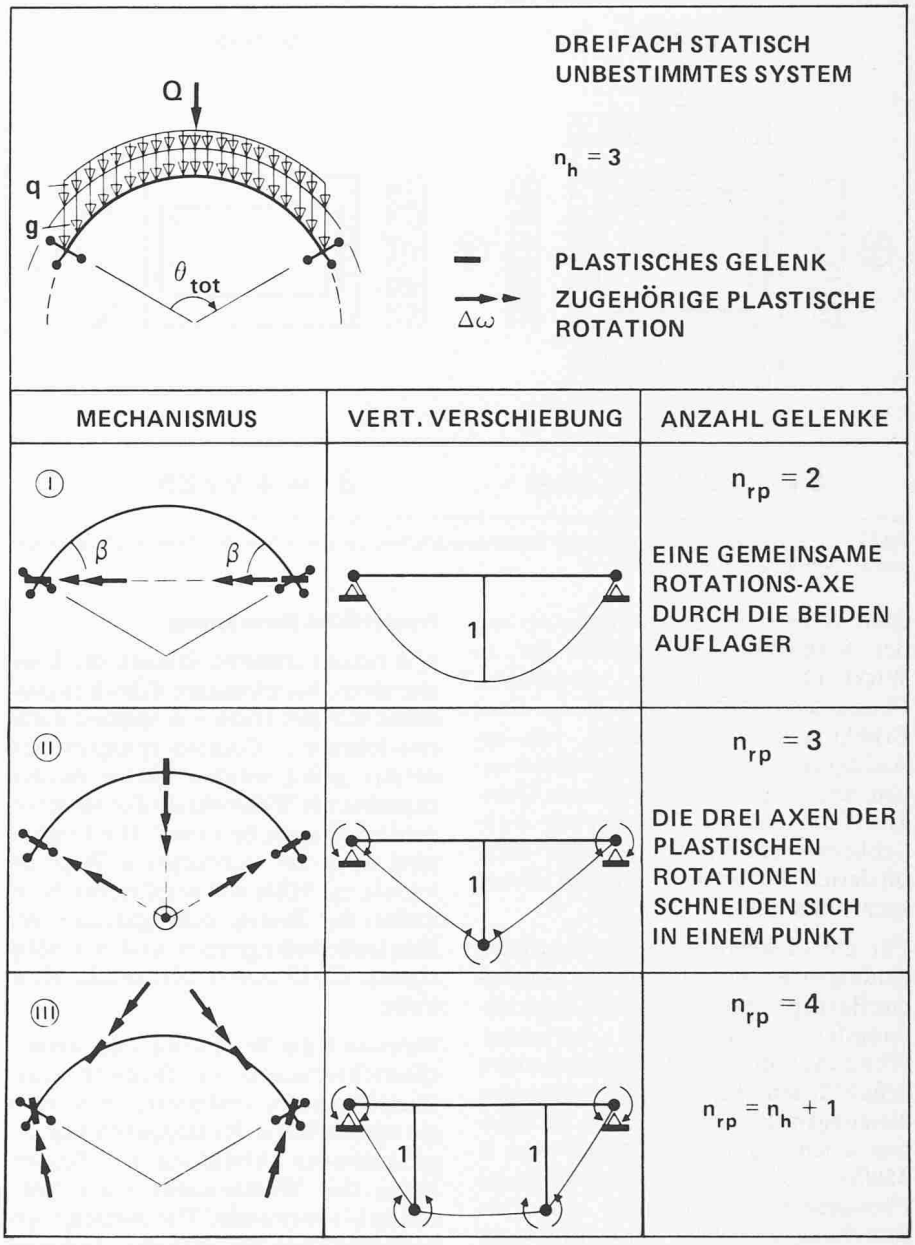


Bild 2. Grundformen der Bruchmechanismen eines Einfeldträgers mit Torsion- und Biege-Einspannung an beiden Auflagern

Plastizitätsbedingung und zugehörige Fliessgesetze

Der Bruchwiderstand eines durch Biegung, Schub und Torsion beanspruchten Hohlkasten-Elementes (Bild 1) wurde von *P. Lüchinger* [7, 8] mit Hilfe der statischen Methode hergeleitet und in Form von drei folgenden Interaktions-Gleichungen ausgedrückt, welche die auf die Querschnittsgrössen bezogenen Schnittkräfte *m, v* und *t* sowie das Bewehrungsverhältnis χ und die geometrischen Grössen h und u enthalten.

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} t^2 + v^2 + \chi m - \chi &= 0 \\ t^2 + v^2 - \chi m - 1 &= 0 \\ t^2 + v^2 + 2\,tv\sqrt{\frac{2h}{u}} - \frac{1}{2}(\chi + 1) &= 0 \end{aligned}\right\} cp\ (m, t, v) = 0$$

Die erste und die zweite der obigen Plastizitätsbedingungen sind massgebend, wenn zuerst das obere bzw. das untere Schubwandelement ins Fliessen gerät, wogegen die letzte einem Versagen eines der beiden vertikalen Stege entspricht.

Wie *P. Müller* [10] anhand kinematischer Überlegungen gezeigt hat, ergeben die Plastizitätsbedingungen (1) nur einen unteren Grenzwert des wirkli-

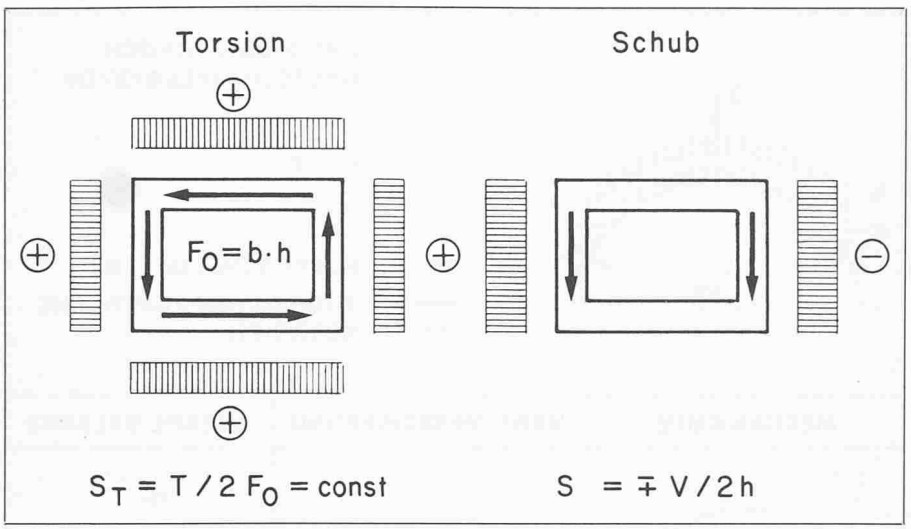


Bild 3. Angenommene, statisch zulässige Schubflussverteilung zur Ermittlung der Plastizitätsbedingungen und der zugehörigen Fliessgesetze

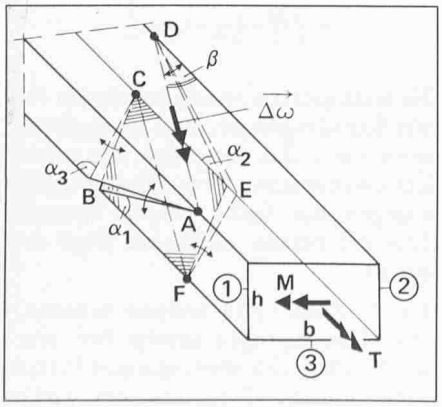
chen Widerstandes. Jede Behinderung der Verwölbung im Bereich der in Wirklichkeit endlichen, räumlichen Fliessgelenke führt nämlich zu einer Erhöhung des Widerstandes, was bei Auflagern, bei Querschnittsänderungen, aber auch in Zonen grosser Querkräfte der Fall ist. Kriterien zur wirklichkeitsnahen Erfassung dieser komplizierten Phänomene wurden bisher nicht aufgestellt.

Für die «gelenkte statische Methode» benötigen wir ein Fliessgesetz, welches das Beanspruchungs- und das Verschiebungsfeld miteinander verbindet. Wenn man die den statisch zulässigen Schubflüssen (Bild 3) entsprechenden Neigungen der Druckstreben im kinematischen räumlichen Modell von *P. Müller* einführt, ist es möglich, dieses Fliessgesetz in Form einer einfachen Beziehung zwischen Torsionsmoment T und Richtung β der resultierenden Rotationsachse (Bild 4) herzuleiten:

$$(2) \quad \boxed{\cot\beta = \frac{T}{bh\,B_f/s}\,(1 + h/b) = f\left(\frac{T}{B_f/s}\right)}$$

Diese Näherung ist für die hier verwendete «gelenkte statische Methode» genügend genau.

Bild 4. Räumliche Gestaltung (Entwicklung) eines Fliessgelenkes unter kombinierter Beanspruchung



Numerische Berechnung

Wie bereits erwähnt, können die komplizierten, nichtlinearen Gleichungssysteme nur mit Hilfe von speziell dafür entwickelten Computerprogrammen iterativ gelöst werden. Dabei werden zunächst die Widerstände der verschiedenen Elemente bestimmt. Die Traglast wird dann auf interaktivem Wege ermittelt, mit Hilfe von graphischen Kontrollen der Beanspruchungsfelder, der Plastizitätsbedingungen und wo nötig ergänzt durch eine kinematische Kontrolle.

Wenn sich die Bewehrung oder andere Querschnittswerte im Bereiche eines Fliesselementes verändern, so werden die untern Werte der treppenförmig angenommenen Abstufung zur Bestimmung des Widerstandes nach Gleichung (1) verwendet. Die zunächst unbekannte Lage der «freien» Torsions-Schub-Fliessgelenke muss mit Hilfe von numerischen Optimierungsverfahren gefunden werden.

Ergebnisse der parametrischen Studie

Wie in der detailliert durchgeführten parametrischen Studie [1] gezeigt, existiert für die verschiedenen Lastfälle, statischen Systeme und Kombinationen von Widerstandselementen eine grosse Vielzahl möglicher Bruchmechanismen, von denen im folgenden nur die für das plastische Verhalten gekrümmter Träger besonders charakteristischen behandelt werden.

Einfeldrige Bruchmechanismen

Bei gekrümmten Durchlaufträgern, die über den Zwischenstützen torsionsfest eingespannt sind, wird normalerweise ein Bruchmechanismus eines einzelnen Rand- oder Mittelfeldes massgebend werden. Ein solcher Fall wird in Bild 5 behandelt. Dazu seien aber zuerst einige Bemerkungen zur Wahl der Parameter und der Darstellungsart angebracht.

Es wird von einem auf Torsion und Biegung eingespannten Mittelfeld eines gekrümmten Durchlaufträgers ausgegangen, dessen Geometrie, Belastung, Querschnittsabmessungen und abgestufte Längsbewehrung gegeben sind. Als einziger Parameter wird der Querbewehrungsgrad, ausgedrückt durch das Verhältnis ξ_* (Bild 1), variiert und zwar in fünf Stufen von $\xi_* = 0{,}01$ bis $\xi_* = 0{,}03$.

In den ersten beiden Spalten des Bildes 5 ist die sich im Bruchzustand einstellende Verteilung der bezogenen Biegemomente m_* bzw. Torsionsmomente t_* für die fünf Systeme unterschiedlicher Querbewehrung ξ_* dargestellt, wobei durch die feinen, treppenförmigen Linien zudem angegeben wird, wie gross der jeweilige Widerstand bei reiner Biege- bzw. Torsionsbeanspruchung wäre. In der Spalte drei sind die den Plastizitätsgleichungen (1) entsprechenden Kombinationen von m_*, t_* und v_* aufgetragen, wobei sich die Teildiagramme I auf den stärker benaspruchten Steg, die Diagramme II hingegen auf die massgebende der drei Gleichungen der Plastizitätsbedingungen (1) beziehen. Da die Gleichungen (1) hier aus Darstellungsgründen um einen Summanden eins erweitert worden sind, treten Fliessgelenke dort auf, wo diese Schnittkraftkombinationen die dem Wert Eins entsprechende horizontale Linie berühren. Auf diese Weise können die sich einstellenden Bruchmechanismen sofort erkannt werden. Diese sind zudem unten im Bild 5 schematisch dargestellt.

Aus diesem Beispiel können nun folgende, allgemeingültige Schlüsse gezogen werden.

- Es existiert eine obere Grenze der Querbewehrung, in unserem Falle $\xi_* > 0{,}03$, von der an der Biegewiderstand an den Auflagern und im Feld voll ausgeschöpft werden kann. Da keine Torsions-Schub-Fliessgelenke auftreten, handelt es sich im wesentlichen um einen Biegebruch-Mechanismus. Er liefert für das gegebene System die höchste Traglast.
- Eine untere Grenze der Querbewehrung wird dann erreicht, wenn die resultierenden Torsionswiderstände so gering ausfallen, dass sich ein lokaler Torsionsmechanismus einstellt, das heisst, wenn sich im freien Teil des Stabes zwei Torsions-Schub-Fliessgelenke mit gemeinsamer Rotationsachse bilden können, bevor die Biegekapazität bei den Auflagern ausgeschöpft ist. Dies kann eine sehr be-

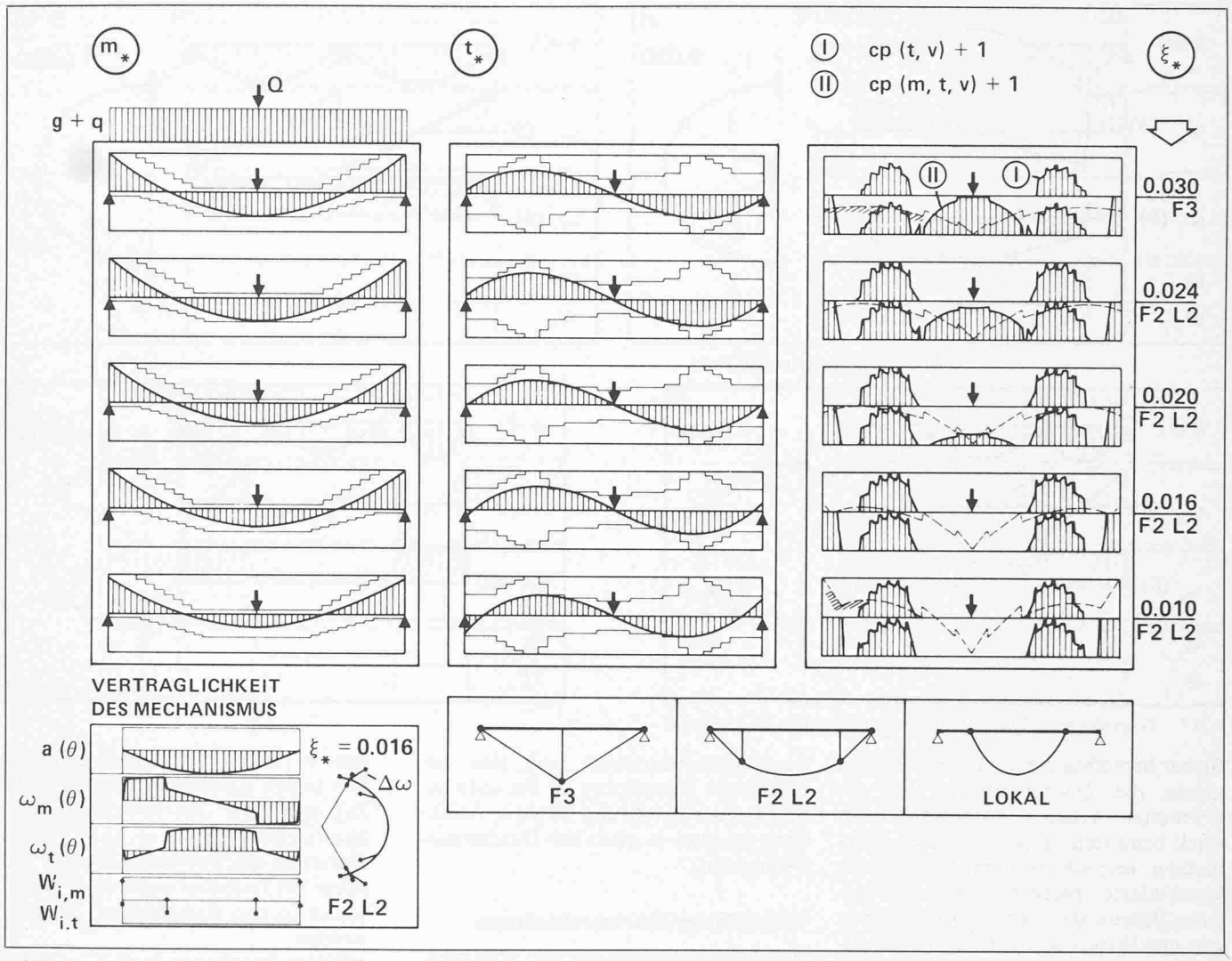


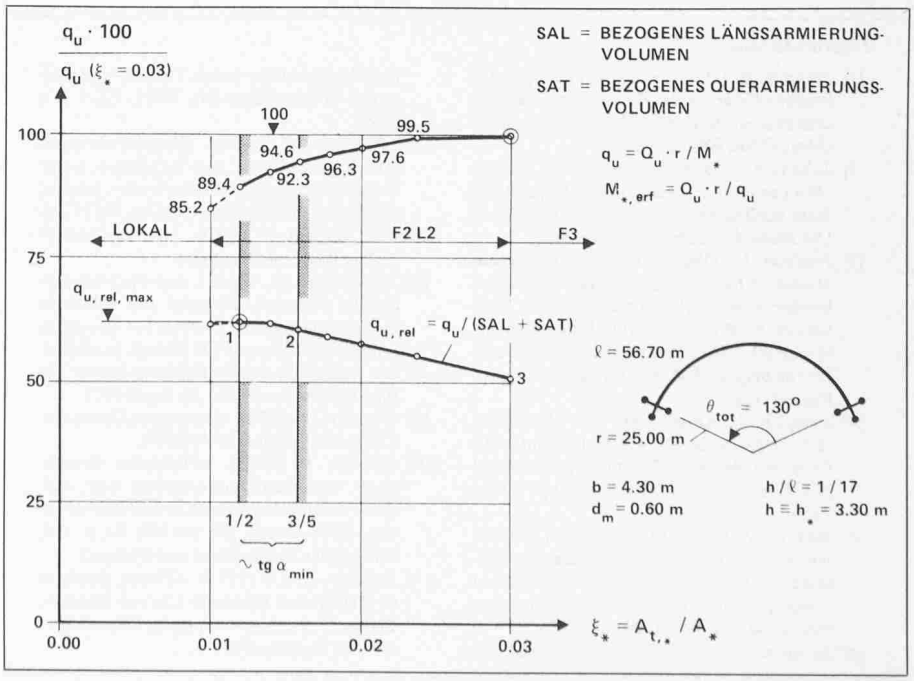
Bild 5. Entwicklung des plastischen Verhaltens eines inneren Feldes in Funktion des Querarmierungsgehaltes (Bügelarmierungsgehalt)

trächtliche Reduktion der Traglast zur Folge haben.

- Bei mittleren Querbewehrungsgraden treten gemischte Bruchmechanismen auf, d. h. solche, bei denen sich über beiden Auflagern Biegefliessgelenke und im Feld zwei Torsions-Schub-Gelenke bilden. Die Traglast liegt zwischen den oben genannten Grenzfällen.

In Bild 6 sind die resultierenden Traglasten q_u bezogen auf den oberen Grenzwert q_u ($\xi_* = 0{,}03$) als Funktion von ξ_* aufgetragen. Es geht daraus hervor, dass selbst eine starke Verminderung der Querbewehrung, z. B. von $\xi = 0{,}03$ auf $\xi = 0{,}015$ nur zu einem verhältnismässig geringfügigen Abfall der Traglast von etwa 10% führt. Bezieht man die Traglast nun noch auf die Gesamtbewehrungsmenge (SAL + SAT, untere Kurve in Bild 6), so ergibt sich in diesem Beispiel ein Optimum etwa bei $\xi = 0{,}12$.

Bild 6. Traglasten in Abhängigkeit des bezogenen Querbewehrungsgrades ξ_*



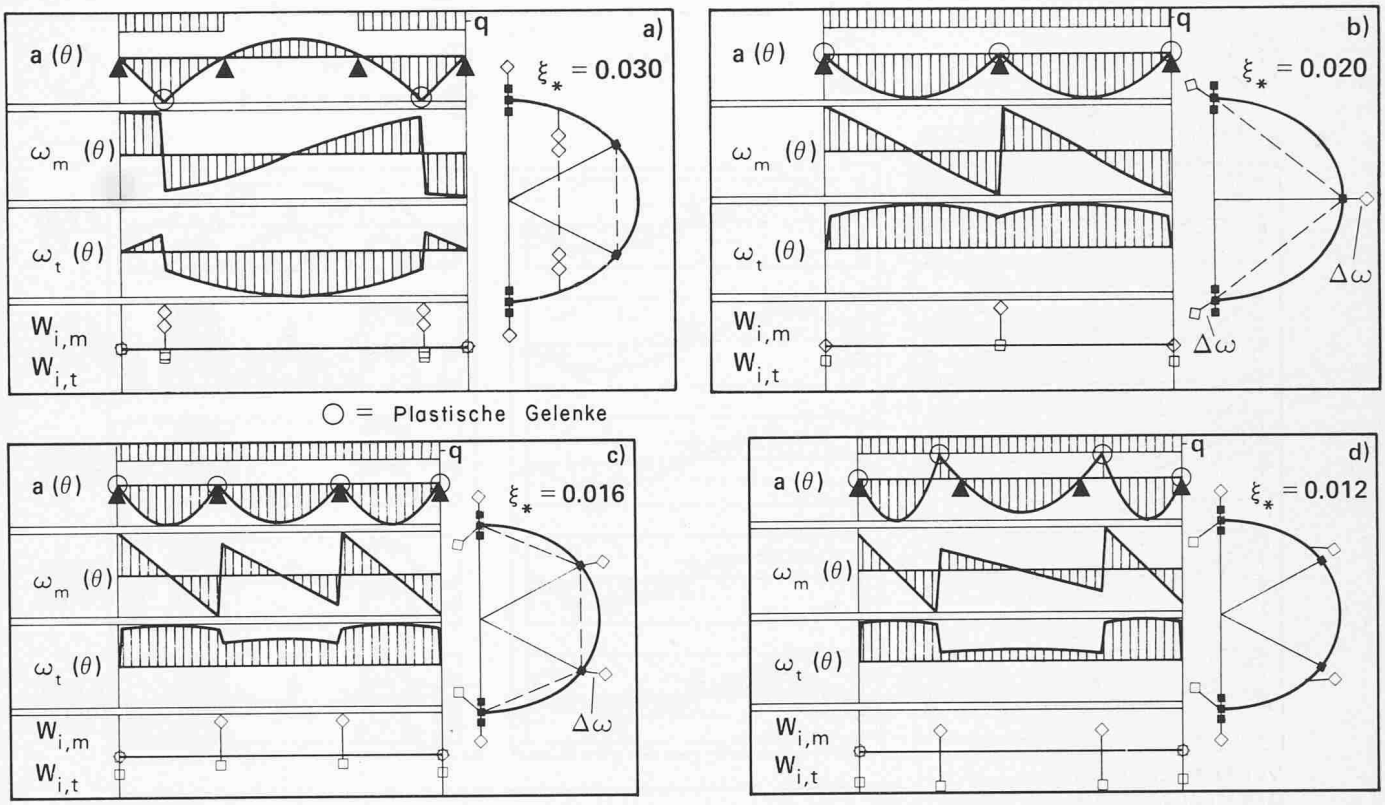


Bild 7. Beispiele von auf 2 oder 3 Felder ausgedehnten Bruchmechanismen

Bisher herrschte die Meinung vor, man müsse die Querbewehrung bei gekrümmten Trägern grundsätzlich so stark bemessen, dass nur Biegemechanismen kritisch werden können, da kombinierte Biege-Schub- und Torsions-Brüche als ein vorzeitiges Versagen qualifiziert wurden, das es zu vermeiden gelte. Diese Darlegungen zeigen jedoch, dass dem nicht so ist: Da die Traglast nahezu linear vom Biegewiderstand über den Auflagern, jedoch weit weniger vom Querbewehrungsgrad abhängt, ist es oft weit wirtschaftlicher und zudem auch sicherer, die Längsbewehrung über den Auflagern etwas überzudimensionieren, was eine beträchtliche Einsparung an der aufwendigen Querbewehrung erlaubt. Ähnliches tut man ja auch bei Durchstanz-Problemen.

Mehrfeldrige Bruchmechanismen

Bruchmechanismen, die sich über mehrere Felder erstrecken, treten vor allem auf, wenn Durchlaufträger über den Zwischenstützen punktförmig, also ohne Torsionseinspannung gelagert sind, wobei folgende Hauptfälle unterschieden werden können:

- Es kann sich ein globaler Mechanismus mit zwei Biege-Torsions-Gelenken in den Randfeldern bilden (Bild 7a), wenn die Querbewehrung verhältnismässig gross ist (ξ = 0,03). Derartige Mechanismen können vor allem bei Teilbelastungen (z. B. Nutzlasten in den Randfeldern) kritisch werden.
- Mittlere Bewehrung (z. B. ξ_* = 0,02) können zu Mechanismen des Typs 7b und 7c führen, bei denen sich die einzelnen Felder gleichzeitig um ihre Auflagerverbindungslinien verdrehen. Die Fliessgelenke über den Zwischenstützen werden primär durch die Biegebeanspruchung, diejenigen über den Endauflagern jedoch durch die Torsions- und Schubbeanspruchung bestimmt.
- Bei geringen Querbewehrungsgraden entwickeln sich Bruchmechanismen des Typs nach Bild 7d oder lokale Mechanismen, für welche hauptsächlich die Torsion massgebend ist.

Schlussbemerkungen

Wie eingangs bemerkt, wird künftig bei der Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen deutlicher als bisher zwischen *Gebrauchsfähigkeit* und *Tragfähigkeit* unterschieden werden müssen. Für die sehr wichtigen Nachweise der ersten wird dabei i.a. von der Elastizitätstheorie und deren Grenzwertlinien der Schnittkräfte ausgegangen. Diese mit entsprechenden Sicherheitsfaktoren beaufschlagten

Zitierte Literatur

[1] *Houriet, B.* (1982): «Calcul Plastique des Poutres Courbes en Béton Armé et Précontraint». Thèse No 421, Département de Génie Civil, EPFL, 1982

[2] *Johansen, K.W.* and *Hansen, P.L.* (1954): «Studies on the Load Carrying Capacity of Steel Structures». Technical University of Denmark, Copenhagen, Denmark

[3] *Jordaan, I.J.* (1964): «Ultimate Loads and Modes of Failure for Circular - Arc Bow Girders». A thesis submitted to the University of Witwatersrand, Johannesburg, in partial fulfillment of the requirements for the degree of M. Sc. in Engineering, Johannesburg

[4] *Jordaan, I.J.Khalifa M.* and *McMullen, A.E.*: «Collapse of Curved Reinforced Concrete Beams», Journal of Structural Division, A.S.C.E., Vol. 100, pp. 2255-2269.

[5] *Badawy, H.E.I., Jordaan, I.J.* and *McMullen A.E.* (1976): «Effect of Shear on Collapse of Curved Beams». University of Calgary, Department of Civil Engineering, Research Report No CE76-25

[6] *Lampert, P.* (1970): «Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung». Dissertation Nr. 4445, ETH Zürich.

[7] *Lüchinger, P.* (1977): «Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft». Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 69, p. 107, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.

[8] *Thürlimann, B., Grob, J.* und *Lüchinger, P.* (1975): «Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern», Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Vorlesungen anlässlich des Fortbildungskurses für Bauingenieure vom 9.-12. April 1975

[9] *Walther, R.* (1976): «Structures Courbes». Cours de 3e cycle, IBAP/EPFL

[10] *Mueller, P.* (1978): «Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken», Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht NR. 83, p. 160, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart

[11] *Badawy, H.E.I.* (1975): «Plastic Analysis of Reinforced Concrete Curved Beams». Thesis, University of Calgary, Department of Civil Engineering

Grenzwerte werden aber vielfach auch der sogenannten *Querschnittsbruchbemessung* zugrunde gelegt. Eine solche hybride, i.a. auf der sichern Seite liegende Art des Tragfähigkeitsnachweises kann bei gekrümmten Tragsystemen aber noch weit weniger befriedigen als bei geraden, denn es treten hier grosse, miteinander gekoppelte Biege- und Torsionsmomente auf, deren für die Querschnittswiderstände ungünstigste Kombination oft ganz verschiedenen Lastfällen entsprechen. So kann z. B. bereits eine geringfügige Verschiebung der Momentenschlusslinie zu einer ganz beträchtlichen Veränderung der zugehörigen Torsionsmomente führen. Eine solche hybride Bemessung ist daher nicht nur theoretisch inkohärent; sie kann überdies sehr unwirtschaftlich sein, vor allem was die Querbewehrung betrifft.

Die hier kurz dargelegte Plastizitätstheorie gekrümmter Träger erlaubt es dagegen, den Grenzzustand der Tragfähigkeit auch für solche komplizierten Systeme zutreffend zu erfassen. Dies ist vor allem im Hinblick auf eine optimale Bemessung der Querbewehrung von Bedeutung, die – wie gezeigt wurde – durch eine zweckmässige Abstufung der Längsbewehrung massgeblich und günstig beeinflusst werden kann.

Ein Vergleich der hier entwickelten Theorie mit den leider nur spärlich vorhandenen Versuchsergebnissen [11] hat eine sehr befriedigende Übereinstimmung ergeben.

Abschliessend sei noch darauf hingewiesen, dass in [1] eine vereinfachte, manuelle Methode hergeleitet wurde, die vor allem für die tägliche Entwurfspraxis gute Dienste leisten kann.

Adresse der Verfasser: Prof. Dr. *R. Walther*, Dr. *B. Houriet*, IBAP, EPFL, 1015 Lausanne.

Einfache Berechnung von Rahmen-Schubwand-Systemen

Von Bruno Zimmerli, Zürich

Für Rahmen und Schubwände werden mit vereinfachten Stoffgesetzen Ersatzsysteme entwickelt. Diese werden über die Höhe kontinuierlich gekoppelt. Mit den Gleichgewichtsbeziehungen und den Stoffgesetzen wird das Last-Deformations-Diagramm approximativ ermittelt. Die Reduktion der Traglast duch den P-Δ-Effekt (Theorie 2. Ordnung) wird berücksichtigt.

Substitute systems of frames and shear walls are developped with simplified laws of material. The resulting cantilevers are coupled continuously over the height. The load-deformation-diagram is computed approximately by means of the equations of equilibrium and the laws of material. The reduction of the ultimate load by the P-Δ-effect is considered.

Pour les cadres et les parois en béton, on utilisera des systèmes de remplacement basés sur les lois simplifiées de la résistance des matériaux. De plus, ces deux systèmes de remplacement, soit les cadres et les parois en béton, agissent en commun sur toute la hauteur de l'ouvrage. Avec l'application des lois de l'équilibre et la connaissance du comportement des matériaux, on établira le diagramme de déformation en fonction des charges. Pour le calcul de la charge ultime on tiendra compte de l'effet P-Δ (théorie du second ordre).

Einführung

Rahmen und Schubwände sind die häufigsten Tragsysteme in einem Hochhaus (Bild 1). Die Formen der horizontalen Auslenkungen von Einzelrahmen und schlanken Einzelscheiben unterscheiden sich wesentlich voneinander, wenn sie der gleichen Horizontalbelastung unterworfen werden.

Die aus biegesteifen Stäben zusammengesetzten Rahmen weisen ein ausgeprägtes *Schubverformungsverhalten* auf. Dagegen zeigen Schubwände, die durch schlanke Stahlbetonscheiben oder auch durch Stahlfachwerke mit grossem Widerstand in den Diagonalen gebildet werden, unter horizontaler Belastung eindeutige *Biegedeformationen.*

Den beiden verschiedenartigen Tragsystemen wird durch die Decken, die in ihrer Ebene praktisch starr sind, in jedem Stockwerk die gleiche horizontale Auslenkung aufgezwungen.

Für die Bemessung werden die Vertikallasten auf einem vorgeschriebenen Niveau (vergl. Normen) konstant gehalten. Die Laststeigerung bis zur Traggrenze erfolgt nur für die Horizontallasten (Wind, Erdbeben). Dieses Vorgehen entspricht, wenn der Wind als Horizontallast auf ein Gebäude einwirkt, im Vergleich zur proportionalen Laststeigerung eher der Wirklichkeit.

Für die dynamisch wirkenden Horizontallasten werden *statische Ersatzlasten* eingeführt. Diese werden im vorliegenden Bericht über die Höhe rechteckförmig verteilt angenommen. Auch dreieckförmige oder andere Lastverteilungen können ohne besondere Erschwernis verwendet werden. Die Allgemeinheit der Resultate wird allerdings weniger durch die unterschiedliche, statische Lastverteilung als vielmehr durch die vernachlässigten, dynamischen Effekte eingeschränkt. Entsprechende Hinweise sind in der Literatur genügend vorhanden [1, 2, 3].

Die Berechnung von hohen, schlanken Stahlbetonscheiben bietet im ganzen Lastbereich keine Schwierigkeiten. Ihr Tragsystem entspricht einem Kragträger, dessen Stoffgesetz durch ein idealisiertes Momenten-Krümmungs-Diagramm mit konstanter Normalkraft approximiert werden kann (Bild 4.B). Auch Stahlfachwerke können analog behandelt werden, wenn die Diagonalen einen hohen Schubwiderstand aufweisen. Die *Ersatzträger* dieser Schubwände werden in diesem Bericht als „M"-Träger bezeichnet. Bei der Bildung des ersten plastischen Gelenkes ist der Tragwiderstand des „M"-Trägers erreicht. Die Gelenkstelle zeichnet sich durch einen unbegrenzten Rotationszuwachs aus.

Bei grossen Rahmensystemen, die aus biegesteifen Stäben zusammengesetzt sind, genügt es, aus dem Rahmen herausgeschnittene Elemente (Bild 2) zu berechnen. Die Annahme von Momentnullpunkten in den Stabmitten entspricht der Wahl eines statisch zulässigen Spannungszustandes. Für jedes Rahmenelement kann die Stützenquerkraft V, bei der der Tragwiderstand erschöpft ist, bestimmt werden.

Der Zusammenhang zwischen Steifigkeit, Stützenquerkraft und Auslenkung