Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 101 (1983)
Heft: 7: Prof. Dr. Bruno Thürlimann zum 60. Geburtstag II.

Artikel: Zur Berechnung und Bemessung vorgespannter Platten
Autor: Ritz, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-75077

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Berechnung und Bemessung vorgespannter Platten

Von Peter Ritz, Horw

Nach einem kurzen Überblick über die Geschichte der Plattentheorie wird auf die Anwendung der Vorspannung eingegangen. In Hochbauplatten verwendet man heute Vorspannung mit und ohne Verbund. Mit beiden Verfahren können qualitativ gleichwertige Konstruktionen erzielt werden. Mit dem Einführen des Konzeptes der Bemessung auf die Grenzzustände Tragfähigkeit und Gebrauchsfähigkeit muss neu überlegt werden, welche Berechnungsmethoden zweckmässig anzuwenden sind. Zur Ermittlung der Tragfähigkeit eignen sich vor allem Methoden der Plastizitätstheorie; die Gebrauchsfähigkeit wird am besten mit Näherungsverfahren nachgewiesen, die sich auf die Elastizitätstheorie abstützen. Die Einflüsse der Vorspannung sind im Gebrauchszustand als äussere Lasten und im Bruchzustand als Widerstände in die Berechnung einzuführen. Die Vorspannung mit Verbund kann ohne nennenswerte Schwierigkeiten rechnerisch behandelt werden. Bei der Verwendung der Vorspannung ohne Verbund muss zur Ermittlung der im Bruchzustand wirksamen Stahlspannung die Verformung des Gesamtsystems betrachtet werden. Beim Nachweis der Gebrauchsfähigkeit üblicher Hochbaudecken sind in erster Linie die Durchbiegungen zu kontrollieren. In einem weiteren Schritt ist eine Risseverteilung nachzuweisen. Es wird gezeigt, wie diese beiden Nachweise bei vorgespannten Platten geführt werden können. Die Risseverteilung kann am einfachsten dadurch gewährleistet werden, indem man eine minimale schlaffe Bewehrung in Funktion der Normalkraft infolge Vorspannung oder Membranwirkung vorschreibt.

Einleitung

Historischer Rückblick

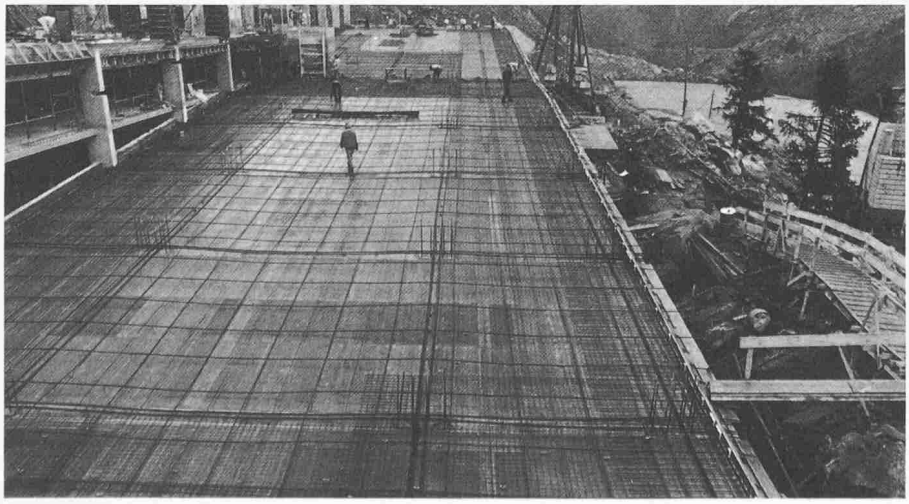
Die *erste wissenschaftliche Arbeit* zur *Theorie von Flächentragwerken* wurde im Jahre 1766 an der Petersburger Akademie der Wissenschaften durch *Leonhard Euler* veröffentlicht. Er betrachtete die Platte als ein System rechtwinklig zueinander verlaufender biegeweicher Fäden. *Jakob II Bernoulli*, ein Schüler Eulers, erweiterte diese Theorie auf *elastische* Rechteckplatten, wobei er diese als System rechtwinklig zueinander angeordneter Balken auffasste. Die von der Mathematikerin *Sophie Germain* im Jahre 1811 anlässlich eines Preisausschreibens der Französischen Akademie der Wissenschaften aufgestellte *Differentialgleichung der Platte* war noch unvollständig, enthielt aber erstmals die *Drillwirkung*. Die vollständige Differentialgleichung für die Biegung elastischer Platten wurde in Aufzeichnungen von *Lagrange*, einem Rezensenten der Arbeit Germains, aus dem Jahre 1813 gefunden. Die vollständige Theorie der dünnen elastischen Platten mit kleinen Durchbiegungen, wie sie noch heute im wesentlichen Gültigkeit hat, formulierten *Navier, Poisson* und vor allem *Kirchhoff* (1850). Die nichtlinearen Differentialgleichungen dünner elastischer Platten mit grossen Durchbiegungen wurden im Jahre 1907 durch *Föppl* und in ihrer vollständigen Form im Jahre 1910 durch *Kármán* aufgestellt. Damit waren die Grundlagen zur Berechnung von Platten mit Hilfe der *Elastizitätstheorie* vorhanden. In der Folge erarbeitete man vor allem Lösungsmethoden. Bis heute wurden viele Tabellenwerke erstellt und verschiedene Computerprogramme entwickelt, die eine *numerische* Berechnung von Platten mittels der Elastizitätstheorie erlauben.

Die *plastischen Berechnungsmethoden* wurden seit der Einführung der *Fliessgelenklinientheorie* von *Ingerslev* (1921) und *Johansen* (1943) durch die Anwendung der Plastizitätstheorie auf homogene Platten und Stahlbetonplatten systematisch erweitert. Auf der Grundlage der in den fünfziger Jahren ausgereiften Plastizitätstheorie entwickelte man in den vergangenen 20 Jahren Fliessbedingungen für Stahlbetonplatten, die auf Biegung und Biegung mit Membrankräften beansprucht sind.

Im Vergleich zur elastischen Plattentheorie wurde die Bauweise *„Eisenbeton"*, oft auch nach zwei französischen Pionieren Bauweisen *„Monnier"* (Patent 1867) oder *„Hennebique"* (Patent 1893) genannt, relativ spät entwickelt. Im Jahre 1898 wurde in Deutschland der *Deutsche Beton-Verein* und im Jahre 1907 der *Deutsche Ausschuss für Eisenbeton* gegründet. In der *Schweiz* traten erstmals im Jahre 1909 Normen über die Berechnung von Eisenbeton in Kraft.

Einen bedeutenden Entwicklungsschritt brachte die Einführung der *Vorspannung* in den Jahren vor dem Zweiten Weltkrieg. Der entscheidende Schritt gelang dem Franzosen *Freyssinet*, indem er die Vorspannverluste infolge Schwinden und Kriechen des Betons durch die Verwendung hochwertiger Stähle mit entsprechend hoher Stahlvordehnung in Grenzen halten konnte. Nach dem Zweiten Weltkrieg wurde auf der ganzen Welt die *Vorspannung mit nachträglichem Verbund* bei einer Vielzahl von Brücken angewandt. In der *Schweiz genehmigte der SIA im Jahre 1951 erstmals Vorschriften über vorgespannten Beton*, die dann 1956 in Kraft traten. Im Jahre 1954 führte *Guyon* Versuche an einer Brückenfahrbahnplatte mit vorgespannten Drähten mit und ohne Verbund durch. In den *USA* wurden 1955 die ersten Hochbaudecken mit *Vorspannung ohne Verbund* ausgeführt. Lange Zeit war man der Auffassung, dass Stahlbeton, wie der Eisenbeton seit 1941 bezeichnet wird, und vorgespannter Beton zwei verschiedene Bauweisen seien. Mit der Einführung der *partiellen Vorspannung* in die Norm SIA 162 im Jahre 1968 sind erstmals Grundlagen geschaffen worden, wonach der ganze Bereich von Stahlbeton bis zur vollen Vorspannung als *einheitliche* Bauweise behandelt werden kann.

Bild 1. Parkhaus Saas-Fee. Platte mit Vorspannung ohne Verbund



Anwendung der Vorspannung

Im *Brückenbau* hat die Vorspannung sehr schnell eine nicht mehr wegzudenkende Bedeutung erlangt. Brücken mit Spannweiten ab 10 m können heute wirtschaftlich in Spannbeton ausgeführt werden. Weitgespannte Balkenbrücken in Beton mit Spannweiten über 200 m, wie sie in neuerer Zeit gebaut werden, wären ohne Vorspannung nicht realisierbar.

Die Anwendung der Vorspannung im *Hochbau* (Bild 1) geht aber nur zögernd vor sich – zu unrecht wie ich meine. Aus

der Liste der bekannten *Vorzüge* des Spannbetons seien hier zwei, für *Platten im Hochbau* besonders wesentliche, hervorgehoben:

- Dank der Verwendung von Spannstählen mit sehr hoher Zugfestigkeit an Stelle von schlaffen Stählen, können wirtschaftlichere Konstruktionen erzielt werden.
- Vorgespannte Platten weisen im Vergleich zu Stahlbetonplatten ein erheblich günstigeres Verhalten im Gebrauchszustand auf.

Gerade der zweitgenannte Vorteil wird heute noch zu wenig beachtet. Mit einer relativ kleinen Vorspannung können die Durchbiegungen erheblich vermindert und die Rissbildung beschränkt werden. Eine weitere Verbesserung des Gebrauchszustandes kann durch eine erweiterte Anwendung der Vorspannung in Wänden, Brüstungen und Fundamenten erzielt werden.

Über die Vorteile der Anwendung der Vorspannung im Hochbau sind sich die meisten Fachleute einig. Hingegen gehen die Meinungen darüber auseinander, *wie* die Vorspannung zu verwenden sei. Soll Vorspannung mit oder ohne Verbund verwendet werden? Sollen die Spannglieder in Flachdecken nur in den Stützstreifen konzentriert oder sollen zusätzlich im Feld verteilte Spannglieder angeordnet werden? Sogar über die bei der Berechnung anzuwendenden baustatischen Methoden sind intensive Diskussionen aufgekommen.

Vorspannung mit oder ohne Verbund

Die Anwendung der Vorspannung mit oder ohne Verbund ist in erster Linie ein *wirtschaftliches* Problem. Durch eine fachgemässe Projektierung können durch Vorspannung mit und ohne Verbund qualitativ gleichwertige Konstruktionen erzielt werden. Es ist aber auf eine richtige Berechnung und Bemessung, eine saubere konstruktive Durchbildung und eine sorgfältige Ausführung grosser Wert zu legen. Der Art der verwendeten Vorspannung ist bereits bei der Projektierung gebührend Rechnung zu tragen. Nicht alle Anwendungsgebiete sind für beide Verfahren gleich geeignet. Auf die Vor- und Nachteile der Vorspannung mit und ohne Verbund wird im folgenden kurz eingegangen.

Bei der *Vorspannung mit Verbund* wird der Spannstahl nach dem Spannvorgang durch Injektion von Zementsuspension mit dem umgebenden Beton in Verbund gebracht.

Vorteile:
- Bessere Ausnützung des Spannstahls im Bruchzustand,
- lokales Versagen eines Spanngliedes hat begrenzte Auswirkungen,
- der Korrosionsschutz wird durch die Injektion sichergestellt.

Nachteile:
- Verlust an statischer Höhe wegen Spanngliedabmessung,
- geringere Ausnützung des Vorspannstahles in Gebrauchszustand infolge Reibungsverlust,
- relativ grosser Aufwand, um kleine Spannglieder sorgfältig injizieren zu können.

Bei den heute verwendeten Systemen der Vorspannung *ohne Verbund* wird die Monolitze, bestehend aus Litze, Dauerkorrosionsschutzfett und Kunststoffrohr fabrikmässig hergestellt.

Vorteile:
- Spannstahl ab Werk korrosionsgeschützt,
- maximale Spanngliedexzentrizität,
- geringer Spannkraftverlust aus Reibung,
- Injektionsvorgang entfällt.

Nachteile:
- Spannstahl kann im Bruch nicht voll ausgenützt werden,
- bei lokalem Versagen fällt ein Spannglied über einen grösseren Bereich aus.

Bei der Verwendung der Vorspannung mit Verbund ist darauf zu achten, dass geeignete Spanngliedeinheiten gewählt und dass lange Einzellitzen auf ihre ganze Länge sorgfältig injiziert werden. Bei der Verwendung der Vorspannung ohne Verbund ist ein Bauwerk durch Anordnen von beidseitig wirksamen Zwischenverankerungen zu unterteilen. Diese Unterteilung kann etwa analog zu Brandabschnitten vorgenommen werden. Im weiteren ist dem Korrosionsschutz der Spannverankerungen besondere Aufmerksamkeit zu schenken, müssen diese doch während der ganzen Lebensdauer des Bauwerks ihre Funktion erfüllen können.

Beide Arten der Vorspannung sollen durch Berufsleute mit gründlichen handwerklichen Kenntnissen ausgeführt werden. Die Vorspannung muss mit der nötigen Sorgfalt in ein Bauwerk eingebaut werden, soll ihre Anwendung nicht zu Misserfolgen führen. Diesen wichtigen Aspekt sollten die spezialisierten Vorspannfirmen auch dann beachten, wenn sie die Vorspannarbeiten aus Kostengründen durch den Hauptunternehmer oder durch Unterakkordanten ausführen lassen.

Wahl der Berechnungsmethode

Platten mit Vorspannung mit und ohne Verbund können analog zu schlaff bewehrten Platten mit den bekannten Methoden der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie berechnet werden. Bei der Verwendung der Vorspannung ohne Verbund sind, wie anschliessend gezeigt wird, einige zusätzliche Überlegungen anzustellen. Die in den heutigen Vorschriften verlangten, bzw. zugelassenen Berechnungs- und Bemessungsmethoden lassen sich gemäss Tabelle 1 unterteilen.

Mit dem Wechsel vom Konzept der Bemessung auf *zulässige Spannungen* auf das der Bemessung auf die beiden *Grenzzustände Tragfähigkeit* und *Gebrauchsfähigkeit* muss neu überlegt werden, wann welche Berechnungsmethoden zweckmässig anzuwenden sind.

Häufig wird die Bemessung auf *Tragfähigkeit* folgendermassen durchgeführt: Die mit Methoden der Elastizitätstheorie berechneten Schnittkräfte unter Gebrauchslasten (mit oder ohne Umlagerung) werden mit einem Sicherheitsfak-

Tabelle 1. Berechnungs- und Bemessungsmethoden

	Berechnung der Schnittkräfte	*Bemessung*	
I	Elastizitätstheorie, lineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf zulässige Spannungen, Risse, Deformationen	Gebrauchsfähigkeit
II	Elastizitätstheorie, lineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf Bruch Stäbe - Platten	Tragfähigkeit
III	Elastizitätstheorie mit beschränkter Umlagerung	Querschnitte auf Bruch Stäbe - Platten	Tragfähigkeit
IV	Plastizitätstheorie: Statische Methode (unterer Grenzwert); Kinematische Methode (oberer Grenzwert)		Tragfähigkeit
V	Elastizitäts- oder Plastizitätstheorie, Nichtlineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf - zulässige Spannungen, Risse, Deformationen - Bruch	Gebrauchsfähigkeit Tragfähigkeit

tor vergrössert und schnitt- oder punktweise mit den vorhandenen Bruchwiderständen verglichen (Methoden II und III in Tabelle 1). Wie später gezeigt wird, bietet dieses Vorgehen keine Gewähr, dass ein Tragwerk wirtschaftlich und sicher bemessen ist.

Für die *Ermittlung der Tragfähigkeit* wird im Entwurf zur Revision der Norm SIA 162 [1] empfohlen, den Tragwiderstand an einem geeigneten Widerstandsmodell mit Hilfe der *Plastizitätstheorie* zu bestimmen. Bei der Anwendung der Plastizitätstheorie stehen zwei Methoden zur Verfügung: die *statische Methode*, die aus dem unteren Grenzwertsatz abgeleitet ist und eine untere Schranke der Traglast liefert und die *kinematische Methode*, die aus dem oberen Grenzwertsatz abgeleitet ist und eine obere Schranke der Traglast liefert. Es ist nur in einfachen Fällen möglich, die Bedingungen beider Grenzwertsätze zu erfüllen und damit eine exakte Lösung zu finden.

Exakte oder annähernd exakte Lösungen können auch dadurch gewonnen werden, dass man die statische Methode als Maximalaufgabe und die kinematische Methode als Minimalaufgabe formuliert. In den meisten Fällen muss man sich jedoch mit einer Eingabelung der richtigen Lösung begnügen.

Gefühlsmässig neigen wir dazu, die *statische Methode* zu bevorzugen. Dies ist verständlich, liefert sie doch Bemessungswerte, die theoretisch auf der sicheren Seite liegen. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, dass bei der Anwendung der statischen Methode nur eine konventionelle Grenzwertlinie zu bestimmen sei und die Bewehrung dann mit Hilfe der Deckungslinie festgelegt werden könne.

Wird ein Tragwerk so bemessen, dass die Momentengrenzwertlinie unter Gebrauchslasten um einen globalen Sicherheitsfaktor erhöht wird und diese Momente dann querschnittsweise auf Bruch abgedeckt werden, weist es unter Umständen keine genügende Bruchsicherheit auf.

Das liegt darin begründet, dass bei der Plastizitätstheorie das *Superpositionsgesetz* nicht gültig ist. Ausgehend vom Konzept der Teilsicherheitsfaktoren, bei dem der Sicherheitsfaktor in einen Last- und einen Widerstandsfaktor aufgeteilt wird, kann durch richtiges Anwenden der statischen Methode selbstverständlich sicher bemessen werden. Bei den ständigen Lasten ist zu unterscheiden, ob sie günstig oder ungünstig wirken. Nach der CEB/FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton aus dem Jahre 1978 [2] kann man z. B. in einem Durchlaufträger von Feld zu Feld verschiedene Lastfaktoren ansetzen oder eine Grenzwertlinie bilden, indem man über das ganze Tragwerk einen einheitlichen Lastfaktor ansetzt, wobei die ständigen Lasten einmal mit einem maximalen (z. B. 1,4) und einmal mit einem minimalen (z. B. 0,80) Faktor zu multiplizieren sind.

Wie es auch im Entwurf zur neuen Norm SIA 162 formuliert ist, soll nur dann *ausschliesslich* die *kinematische Methode* verwendet werden, wenn durch ausreichende Erfahrung bekannt ist, dass der damit ermittelte obere Grenzwert für die rechnerische Traglast nicht wesentlich von der wirklichen Traglast abweicht. Für Durchlaufträger und im Grundriss regelmässige Platten kennt man heute sehr gute kinematische Lösungen. Bei im Grundriss regelmässigen Flachdecken erhält man mit einfachen Linienmechanismen, die im Bereich der Stützen einen Teil der Dissipationsleistung vernachlässigen, Grenzwerte der Traglast, die sogar auf der sichern Seite liegen [3, 4]. Bei der Anwendung der kinematischen Methode ist vor allem darauf zu achten, dass nicht massgebende Mechanismen vergessen werden. Das Problem der massgebenden Lastfaktoren für ständige Lasten kann mit der kinematischen Methode einfach gelöst werden. Es ist beim jeweiligen Mechanismus abzuklären, ob die ständige Last positive oder negative Arbeit bzw. Leistung liefert; entsprechend sind die obern oder untern Werte des Lastfaktors zu verwenden.

Es wäre sicher falsch, bei der Anwendung der Plastizitätstheorie die statische oder die kinematische Methode zu bevorzugen. Bei richtiger Anwendung liefert die statische Methode Grenzwerte für den Schnittkraftverlauf, die direkt für die Bemessung verwendet werden können. Die kinematische Methode eignet sich vor allem für einen Bruchsicherheitsnachweis eines bemessenen Systems. Systeme, bei denen die massgebenden Bruchmechanismen bekannt sind, können auch mit der kinematischen Methode sehr einfach und anschaulich bemessen werden. Der Ingenieur interessiert sich zum einen für das Kräftespiel in einem Tragwerk. Dies führt ihn auf statische Lösungen. Zum andern möchte er aber auch wissen, wie ein Tragwerk zu Bruch geht. Diese Frage beantwortet er am besten durch Untersuchen von Bruchmechanismen, also durch Anwenden der kinematischen Methode. Darum ist es richtig, die statische und die kinematische Methode der Problemstellung entsprechend für die Berechnung und Bemessung einzusetzen, um so sichere und wirtschaftliche Konstruktionen zu erhalten.

Beim Nachweis der *Gebrauchsfähigkeit* kann von einer Schnittkraftverteilung ausgegangen werden, die mittels der Theorie dünner elastischer Platten gewonnen wird. Mit diesen Schnittkräften können Durchbiegungen und Risse überprüft werden. In Anbetracht der grossen Unsicherheiten, die den Methoden zur Kontrolle von Durchbiegungen und Rissen zwangsweise anhaften müssen (Übergang gerissen - ungerissen, Mitwirkung des Betons auf Zug, E-Modul sowie Kriech- und Schwindmasse des Betons), ist es nicht sinnvoll, die Schnittkraftverteilung mit zu grosser Genauigkeit zu ermitteln. Es soll im weiteren nicht vergessen werden, dass die elastisch ermittelten Schnittkräfte auch nur eine Näherung der effektiv vorhandenen Schnittkräfte sind. Es genügt darum in vielen Fällen, die Berechnung mit vernünftigen Näherungsmethoden wie der Streifenmethode, der Methode der stellvertretenden Rahmen, Benützung einfacher Tabellen usw. durchzuführen. In komplizierteren Fällen kann man vorhandene Computerprogramme, die teilweise sehr gebrauchsfreundlich sind, verwenden [5].

Rechnerische Berücksichtigung der Vorspannung

Über die Art, wie die Vorspannung in die Berechnung einzuführen ist, herrscht immer noch Unklarheit. Nach der CEB/FIP-Mustervorschrift aus dem Jahre 1978 [2] ist die Vorspannung wie folgt zu behandeln: Vor Herstellung des Verbundes zwischen Spannstahl und Beton sind die Auswirkungen der Vorspannung immer als *äussere Kräfte* einzuführen. Bei Vorspannung mit Verbund sind ihre statisch bestimmten Auswirkungen als *Widerstände* in Rechnung zu stellen, wenn die Stahldehnung die Fliessdehnung erreicht. Die Vorspannung ist als äussere Kraft anzunehmen, wenn die Stahldehnungen die Fliessdehnung nicht erreicht. Statisch unbestimmte Auswirkungen der Vorspannung (Zwängungsschnittgrössen) sind immer als äussere Kräfte aufzufassen. In den Ergänzungen zur CEB/FIP-Mustervorschrift vom Jahre 1980 sind bezüglich Vorspannung folgende Empfehlungen enthalten: *Statisch bestimmte Auswirkungen* der Vorspannung sind im Gebrauchszustand als äussere Kräfte einzuführen. Im Bruchzustand ist die Vorspannung als Widerstand aufzufassen, wenn die Stahldehnung die Fliessgrenze erreicht, und als äussere Kraft, falls die Stahldehnung unter der Fliessdehnung bleibt. *Statisch unbestimmte Auswirkungen* der Vorspannung sind sowohl im Gebrauchs- als auch im Bruchzustand als äussere Kräfte in Rechnung zu stellen. Es wird aber betont, dass diese Regel im Bruchzustand nur eine vernünftige Näherung darstellt.

Es ist nicht sinnvoll, die Grösse der Stahl-

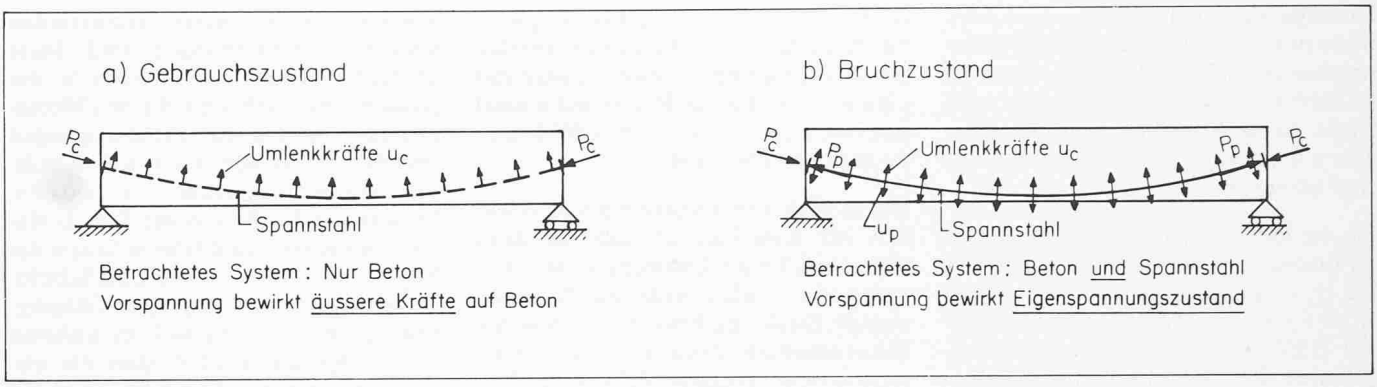


Bild 2. Rechnerische Berücksichtigung der Vorspannung

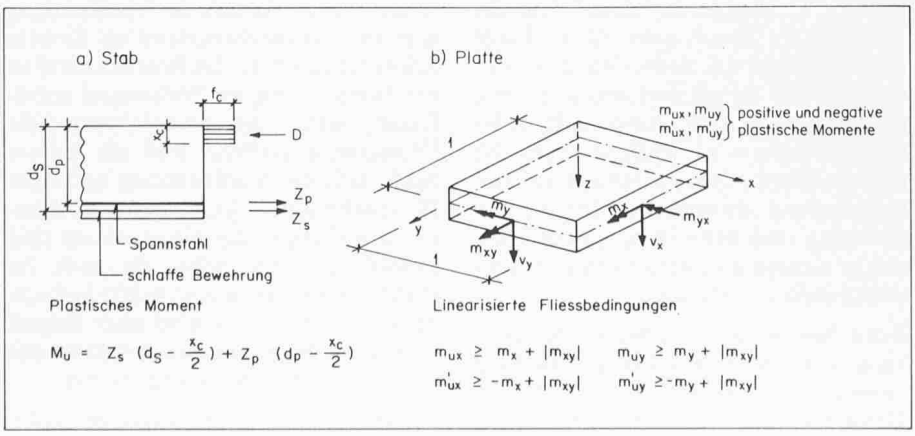
dehnung verantwortlich zu machen, ob die Vorspannung als äussere Kraft oder als Widerstand in Rechnung zu stellen ist. Grundsätzlich ist diese Unterscheidung eine Frage der Systemabgrenzung. Ein vorgespannter Balken oder eine vorgespannte Platte kann normalerweise immer so abgegrenzt werden, dass die Spannglieder mit ihren Verankerungen zum System gehören. Die Vorspannung bewirkt dann einen *Eigenspannungszustand.* Bei statisch bestimmter Lagerung treten nur innere Kräfte bzw. Spannungen auf, die unter sich im Gleichgewicht sind. Bei statisch unbestimmter Lagerung werden infolge von verhinderten Verformungen Auflagerkräfte und Zwängungsschnittgrössen aufgebaut. Diese Auflagerkräfte und Zwängungsschnittgrössen bilden unter sich wieder ein Gleichgewichtssystem und können somit ebenfalls als Eigenspannungszustand aufgefasst werden. Wird ein vorgespannter Bauteil so abgegrenzt, dass die Spannglieder und ihre Verankerungen nicht zum betrachteten System gehören, bewirkt die Vorspannung auf das so abgegrenzte System (nur Beton betrachten) äussere Kräfte.

Unter der Voraussetzung, dass eine genügende Verformungsfähigkeit vorhanden ist, hat ein Eigenspannungszustand keinen Einfluss auf die Traglast und kann unberücksichtigt bleiben. Falls aber die erforderliche Verformungsfähigkeit nicht gewährleistet ist, muss eine Zwängung auch in der Berechnung der Tragfähigkeit mitberücksichtigt werden. Beim Nachweis der Gebrauchsfähigkeit ist jedoch ein Eigenspannungszustand immer zu berücksichtigen, denn die daraus resultierenden Spannungen bzw. die entsprechenden Dehnungen beeinflussen die Grössen der Rissbreiten und Verformungen. Aus diesen grundsätzlichen Überlegungen folgt, dass die Vorspannung wie folgt sinnvoll und einfach zu berücksichtigen ist.

Gebrauchszustand: Sowohl statisch bestimmte wie auch statisch unbestimmte Einflüsse der Vorspannung sind als *äussere Kräfte* einzuführen, wobei normalerweise ein Lastfaktor von Eins anzunehmen ist (Bild 2a). Zur Kontrolle der Durchbiegung ist es oft vorteilhaft, die Umlenkkräfte aus der Vorspannung direkt von den Eigen- und Nutzlasten abzuziehen und nur die Differenzlast in Rechnung zu stellen. Zur Kontrolle des Rissverhaltens sind, wie später gezeigt wird, weitere Überlegungen anzustellen.

Bruchzustand: Im Bruchzustand soll die Vorspannung konsequent als Widerstand aufgefasst werden und zwar bei Vorspannung mit und ohne Verbund (Bild 2b). Die Einflüsse der Vorspannung sind um den vorgeschriebenen Widerstandsfaktor zu vermindern. Es müssen keine Schnittkräfte aus Vorspannung und demzufolge auch keine Zwängungsmomente berechnet werden. Falls man zur Berechnung und Bemessung die statische Methode der Plastizitätstheorie verwendet, kann der massgebenden Grenzwertlinie unter Eigen- und Nutzlasten ein Eigenspannungszustand überlagert werden, der ungefähr dem Zwängungsmoment aus der Vorspannung entspricht.

Bild 3. Bruchwiderstände



Durchführung der Berechnung und Bemessung

Platten mit Vorspannung mit Verbund können mit den vorhandenen Vorschriften über vorgespannte Betonkonstruktionen berechnet und bemessen werden. Für Platten mit Vorspannung ohne Verbund existieren heute erst wenige Vorschriften und Empfehlungen (USA, England, FIP-Empfehlungen). In verschiedenen Ländern sind entsprechende Bestimmungen in Arbeit (Deutschland, Schweiz, Holland).

Tragfähigkeit

Der Tragfähigkeitsnachweis soll, wie früher gesagt wurde, mit Hilfe der Plastizitätstheorie erfolgen. Bei der Anwenddung der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie muss man die vorhandenen oder die erforderlichen *Bruchwiderstände* der einzelnen Querschnitte bzw. Plattenelemente kennen. Bei nur auf Biegung beanspruchten Stäben führt dies auf die Bestimmung des bekannten plastischen Momentes (Bild 3a). Sieht man bei Platten von der Membranwirkung ab, können nach der sogenannten *Fliessgelenklinientheorie* einfache Fliessbedingungen abgeleitet werden, die den Widerstand in einem Punkt der Platte beschreiben. In Bild 3b sind für den Fall *orthotroper Platten* die in der Anwendung sehr einfachen *linearisierten Fliessbedingungen* dargestellt. Bei bekannten Biegemomenten m_x und m_y sowie Drillungsmomenten m_{xy} können die linearisierten Fliessbedingungen direkt als Bemessungsgleichungen verwendet werden.

Der Bruchwiderstand aus schlaffer Bewehrung und Vorspannung mit Verbund kann mit der bei Platten praktisch immer

zutreffenden Annahme, dass der Stahl fliesst, berechnet werden. Dies gilt in der Regel auch für Querschnitte über Innenstützen von Flachdecken, wo die Spannglieder stark konzentriert sind. Um die Stütze herum öffnen sich vor allem radiale Risse und es bildet sich eine tangential wirkende Betondruckzone aus. Dadurch wird die sog. mitwirkende Breite stark vergrössert.

Für den Spannstahl ohne Verbund stellt sich die Frage nach der im Bruchzustand wirksamen Stahlspannung. Der Spannungszuwachs wurde oft entweder als konstanter Wert oder querschnittweise als Funktion des Bewehrungsgehaltes und der Betondruckfestigkeit angesetzt. Eine differenziertere Untersuchung zeigt, dass dieser Spannungszuwachs von der Geometrie und der Verformung des Gesamtsystemes abhängig ist [6].

Anhand eines *Plattenstreifenmodells* (Bild 4) kann gezeigt werden, mit welcher Modellvorstellung Platten mit Vorspannung ohne Verbund behandelt werden können. Bis zur Risslast verhält sich die Platte homogen und kann mit der elastischen Theorie dünner Platten mit kleinen Durchbiegungen berechnet werden. Für die gerissene Platte wird angenommen, dass der Beton als Druckmembran und der Spannstahl als Zugmembran wirken. Die schlaffe Bewehrung wird vorwiegend Biegewiderstände entwickeln.

Mit dem in Bild 4b dargestellten einfachen Fachwerkmodell, das ähnlich wie ein Plattenstreifen mit Vorspannung ohne Verbund wirkt, lassen sich einige interessante Resultate gewinnen. Formuliert man Gleichgewicht am deformierten System, kann die Spannstahlverlängerung in Abhängigkeit der Durchbiegung berechnet werden. Wenn keine äussere Membranstützung vorhanden ist (einfacher Balken), erhält man

$$(1) \quad \frac{\Delta \ell}{\ell} = 4 \cdot \frac{f_o}{\ell} \cdot \frac{a}{\ell} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{A_p \cdot E_p}{A_c \cdot E_c}}$$

Setzt man für f_o einen innern Hebelarm von $0{,}75 \cdot d_p$ ein, findet man unter Vernachlässigung der Verkürzung des Betons folgende auf die Spannweite l bezogene Spannstahlverlängerung:

$$(2) \quad \frac{\Delta \ell}{\ell} = 3 \cdot \frac{d_p}{\ell} \cdot \frac{a}{\ell}$$

Die Spannstahlverlängerung ist also im wesentlichen vom Verhältnis der statischen Höhe d_p zur Spannweite ℓ und der Durchbiegung a abhängig. Bringt man die Gleichung (2) auf die Form

$$(3) \quad \Delta \sigma_p \cdot \frac{\ell}{d_p} = 3 \cdot E_p \cdot \frac{a}{\ell}$$

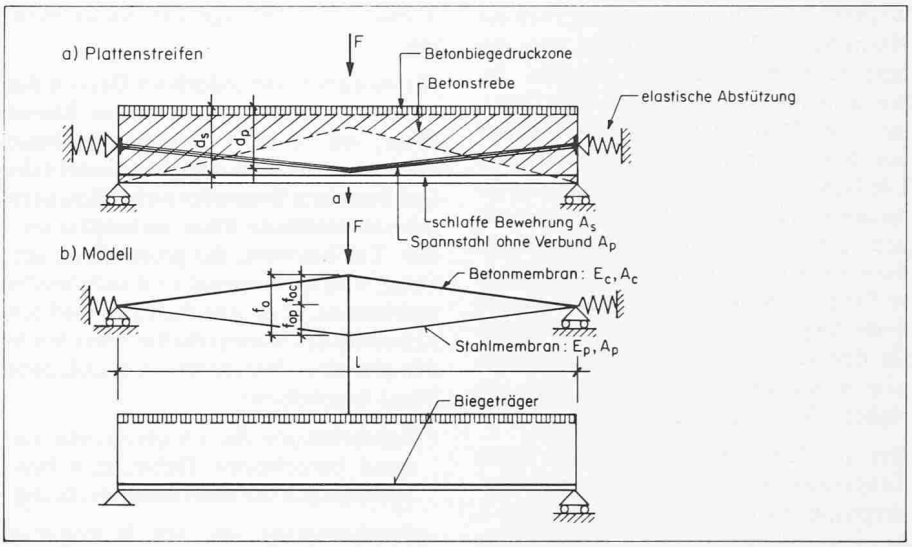


Bild 4. Tragmodell eines Plattenstreifens mit Vorspannung ohne Verbund

kann sie direkt mit Versuchen verglichen werden, die an Plattenstreifen verschiedener Abmessungen durchgeführt wurden. In Bild 5 ist ein Vergleich mit eigenen [7] und an der *Universität Essen* [8] durchgeführten Versuchen dargestellt. Zwecks einheitlicher Darstellung wurden die Essener Versuche mit dem Verhältnis freie Spanngliedlänge zu Spannweite umgerechnet.

Falls eine starre äussere Membranstützung vorhanden ist, bestimmt sich die auf die Spannweite ℓ bezogene Spanngliedverlängerung zu

$$(4) \quad \frac{\Delta \ell}{\ell} = c \left(\frac{a^2}{2 \cdot \ell^2} + \frac{a}{\ell} \cdot \frac{f_{op}}{\ell} \right)$$

Die Spannstahlverlängerung ist in diesem Fall vom Verhältnis des Stichs des Spanngliedes f_{op} zur Spannweite ℓ, der Durchbiegung a und von einem durch die Spanngliedführung sowie durch die Form der Durchbiegungskurve beeinflussten Faktor c abhängig. Wird für das in Bild 4 dargestellte Fachwerkmodell eine dreiecksförmige Durchbiegungskurve angesetzt, berechnet sich der Spannungszuwachs im Spannstahl zu

$$(5) \quad \Delta \sigma_p = 4 \cdot E_p \left(\frac{a^2}{2 \cdot \ell^2} + \frac{a}{\ell} \cdot \frac{f_{op}}{\ell} \right)$$

In Bild 6 ist Gl. (5) mit dem Versuch PS1 [7], der eine starre äussere Membranstützung aufwies, verglichen. Die gute Übereinstimmung der theoretischen und experimentell bestimmten Werte in den Bildern 5 und 6 zeigt, dass die Spannstahlverlängerung mit den Gleichungen (2) und (4) mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann.

In Entwürfen zu neueren Vorschriften [9], [10] wird vorgeschlagen, den Spannungszuwachs im Spannstahl ohne Verbund beim Erreichen eines nominellen Bruchzustandes abzuschätzen und zusammen mit der effektiv vorhandenen Spannung (nach Abzug der Verluste infolge Reibung, Schwinden, Kriechen und Relaxation) in Rechnung zu stellen. Der nominelle Bruchzustand wird durch eine Grenzdurchbiegung a_u festgelegt. Mit dieser können die Spanngliedverlängerungen in einem Feld bestimmt

Bild 5. Spannungszuwachs im Spannstahl ohne Verbund (keine äussere Membranstützung)

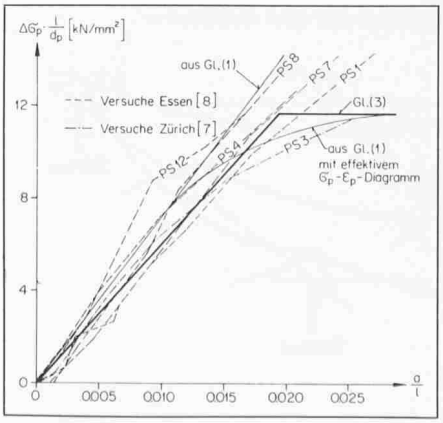
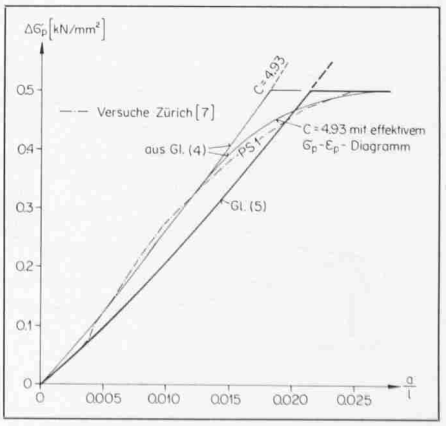


Bild 6. Spannungszuwachs im Spannstahl ohne Verbund (starre äussere Membranstützung)



werden. Im Revisionsvorschlag 1979 zur Norm SIA 162 wird festgelegt, dass der nominelle Bruchzustand erreicht ist, wenn beim massgebenden Mechanismus eine Durchbiegung a_u von 1/40 der zugehörigen Spannweite ℓ vorhanden ist. Die DIN Norm 4227, Teil 6, schreibt für diesen Wert 1/50 vor. Wie Versuche zeigen, sind diese Grenzdurchbiegungen für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Platten, Werte, die auf der sicheren Seite liegen. Bei Systemen, bei denen für den Bruch ein sprödes Schubversagen massgebend ist, fehlen noch gesicherte Versuchsergebnisse.

Der in Rechnung zu stellende Spannungszuwachs ergibt sich aus der Verlängerung $\Delta\ell$, die über die freie Länge L des Spanngliedes zwischen den Verankerungsstellen gleichmässig zu verteilen ist und aus dem tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Spannstahls. Im elastischen Bereich beträgt der Spannungszuwachs des Spannstahles somit

$$(6) \qquad \Delta\sigma_p = \frac{\Delta\ell}{\ell} \cdot E_p$$

Die Streckgrenze des Spannstahles stellt dabei selbstverständlich eine obere Grenze dar. Mit der so bestimmten Spannung kann die Zugkraft im Spannstahl und damit, wie gewohnt, der Bruchwiderstand eines Querschnittes bzw. eines Plattenelementes gemäss Bild 3 berechnet werden.

Gebrauchsfähigkeit

Sehr viele *Bauschäden in Hochbauten* sind auf eine *mangelhafte Gebrauchsfähigkeit* zurückzuführen. Eine der wichtigsten Schadensursachen sind *zu grosse Durchbiegungen* von schlaff bewehrten Hochbaudecken. Der Schaden an der Decke selbst ist meistens von untergeordneter Bedeutung; es handelt sich eher um eine subjektive Beurteilung, ob eine Durchbiegung in bezug auf das Aussehen toleriert wird. Zu grosse Durchbiegungen bewirken aber oft kostspielige Schäden an nichttragenden Bauelementen.

Risseschäden sind jedoch an Decken des üblichen Hochbaus eher selten. Kleine Risse, die in einer Betonkonstruktion nicht zu vermeiden sind, vermindern die Qualität eines Bauwerks nicht. Hingegen müssen klaffende Risse verhindert werden. Ein Bauwerk, das grosse Risse aufweist, wird bald einmal als minderwertig empfunden. Zur Abschätzung und zur Kontrolle des Risseverhaltens werden in den einzelnen Vorschriften verschiedene Wege beschritten:

- Beschränkung der im gerissenen Zustand berechneten Dehnungen bzw. Spannungen der schlaffen Bewehrung;
- Beschränkung der am homogenen Querschnitt berechneten Betonzugspannungen;
- Festlegung einer erforderlichen Mindestbewehrung, die eine Risseverteilung gewährleistet;
- Rissenachweis mit theoretisch oder empirisch gewonnenen Risseformeln.

Beim Nachweis der Gebrauchsfähigkeit üblicher Hochbaudecken sind in erster Linie die *Durchbiegungen* zu kontrollieren. Es genügt dann, in einem weiteren Schritt dafür zu sorgen, dass eine *Risseverteilung* gewährleistet ist. Mit einer beschränkten Durchbiegung und einer guten Risseverteilung ist auch die Rissöffnung beschränkt, was leicht mit geometrischen Überlegungen einzusehen ist.

Durchbiegungen

Wie einleitend dargestellt wurde, ist beim Nachweis zur Begrenzung der Durchbiegungen von einer *annähernd* elastischen Schnittkraftverteilung auszugehen. Für *schlaff bewehrte Platten* kann die Durchbiegung unter Berücksichtigung des Überganges vom ungerissenen zum gerissenen Stadium sowie des Kriechens und Schwindens z. B. gemäss der in [11] angegebenen Verfahren ermittelt werden. Massgebende Parameter einer solchen Berechnung sind u. a.: Abmessungen der Platte, Gehalt an schlaffer Bewehrung, Verhältnis des Momentes infolge Dauerlasten zum Rissmoment und charakteristische Werte des Betons wie E-Modul, Schwind- und Kriechmasse. Eine für die Praxis oft ausreichende Abschätzung kann so erfolgen, dass man die Durchbiegung unter Dauerlasten am homogenen System unter Berücksichtigung eines Kurzzeit-E-Moduls des Betons berechnet und diese um einen globalen Faktor, der Reissen, Schwinden und Kriechen des Betons berücksichtigt, vergrössert. Dieser Globalfaktor variiert etwa zwischen den Werten 3 und 6.

Die *Vorspannung* beeinflusst das Durchbiegungsverhalten in zweifacher Hinsicht günstig. Einmal wird ein Teil der Last direkt über Umlenkkräfte auf die Auflager abgetragen (Bild 7). Im weiteren erhöht die in der Plattenebene wirkende Normalkraft aus Vorspannung das Rissmoment erheblich. Bezüglich der Durchbiegung erweist sich z. B. bei Flachdecken die Spanngliedanordnung am günstigsten, bei der etwa 50 % der Spannglieder über den Stützen konzentriert und 50 % im Feld gleichmässig verteilt angeordnet werden. In vielen Fällen verhält sich eine auf diese Art vorgespannte Platte unter Dauerlasten homogen. Die Durchbiegung kann unter den Dauerlasten, die um die Umlenkkräfte aus Vorspannung zu reduzieren sind, am homogenen System berechnet werden. Das Kriechen ist durch Reduktion des Kurzzeit-E-Moduls des Betons auf $E_c/(1+\varphi)$ zu berücksichtigen werden. Die Kriechzahl φ des Betons variiert etwa zwischen den Werten 1,5 und 3,5.

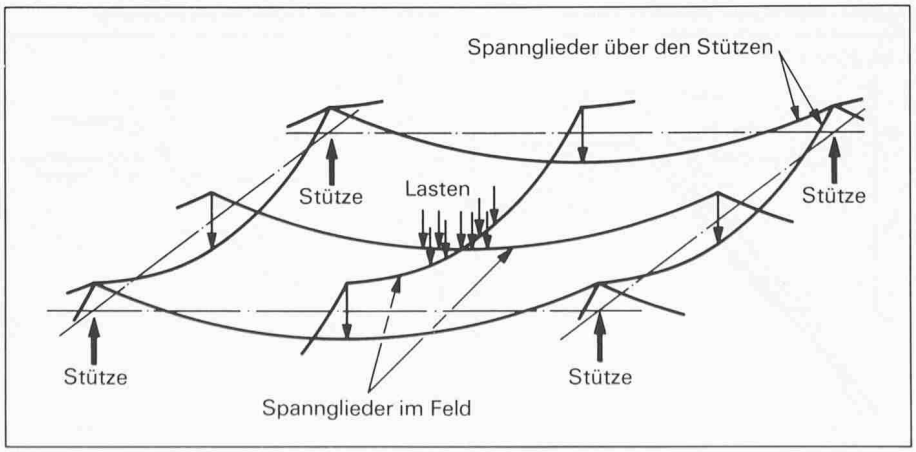
Risse

In Platten mit schlaffer Bewehrung oder mit Vorspannung mit Verbund ist die Rissentwicklung wesentlich von den Verbundeigenschaften zwischen Stahl und Beton abhängig. In einem Riss ist die Zugkraft praktisch vollständig im Stahl konzentriert. Über Verbundspannungen wird diese Kraft sukzessive vom Stahl auf den Beton übertragen. Sobald in einem weiteren Schnitt der Zugwiderstand der Betonzugzone überschritten wird, bildet sich ein neuer Riss.

Der Einfluss der Vorspannung ohne Verbund auf das Risseverhalten kann nicht über Verbundgesetze untersucht werden. Zwischen dem Spannstahl ohne Verbund und dem Beton treten nur sehr kleine Reibungskräfte auf. Somit wird die im Stahl wirksame Zugkraft fast ausschliesslich bei den Verankerungsstellen als Druckkraft auf den Beton abgegeben.

In Bild 8a ist ein horizontal gestützter Plattenstreifen mit Spannstahl ohne Ver-

Bild 7. Lastabtragung durch Vorspannung



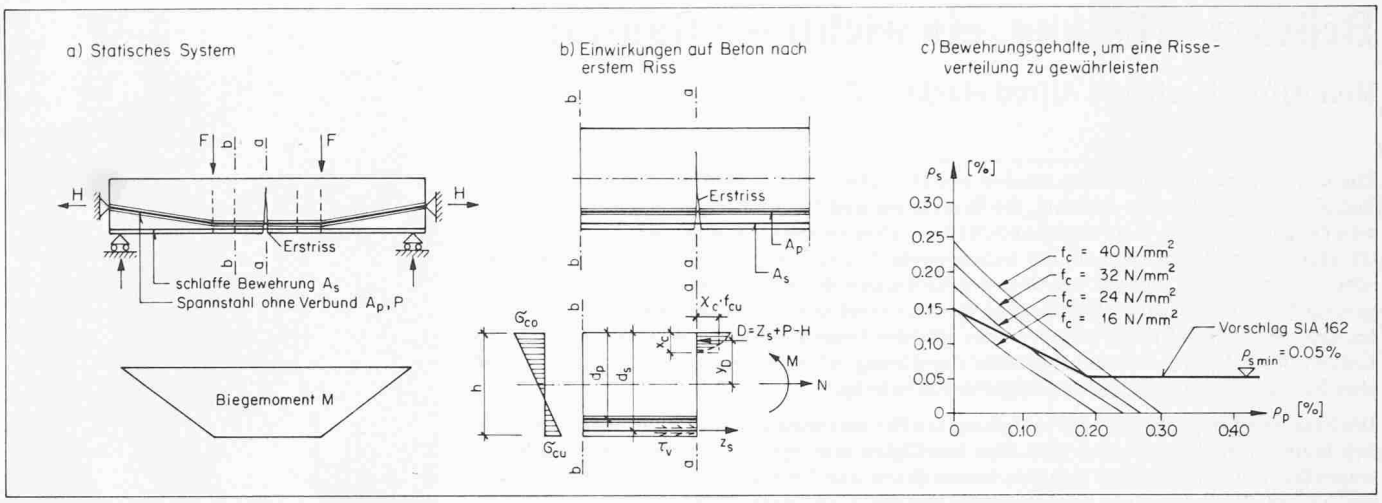


Bild 8. Risseverhalten eines Plattenstreifens

bund und zusätzlicher schlaffer Bewehrung dargestellt. Die Membrankraft infolge der seitlichen Stützung sei durch H gegeben. Es interessiert nun, ob sich nur *ein* Riss öffnet oder ob sich *mehrere* Risse bilden. Die Einwirkungen auf den Beton nach dem ersten Riss zeigt Bild 8b. Die Platte kann in diesem Teil als Scheibe angesehen werden. In einem ungerissenen Schnitt b-b erhält man aus Gleichgewichtsüberlegungen eine über die Höhe verteilte Betonspannung, oben Druck unten Zug. Ein neuer Riss wird sich dann bilden, wenn die Betonspannung σ_{cu} die effektive Zugfestigkeit des Betons erreicht. Gleichgewicht am gerissen angenommenen Betonquerschnitt a-a formuliert, ergibt

$$(7) \qquad N = H - P$$

$$(8) \qquad M = (P - H + Z_s) \cdot y_D + Z_s \left(d_s - \frac{h}{2}\right)$$

Im Schnitt b-b berechnet sich die Betonzugspannung am unteren Rand der Platte unter der Annahme, dass der Beton ungerissen ist und sich elastisch verhält, zu

$$(9) \qquad \sigma_{cu} = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$$

Dabei bezeichnet W das Widerstandsmoment und A die Fläche des Betonquerschnittes. Setzt man die Gleichungen (7) und (8) in Gl. (9) ein, findet man nach einigem Umformen als Lösung einer quadratischen Gleichung

$$(10) \qquad \rho_s = \frac{\varkappa \cdot f_c}{f_{sy}} \left[1 - \frac{\rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} - \frac{H}{b \cdot d_s}}{\varkappa \cdot f_c} - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{d_s}\right)^2 \cdot \frac{f_{ct}}{\varkappa \cdot f_c} - 2\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{d_s}\right) \cdot \frac{\rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} - \frac{H}{b \cdot d_s}}{\varkappa \cdot f_c}} \right]$$

Dabei bezeichnet ρ_s den Gehalt der schlaffen Bewehrung, der für eine Risseverteilung notwendig ist, ρ_p den Gehalt der Vorspannbewehrung, f_c die Betonfestigkeit, f_{sy} die Fliessspannung der schlaffen Bewehrung, σ_{po} die effektive Spannung im Spannstahl und f_{ct} die effektive Biegezugfestigkeit des Betons. In Bild 8c ist der Bewehrungsgehalt ρ_s in Funktion von ρ_p für verschiedene Betonfestigkeiten für den Fall, dass die Membrankraft H=O ist, dargestellt. Im Revisionsvorschlag 1979 zur Norm SIA 162 [9] wird für Randfelder folgende minimale schlaffe Bewehrung vorgeschrieben:

$$(11) \qquad \rho_s \geq 0{,}15 - 0{,}50 \cdot \rho_p$$

Untere Grenze: $\rho_s = 0{,}05$

Dabei sind ρ_s und ρ_p die prozentualen Bewehrungsgehalte. Die Gleichung (11) ist zum Vergleich in Bild 8c eingetragen. Wie die theoretisch abgeleitete Gl. (10) zeigt und experimentelle Untersuchungen bestätigten, beeinflussen Normalkräfte aus Vorspannung oder aus äusseren Membrankräften das Risseverhalten auf analoge Weise wie eine schlaffe Bewehrung. Untersucht man in den Randfeldern von Flachdecken den Verlauf der Normalkräfte infolge Vorspannung, kommt man wieder zum Schluss, dass die Vorspannung bei einer teilweise im Feld verteilten und teilweise über den Stützen konzentrierten Spanngliedanordnung das Risseverhalten am günstigsten beeinflusst.

Bei Innenfeldern ist die Risseverteilung im allgemeinen durch die verteilte Vorspannkraft und die sich schon bei kleinen Durchbiegungen aufbauenden äusseren Membrandruckkräfte gesichert. In der Regel ist daher für die Risseverteilung keine Minimalbewehrung erforderlich. Falls die Membranwirkung nicht gewährleistet ist oder wenn grössere Einzellasten und dynamische Lasten auftreten können, ist ebenfalls in Innenfeldern eine minimale schlaffe Bewehrung gemäss Gl. (11) vorzusehen.

Literaturverzeichnis

[1] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein/(1982): „SIA Norm 162: Beton, Stahlbeton und Spannbeton". 1. Gesamtentwurf (unveröffentlicht)

[2] Euro-Internationales Beton-Komitee, Internationaler Spannbeton-Verband/(1978): „CEB/FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton". 3. Ausgabe

[3] *Ritz, P., Matt, P., Tellenbach, Ch., Schlub, P., Aeberhard, H. U.*/(1981): „Spannbeton im Hochbau: Vorgespannte Decken", Losinger AG, Bern

[4] Thürlimann, B./(1977): „Flächentragwerke". Vorlesungsautographie, Abt. für Bauingenieurwesen, ETH Zürich

[5] *Narayanan, R., Schneider, J.*/(1982): „Berechnung und Bemessung von vorgespannten Flachdecken mit Hilfe eines Tisch-Computers", Schweizer Ingenieur und Architekt, Heft 32

[6] *Ritz, P.*/(1978): „Biegeverhalten von Platten mit Vorspannung ohne Verbund". Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 80, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart

[7] *Ritz, P., Marti, P., Thürlimann, B.*/(1975): „Versuche über das Biegeverhalten von vorgespannten Platten ohne Verbund". Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 7305-1, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart

[8] *Iványi, G., Buschmeyer, W.*/(1981): „Biegeversuche an Plattenstreifen mit zentrischer Vorspannung ohne Verbund". Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 16, Universität Gesamthochschule Essen

[9] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein/(1979): „Bruchverhalten von Platten". Entwurf der Arbeitsgruppe 5 der Kommission für die Revision der Norm 162, (unveröffentlicht)

[10] DIN 4227, Teil 6/(1980): „Spannbeton, Bauteile mit Vorspannung ohne Verbund". Entwurf März 1980, Beuth-Verlag, Berlin und Köln

[11] *Favre R., Koprna M., Jaccoud J.-P.* (1982): „Fissuration et déformations des structures en béton", Cours polycopié, Ecole Polytechnique Fédéral de Lausanne

Adresse des Verfassers: *Prof. Dr. P. Ritz*, Zentralschweizerisches Technikum Luzern, 6048 Horw.