Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 98 (1980)

Heft: 51-52

Artikel: Steifigkeits- und Festigkeitskriterien für die Aussteifungselemente seitlich gestützter Rechteckrahmen

Autor: Dubas, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-74288

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

stigkeit von Metallen. – Sein Ehrentag bietet den internationalen Fachorganisationen, den Lehr- und Forschungsstätten und den Ingenieuren der Praxis willkommene Gelegenheit, ihm von Herzen Dank zu sagen und für die weitere Zukunft Wohlergehen zu wünschen.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *O. Steinhardt*, Dr. sc. techn. h. c. (ETH), Lehrstuhl für Stahl- und Leichtmetallbau, Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe.

Steifigkeits- und Festigkeitskriterien für die Aussteifungselemente seitlich gestützter Rechteckrahmen

Von Pierre Dubas, Zürich

Einleitung

Rechteckrahmen mit *gelenkigen oder eingespannten Fusspunkten*, wie sie für *Industrie- oder Lagerhallen* Verwendung finden, werden gelegentlich durch in Riegelhöhe angeordnete Aussteifungselemente in waagrechter Richtung gestützt. Dies geschieht in der Regel mittels einer schubsteifen Dachscheibe (Windverband oder entsprechend ausgebildete Dacheindeckung), die ihrerseits die Auflagerkräfte auf Wandscheiben abgibt.

Bei einer solchen Ausbildung stellt sich die Frage der erforderlichen Steifigkeit der aussteifenden Bauteile, damit die Rahmen als unverschieblich angesehen werden dürfen. Zudem sind entsprechende Festigkeitskriterien aufzustellen, wobei die Wirkung der Imperfektionen der Rahmenkonstruktion zu berücksichtigen ist.

Um die Untersuchungen zu vereinfachen, wollen wir die stabilisierende Wirkung der Dachscheibe am Hallensystem durch die *federnde Stützung eines Einzelrahmens* ersetzen. Selbstverständlich geht dabei die gegenseitige Beeinflussung der mit der Dachscheibe gekoppelten Rahmen verloren. Am Schluss des Artikels wird gezeigt, wie man die am einfachen Modell gewonnenen Ergebnisse auf die tatsächlichen Verhältnisse übertragen kann.

Knickbedingungen zur Ableitung des Steifigkeitskriteriums

Allgemeine Überlegungen

Bei einem symmetrisch ausgebildeten und nur in den Stielachsen belasteten Rechteckrahmen mit in waagrechter Richtung federnd gestütztem Riegel können grundsätzlich die beiden im Bild 1 dargestellten Knickformen auftreten. Massgebend ist selbstverständlich die mit dem kleinsten Eigenwert. Bei verschwindender Steifigkeit der seitlichen Stützung knickt daher der Rahmen in antimetrischer Form aus; im Grenzfall einer starren Lagerung dagegen, tritt symmetrisches Knicken ein, ist doch dabei die Einspannwirkung des einfach gekrümmten Riegels (Bild 1, rechts) auf die knickgefährdeten Stiele wesentlich geringer als beim S-förmigen antimetrischen Verlauf (Bild 1, Mitte).

Bild 2 zeigt dieses Verhalten am Beispiel eines Rechteckrahmens mit einem Verhältnis der Stielhöhe zur Riegellänge $h/b = 5/9$ und mit gleichem Querschnitt für alle Elemente. Die Ordinaten entsprechen der Knicklast N_{cr} der Stiele, bezogen auf die Verzweigungslast $N_{o,cr}$ für den Grenzfall einer verschwindenden seitlichen Stützung (antimetrische Knickform). Als Abszisse erscheint der später gemäss Gl. (4) definierte Steifigkeitswert der Querfederung, der mit dem bekannten γ-*Wert* der Beultheorie versteifter Bleche übereinstimmt und daher mit γ_s bezeichnet wird [1].

Wie beim Beulen hat es beim Rahmenknicken offensichtlich keinen Sinn, die Steifigkeit der seitlichen Stützung über den der symmetrischen Knicklast entsprechenden Wert hinaus zu vergrössern; für höhere γ_s-Werte wird nämlich der Rahmen immer in der massgebenden symmetrischen Form ausknicken, wobei der entsprechende Eigenwert für die vorliegenden Verhältnisse rund $7{,}9 \cdot N_{o,cr}$ erreicht. Der Steifigkeitswert der Querfederung, bei dem die antimetrische Knicklast den Wert der symmetrischen erreicht, soll als *Mindeststeifigkeit* γ_s^* bezeichnet werden. Diese Werte γ_s^* werden anschliessend sowohl für

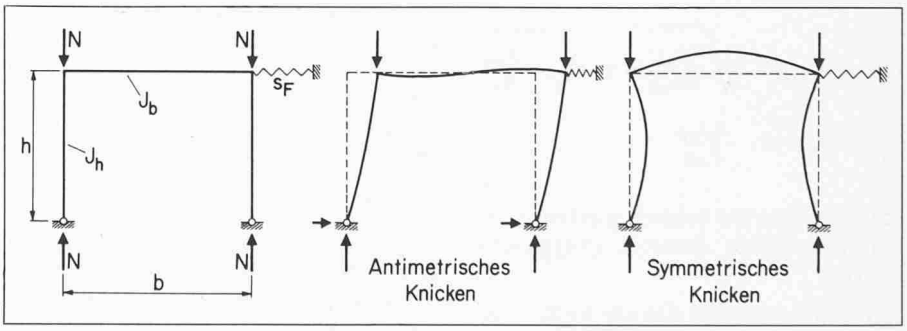

Bild 1. Knickformen beim quergefederten Rahmen

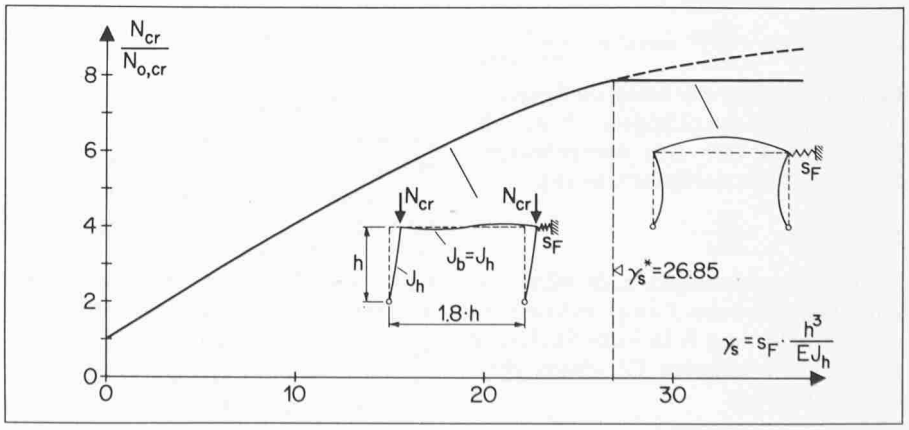

Bild 2. Verlauf der Verzweigungslast N_{cr} des quergefederten Rahmens in Funktion des Steifigkeitswertes γ_s; Definition der Mindeststeifigkeit γ_s^*

den Zweigelenkrahmen als auch für den voll eingespannten Rahmen ermittelt.

Beidseitig gelenkig gelagerter Rechteckrahmen: Knickverhalten und Mindeststeifigkeiten für die seitliche Stützung

Zur Lösung von Verzweigungsproblemen bei Rahmentragwerken eignet sich die Deformationsmethode zweiter Ordnung (vgl. z. B. [2]). Sie soll daher für die Lösung der aufgeworfenen Probleme herangezogen werden.

Beim seitlichen Knicken eines symmetrisch ausgebildeten und symmetrisch in den Stielachsen belasteten Rechteckrahmens (vgl. Bild 1) sind nur zwei unabhängige Verformungsgrössen zu betrachten: der Drehwinkel der oberen Knoten φ (mit $\varphi_{rechts} = \varphi_{links}$ aus Gründen der Antimetrie) und der Stockwerkverschiebewinkel ψ. Zur Bestimmung dieser Unbekannten stehen zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung: eine Momentengleichgewichtsbedingung in der Rahmenecke einerseits, das Gleichgewicht der waagrechten Kräfte in einem Schnitt durch die Stiele andererseits.

Als Stabsteifigkeiten führt man selbstverständlich die Werte mit dem Verformungseinfluss der Stabnormalkräfte N_{AB} ein:

$$s_{AB} = s' \cdot \frac{EJ_{AB}}{l_{AB}}; \quad t_{AB} = t' \cdot \frac{EJ_{AB}}{l_{AB}}$$

(1) mit s' bzw. t' $\quad s' = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon/2}{1 - (\varepsilon/2) \cdot \mathrm{cotg}\varepsilon/2} \pm \mathrm{cotg}\varepsilon/2 \right)$

und mit der Stabkennzahl ε (genauer ε_{AB})

$$(2) \quad \varepsilon = l_{AB} \cdot \sqrt{\frac{N_{AB}}{EJ_{AB}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{N_{AB}}{N_E}}$$

wobei $N_E = \pi^2 \cdot \frac{EJ_{AB}}{l^2_{AB}}$

die Knicklast des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes darstellt (Vergleichswert).

Für den Sonderfall des am Ende B gelenkig gelagerten Stabes gilt entsprechend als Stabsteifigkeit

$$(3) \quad u_{AB} = u' \cdot \frac{EJ_{AB}}{l_{AB}} \text{ mit } u' = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cdot \mathrm{cotg}\varepsilon}$$

Führt man noch die Federsteifigkeit s_F (Dimension Kraft/Längeneinheit, z. B. kN/mm) ein, bzw. den dazugehörigen Steifigkeitswert der Querfederung

$$(4) \quad \gamma_s = s_F \cdot \frac{h^3}{EJ_h}$$

mit den Bezeichnungen nach Bild 1, so schreiben sich beim Zweigelenkrahmen mit der Belastung N in jeder Stielachse die vorher erwähnten Gleichgewichtsbedingungen zu:

$$(u' + 6\beta) \cdot \varphi - u' \cdot \psi = 0$$
$$u' \cdot \varphi + (N \cdot h^2/EJ_h - u' - 0{,}5 \cdot \gamma_s) \cdot \psi = 0$$

Hierin bedeutet β eine Hilfsgrösse mit

$$(5) \quad \beta = \frac{EJ_b \cdot h}{EJ_h \cdot b}$$

Da der Riegel unbeansprucht ist, sind hier die bekannten Stabsteifigkeiten erster Ordnung einzuführen, d.h. $s'(\varepsilon = 0) \rightarrow 4$, $t'(\varepsilon = 0) \rightarrow 2$. Zudem verschwinden sowohl die Volleinspannmomente (keine Querbelastung der Riegel) als auch die äusseren waagrechten Kräfte, so dass die Gleichungen keine Belastungsglieder enthalten. Ein solches homogenes System hat, ausser dem trivialen Fall mit $\varphi = \psi = 0$, nur dann eine Lösung, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Die Ausrechnung der Knickdeterminante führt zu einer transzendenten Gleichung (daher Lösung nur durch Probieren möglich) mit den gesuchten Eigenwerten ε_{cr} (bzw. $N_{AB} \rightarrow N_{cr}$ aus Gl. 2) als Wurzeln, insbesondere mit dem massgebenden kleinsten Eigenwert.

Mit $N \cdot h^2/EJ_h = \varepsilon^2$ nach Gl. (2) ergibt sich im vorliegenden Fall die Knickdeterminante zu

$$(6) \quad (u' + 6\beta) \cdot (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_s) - 6\beta \cdot u' = 0$$

Für die Bestimmung der uns interessierenden Mindeststeifigkeit γ_s^* der seitlichen Stützung müssen wir zudem die entsprechende Determinante für die symmetrische Knicklast aufstellen (vgl. Bild 2). Mit $\varphi_{rechts} = -\varphi_{links}$ und $\psi = 0$ ergibt sich hier

$$(u' + 2\beta) \cdot \varphi = 0$$

und somit für die Bestimmung des Eigenwertes

$$(7) \quad u' = -2\beta$$

Aus der Gleichsetzung der Bedingung (6) für die antimetrische Knickform mit der obenstehenden Bedingung (7) für die symmetrische Form, d.h. durch Einsetzen von u' aus der Gl. (7) in die Gl. (6), erhält man die Mindeststeifigkeit zu

$$(8) \quad \gamma_s^* = 2\varepsilon^2_{sym} + 6\beta$$

Dabei bedeutet ε_{sym} die Kennzahl der Stiele, die sich aus der Lösung der Gl. (7) für die symmetrische Knickform ergibt. Führt man die dazugehörige Knicklänge ein, mit den Grenzwerten $l_{K,sym} = h$ für $\beta = 0$ und $l_{K,sym} \approx 0{,}7 \cdot h$ für $\beta \rightarrow \infty$, so schreibt sich die Kennzahl auch zu

$$\varepsilon_{sym} = \pi \cdot h/l_{K,sym}$$

Im Beispiel nach Bild 2 erreicht die Hilfsgrösse β den Wert 5/9. Die transzendente Gleichung (7) besitzt dann die Lösung $\varepsilon_{sym} = 3{,}4294$, entsprechend einer Knicklänge $l_{K,sym} = 0{,}9161 \cdot h$. Gleichung (8) führt daher zu einer Mindeststeifigkeit $\gamma_s^* = 26{,}85$ (vgl. Bild 2).

Bild 3 zeigt den Verlauf der Mindeststeifigkeit γ_s^* in Funktion der Hilfsgrösse β. Das gleiche Bild enthält auch die Werte γ_s, die sich aus der Bedingung einer 5mal grösseren Steifigkeit der

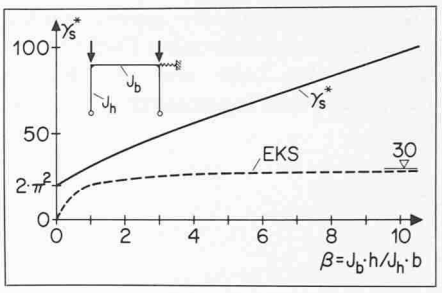

Bild 3. Mindeststeifigkeiten γ_s^* der Querstützung beim Zweigelenkrahmen

Aussteifungselemente im Vergleich mit der seitlichen Rahmensteifigkeit ergeben, wie sie in den EKS-Empfehlungen [3] oder im Vorschlag zur DIN 18 800 [4] enthalten ist (allerdings in einem anderen Zusammenhang). Da ein Zweigelenkrahmen unter einer horizontalen Einheitslast eine waagrechte Auslenkung

$$u_{H=1} = \frac{h^3}{6EJ_h} \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)$$

erfährt, führt die Bedingung einer 5mal grösseren Steifigkeit zu

$$\gamma_{s,EKS} = \frac{30}{1 + 0{,}5/\beta}$$

Eingespannter Rechteckrahmen: Knickverhalten und Mindeststeifigkeiten für die seitliche Stützung

Das Vorgehen entspricht grundsätzlich dem soeben dargestellten, wobei die Stabsteifigkeiten der Stiele nun durch die Funktion s' und t' an Stelle von u' auszudrücken sind. Wir können auf die Wiedergabe der Knickgleichungen verzichten und geben direkt die Gebrauchsformeln an:

Bestimmungsgleichung für das *antimetrische Knicken* eines eingespannten Rechteckrahmens mit seitlicher Stützung (Steifigkeitswert γ_s nach Gl. 4)

$$(9) \quad (s' + 6\beta) \cdot [\varepsilon^2 - 2(s' + t') - \tfrac{1}{2}\gamma_s] + (s' + t')^2 = 0$$

Bestimmungsgleichung für das *symmetrische Knicken* des eingespannten Rechteckrahmens (für s' vgl. Gl. 1)

$$(10) \quad s' + 2\beta = 0$$

Mindeststeifigkeit für die seitliche Stützung (antimetrische Knicklast = symmetrische Knicklast)

$$(11) \quad \gamma_s^* = \varepsilon^2 \cdot \frac{3 + 0{,}5 \cdot \varepsilon \cdot (\mathrm{cotg}\varepsilon)/\beta}{1 - (2/\varepsilon) \cdot (\mathrm{tg}\,\varepsilon/2)}$$

wobei wie bei der Gl. (8) als Stabkennzahl ε der Stiele der Wert ε_{sym} aus der Lösung von Gl. (10) einzusetzen ist.

Bild 4 zeigt die Mindeststeifigkeit γ_s^* in Funktion der Hilfsgrösse β. Zudem sind auch hier die Werte enthalten, die sich aus der Bedingung einer fünfmal grösseren Steifigkeit der Aussteifungsele-

mente ergeben. Die waagrechte Verschiebung unter einer Einheitslast beträgt jetzt

$$u_{H=1} = \frac{h^3}{24\ EJ_h}\ \frac{1{,}5\beta+1}{1{,}5\beta+0{,}25}$$

und somit ergibt sich

$$\gamma_{s,EKS} = 120\ \frac{1{,}5\beta+0{,}25}{1{,}5\beta+1}$$

Vergleiche zwischen dem Zweigelenkrahmen und dem eingespannten Rahmen

Bei Vergleich von Bild 3 mit Bild 4 fällt der unterschiedliche Verlauf der γ_s^*-Kurven auf: der Zweigelenkrahmen mit einer Kennzahl $\beta = 0$ weist eine endliche Mindeststeifigkeit auf, der mit $\beta \to \infty$ dagegen nicht. Beim eingespannten Rahmen liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt, d.h. der Rahmen mit einem starren Riegel ($\beta \to \infty$) besitzt hier eine endliche Mindeststeifigkeit.

Für diesen Rahmen mit starrem Riegel genügt es, den Stiel als Stütze mit beiderseitiger Dreheinspannung und verschieblichen Stabenden zu betrachten, wie dies aus Bild 5 hervorgeht. Beim antimetrischen Knicken weist der Stiel eine ungerade Zahl von Wendepunkten auf. Ist der Stützenkopf seitlich nicht gestützt, so verläuft die Knickfigur cosinusförmig, und die Knicklänge ergibt sich bekanntlich zu $l_K = h$.

Besitzt die seitliche Stützung die Mindeststeifigkeit γ_s^*, so müssen sich Wendepunkte an den Einspannstellen bilden, damit die Knicklänge wie beim symmetrischen Knicken $h/2$ erreicht. Bei weiter zunehmender Steifigkeit der Stützungsfeder weist schliesslich die antimetrische Knickfigur drei Wendepunkte innerhalb der Stielhöhe und eine verschwindende relative Verschiebung der zwei Stützendpunkte auf: die Knicklänge würde sich daher auf $0{,}35 \cdot h$ reduzieren.

Selbstverständlich wird sich dann nicht diese antimetrische Knickform ausbilden, sondern die symmetrische Form mit je einem Wendepunkt im Viertel der Höhe. Oberhalb von γ_s^* entsprechen die antimetrischen Knickfiguren der Fortsetzung der entsprechenden Kurve im Bild 2, die wegen ihrer Ungültigkeit gestrichelt gezeichnet ist.

Der Zweigelenkrahmen mit $\beta = 0$ stimmt mit dem bekannten Modell der beidseitig gelenkig gelagerten Stütze mit Querfederung am Kopf überein. Durch Gleichsetzen des dazugehörigen Eigenwertes $N_{cr} = s_F \cdot h$ mit der *Eulerschen Knicklast* $N_{cr} = \pi^2 EJ_h/h^2$ erhält man $\gamma_s^* = \pi^2$, bzw. $2 \cdot \pi^2$ wenn man berücksichtigt, dass beim Rahmen die Feder zwei Stiele auszusteifen hat (vgl. Bild 1 und Bild 3).

Die zwei Fälle, bei denen keine endliche Mindeststeifigkeit existiert, sind eng verwandt, handelt es sich doch jeweils um eine Kragstütze mit federnder Stützung (Einspannung oben beim Zweigelenkrahmen mit starrem Riegel, $\beta \to \infty$; unten beim eingespannten Rahmen mit sehr weichem Riegel, $\beta = 0$). Die symmetrische Knickfigur, mit einer verschwindenden Auslenkung am Stielkopf, stellt aber keine Eigenfunktion der Kragstütze dar [5]. Somit ist eine starre Stützung mit $\gamma_s^* \to \infty$ erforderlich, um diese Form als Grenzfall des antimetrischen Knickens zu erzwingen.

Schliesslich fällt beim Betrachten der Bilder 3 und 4 auf, dass beim Zweigelenkrahmen die EKS-Bedingung zu Werten $\gamma_s < \gamma_s^*$ führt, beim eingespannten Rahmen dagegen zu Werten $\gamma_s > \gamma_s^*$, abgesehen vom schmalen Bereich mit kleinen Hilfsgrössen β. Zuerst soll die Anwendung der EKS-Bedingung präzisiert werden; in der Formulierung des Entwurfes zur DIN 18 800 lautet sie ([4] Abschnitt 5.2.1):

«Wirken bei der Aufnahme von horizontalen Lasten in Stabwerkebene der Rahmen und die aussteifenden Bauteile (z.B. Wandscheiben, Verbände) zusammen, so kann der Rahmen als unverschieblich angesehen werden, wenn die Steifigkeit der Aussteifungselemente mindestens 5mal so gross ist wie die Steifigkeit des Rahmens im betrachteten Stockwerk».

Die Problemstellung ist somit anders als bei der hier untersuchten Mindeststeifigkeit der federnden Stützung im Rahmen der Verzweigungstheorie. Die seitliche Versteifung bewirkt nämlich eine weit grössere Erhöhung der Knicklasten beim Zweigelenkrahmen im Vergleich mit dem eingespannten Rahmen: Für eine Hilfsgrösse $\beta = 5/9$ erreicht das Verhältnis $N_{cr,sym}/N_{o,cr}$ den Wert 7,9 beim Zweigelenkrahmen (vgl. Bild 2) gegenüber 3,7 beim eingespannten Rahmen. Die Mindeststeifigkeit der Querfederung muss somit bei Zweigelenkrahmen, bezogen auf die Rahmensteifigkeit, höhere Werte annehmen.

Näherungsweise Berücksichtigung des unelastischen Knickbereiches

Die Verminderung der Biegesteifigkeit der Stiele im unelastischen Bereich kann bekanntlich durch Einführung eines Wertes TJ_h, mit $T < E$, abgegolten werden. Die Verzweigungslast des Rahmens mit der vollen Steifigkeit EJ_b im unbeanspruchten Riegel und TJ_h in den Stielen stellt eine brauchbare Näherung für die Traglast im Sinne der europäischen Knickspannungskurven dar. Dabei ist T nach folgender Formel (vgl. [6]) einzusetzen

$$T = E \cdot \bar{\lambda}_K^2 \cdot \sigma_K/\sigma_f$$

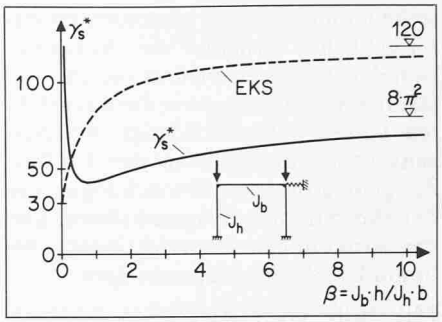

Bild 4. Mindeststeifigkeiten γ_s^* der Querstützung beim eingespannten Rahmen

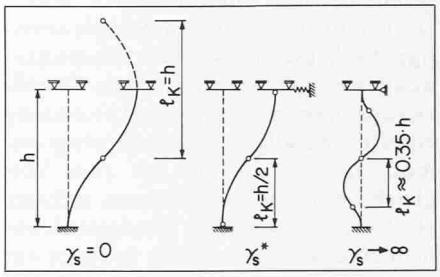

Bild 5. Druckstab mit beidseitiger Dreheinspannung; Verlauf der Eigenfunktion bei verschiedenen Steifigkeiten der Querstützung

Der Modul T muss zuerst geschätzt und durch wiederholte Näherung zur Konvergenz gebracht werden. In unserem Fall macht sich die Verkleinerung der Biegesteifigkeit auf TJ_h sowohl bei der Bestimmung der Hilfsgrösse β (Gl. (5) als auch bei der Definition des Steifigkeitswertes γ_s (Gl. (4) bemerkbar. In der Regel darf man annehmen, dass sich die Federsteifigkeit während des Knickvorganges nicht vermindert, so dass die Querstützung relativ steifer wird. Ähnliches gilt allerdings auch für die Einspannwirkung des elastisch verbleibenden Riegels, so dass bezüglich der erforderlichen Mindeststeifigkeit γ_s^* diese Einflüsse sich teilweise kompensieren.

Als Beispiel wählen wir den Zweigelenkrahmen nach Bild 2, mit einer Riegellänge von 9 m und einer Stielhöhe von 5 m; Querschnitt überall HEA 200, Fe 360. Für das Knicken um die starke Achse gilt Kurve b. Die sukzessiven Näherungen für den T-Modul führen für das symmetrische Knicken zu einer Hilfsgrösse $\beta = 2{,}3485$ (an Stelle von 5/9 im elastischen Bereich) und zu $\varepsilon_{sym} = 3{,}8864$. Aus Gl. (8) ergibt sich daher eine Mindeststeifigkeit $\gamma_s^* = 44{,}3$, d.h. $1{,}65 \cdot \gamma_{s,\ elastisch}^*$. Wegen der verminderten Stielsteifigkeit TJ_h genügt aber nach Gl. (4) eine Federsteifigkeit $s_F = 0{,}39 \cdot s_{F,\ elastisch}$.

Berücksichtigung der geometrischen und der strukturellen Imperfektionen

Die vorherigen, auf der Verzweigungstheorie basierenden Untersuchungen

stellen nur eine grobe Näherung für das tatsächliche Verhalten der Konstruktion dar. Einerseits bleiben die Querbelastung des Riegels sowie die waagrechten Lasten unberücksichtigt. Andererseits vernachlässigt man den Einfluss der geometrischen (Abweichungen von der theoretischen Tragwerksform) und der strukturellen Imperfektionen, insbesondere der Eigenspannungen.

Mit Hilfe einer *elastischen* Methode zweiter Ordnung kann man der tatsächlichen Belastungsanordnung und der geometrischen Imperfektionen relativ einfach Rechnung tragen. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Eigenspannungen und der dazugehörigen Plastifizierungen bedingt aber die Anwendung eines aufwendigen Computerprogrammes, so dass wir uns auf zwei Vergleichsbeispiele konzentrieren müssen: ein frei verschiebbarer Zweigelenkrahmen einerseits, der gleiche Rahmen mit einer weichen Querfederung andererseits.

Frei verschieblicher Zweigelenkrahmen

Die Abmessungen des untersuchten Rahmens sowie dessen Belastung gehen aus Bild 6 hervor; sie stimmen genau mit dem letzten Beispiel aus [7] überein. Insbesondere hat man sowohl Eigenspannungen in den Rahmenelementen (vgl. Bild 3 in [7]) als auch eine Anfangsauslenkung der Stielköpfe $u_{o,\,\text{Riegel}}$ = 13 mm (gleiche Richtung wie die waagrechten Kräfte) eingeführt. In der Zwischenzeit gelang es allerdings, die Konvergenz der elastoplastischen Berechnungen zweiter Ordnung zu verbessern, indem man das Fliessplateau durch einen Verfestigungsmodul von 1,5 kN/mm², d.h. E/140, ersetzt hat.

Bild 7 mit kennzeichnenden Schnittkräften und Verformungen stellt somit eine Ergänzung zu Bild 10 aus [7] dar, wobei der Lastmultiplikator für den Grenzzustand von 0,975 auf 1,03 gesteigert werden konnte. Die Abnahme des Momentes M_{21} in der linken Rahmenecke bei grossen Auslenkungen u sowie die dadurch bewirkte Erhöhung des Feldmomentes gehen jetzt deutlicher hervor. Im rechten Eckknoten 51 erreicht die plastische Biegesteifigkeit nur noch einen Bruchteil des elastischen Wertes EJ ; das Moment M_{51} übersteigt sogar leicht das plastische Moment M_p, können doch mit der Einführung eines Verfestigungsmoduls die Flanschspannungen bei scharfer Krümmung die Fliessgrenze geringfügig übersteigen.

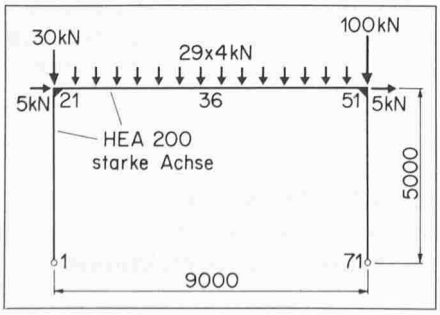

Bild 6. Den Untersuchungen zugrundegelegter Rahmen

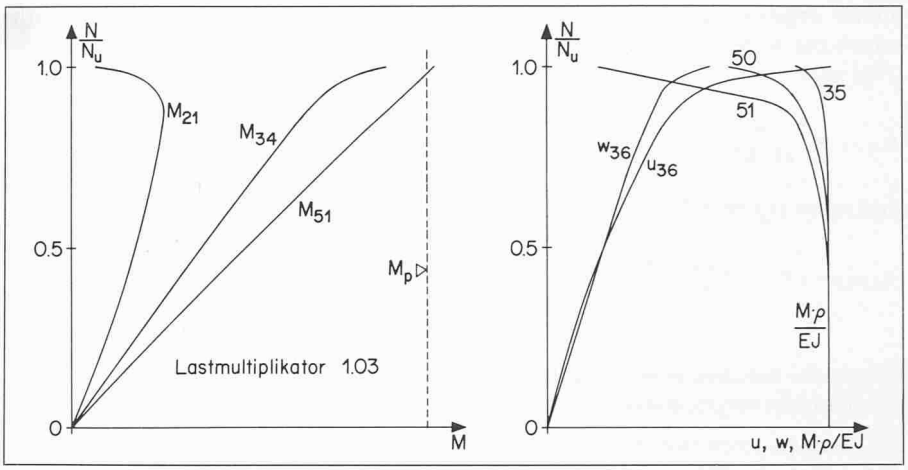

Bild 7. Frei verschiebbarer Rahmen: Verlauf der Momente und der Auslenkungen nach den elastoplastischen Berechnungen 2. Ordnung

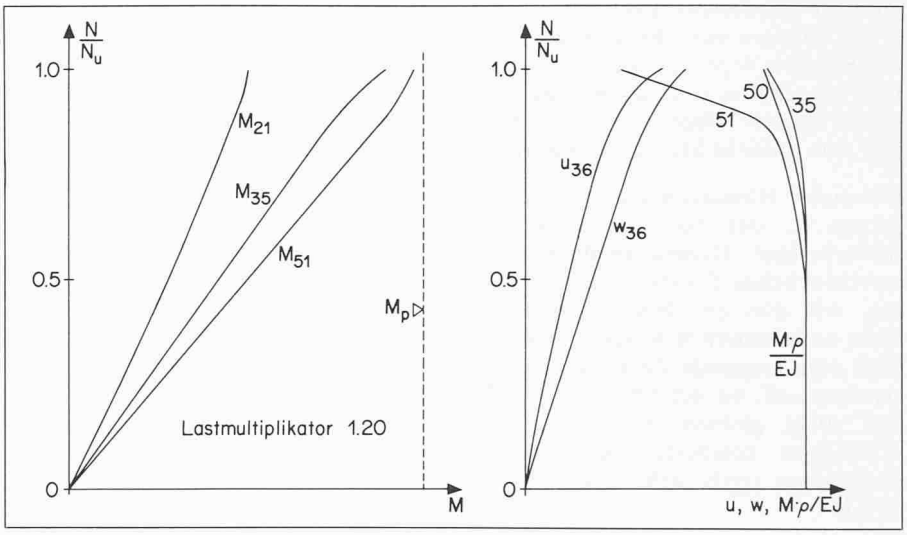

Bild 8. Quergefederter Rahmen mit γ_s = 1,7: Verlauf der Momente und der Auslenkungen nach den elastoplastischen Berechnungen 2. Ordnung

Die durch die Verfeinerung der Berechnungstechnik ermöglichte leichte Erhöhung des Lastmultiplikators ändert allerdings nichts an der Gültigkeit der in [7] wiedergegebenen Schlussfolgerungen. Insbesondere bleibt der Unterschied zum Lastmultiplikator aus der Fliessgelenktheorie erster Ordnung von 1,22 bestehend, wenn auch in reduziertem Masse.

Zweigelenkrahmen mit weicher Querstützung

Der Zweigelenkrahmen nach Bild 6 soll nun eine federnde Querstützung erhalten. Man wählt absichtlich eine geringe Federsteifigkeit s_F, die mit den Stielen aus HEA 200 nach G1. (4) zu einem Steifigkeitswert von rund 1,7 führt, d.h. 6 Prozent der Mindeststeifigkeit aus Bild 2 (bzw. 16 Prozent, falls man die unelastische, den EKS-Knickspannungskurven entsprechende Stielsteifigkeit TJ_h einführt).

Die Verzweigungslast, die man allenfalls für die Ermittlung des Vergrösserungsfaktors zweiter Ordnung $1/(1 - N^*/N_{cr})$ benötigt, beträgt den 5,72fachen Wert der Belastung aus Bild 6. Im elastischen Bereich bleibt somit der Verformungseinfluss bescheiden, wie dies aus Bild 8 hervorgeht: bis zum Eintreten der ersten Plastifizierungen im Bereich des Eckknotens 51 verlaufen sowohl die Momente als auch die Auslenkungen fast linear. Bei höheren Lasten nimmt jedoch das Eckmoment M_{51} wesentlich langsamer und das Feldmoment entsprechend schneller zu. Zudem bleibt am Schluss, d.h. bei fortschreitenden waagrechten Auslenkungen, das linke Eckmoment M_{21} praktisch konstant.

Ein wesentlicher Unterschied zum Bild 7 besteht somit nicht, wenn auch beim quergefederten Rahmen die Tendenzwenden weniger ausgeprägt sind. Wegen der schlechten Konvergenz konnte aus Kostengründen der Lastmultiplika-

tor nicht über 1,2 gesteigert werden. Dieser Wert entspricht wahrscheinlich nicht ganz dem wahren Tragwiderstand der Rahmenkonstruktion, wenn auch der Momentenausgleich zwischen der Ecke 51 und dem Feld schon weit fortgeschritten ist.

Die soeben erwähnten numerischen Schwierigkeiten sowie die deutliche Tendenz zum Momentenausgleich haben dazu geführt, dass man für die weiteren Untersuchungen die Fliessgelenktheorie zweiter Ordnung verwendet hat.

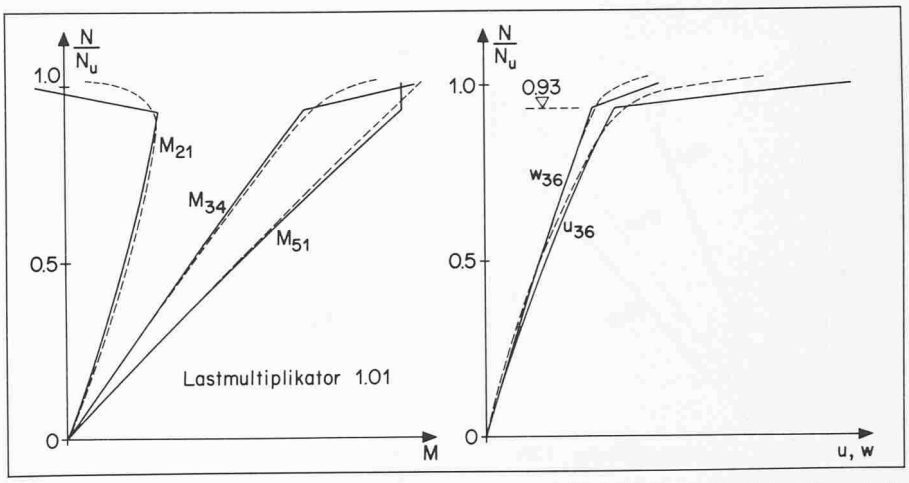

Bild 10. Frei verschiebbarer Rahmen; Verlauf der Momente und der Auslenkungen nach der Fliessgelenktheorie 2. Ordnung

Angenäherte Untersuchungen nach der Fliessgelenktheorie zweiter Ordnung

Besonderheiten des verwendeten Verfahrens

Bei der Fliessgelenkmethode werden bekanntlich die Plastifizierungen, die tatsächlich in einer gewissen Zone auftreten, in einem Punkt, dem Fliessgelenk, konzentriert. Bis zum Erreichen des plastischen Biegewiderstandes in einem solchen Knoten verhält sich das System vollständig elastisch; darüber hinaus wirkt der Punkt als Gelenk, d.h., das Biegemoment nimmt nicht mehr zu.

Im Rahmen einer Theorie zweiter Ordnung sind selbstverständlich die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System anzuschreiben. Für die folgenden Untersuchungen hat man das Computerprogramm BARBU [8] in seiner ursprünglichen, rein elastischen Version benützt. Die Berechnung erfolgt zweckmässigerweise «Schritt für Schritt»: ausgehend vom elastischen System lässt man zunächst die Belastung bis zum Erreichen des plastischen Biegewiderstandes in einem Knoten, d.h. bis zur Bildung des ersten Fliessgelenkes ansteigen. Der Belastungszuwachs wird anschliessend, wieder im Rahmen einer elastischen Berechnung zweiter Ordnung, an einem System mit dem ersten Fliessgelenk angebracht, bis sich das zweite einstellt, usw.

Dieses bei der Fliessgelenktheorie erster Ordnung nicht übliche Verfahren ist für die Verformungstheorie angezeigt: Bild 9 zeigt nämlich, dass bei einem n-fach statisch unbestimmten Rahmen der Grenzwiderstand nicht unbedingt mit der Bildung des letzten Fliessgelenkes, d.h. mit dem Eintreten einer kinematischen Kette, übereinstimmen muss. Die dazugehörige Last kann nämlich im unstabilen Bereich, d.h. auf dem abfallenden Ast der Last-Auslenkungskurve, liegen und somit eine unwirtschaftliche Lösung darstellen (vgl. z.B. [9]).

Bei dieser schrittweisen Ermittlung des Tragwiderstandes nach der Fliessgelenktheorie zweiter Ordnung treten folgende Schwierigkeiten auf:

- Die plastischen Momente in den Rahmenelementen, insbesondere in den Stielen, hängen von den dazugehörigen Normalkräften ab, die mit dem Lastmultiplikator zunehmen. Bei der Bildung des ersten Fliessgelenkes z.B. hat die Normalkraft noch nicht ihren dem Tragwiderstand entsprechenden Endwert erreicht: das plastische Moment muss somit beim Belastungszuwachs leicht abnehmen. Für die folgenden Untersuchungen hat man die Momente in den Fliessgelenken jeweils sofort mit dem Endwert der Normalkraft ermittelt. Diese Übereinstimmung konnte nur durch eine wiederholte Schätzung erzielt werden.
- Der Einfluss der Eigenspannungen wird bei der Anwendung der Fliessgelenktheorie nicht direkt berücksichtigt. Ähnliches gilt für die Wirkung der Länge der teilplastischen Bereiche. Man kann aber beide Faktoren näherungsweise durch eine Erhöhung der geometrischen Imperfektionen erfassen. Ein ähnlicher Gedanke liegt der Einführung der Ersatzexzentrizität e_0 für den Nachweis auf Druck und Biegung nach der Norm SIA 161, Ziffer 3 064, vor. Für die folgenden Untersuchungen wurde somit die waagrechte Anfangsauslenkung der Stielköpfe auf $u_{0,\,\text{Riegel}} = h/200 = 25$ mm erhöht (vgl. [3] 5.9.3.1 sowie [4] 2.5).
- Die sukzessive Einführung von Fliessgelenken bedingt an sich eine Änderung der Steifigkeitsmatrix. Im vorliegenden Fall hat man darauf verzichtet und nacheinander verschiedene Systeme betrachtet, welche, abgesehen vom ersten, Gelenke mit vorgegebenen Momenten enthalten.

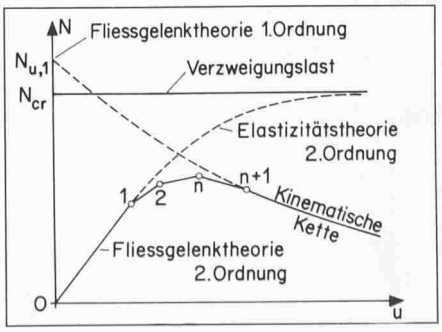

Bild 9. Mögliche Lastverformungskurve nach der Fliessgelenktheorie 2. Ordnung

Andere Schwierigkeiten mehr grundsätzlicher Natur sollen in den dazugehörigen Abschnitten erwähnt werden.

Kontrollrechnungen

Wir wollen zuerst die Brauchbarkeit der Fliessgelenktheorie zweiter Ordnung an Hand der zwei soeben behandelten Beispiele überprüfen.

Für den frei *verschiebbaren* Rahmen sind die Hauptergebnisse im Bild 10 zusammengefasst, wobei zum Vergleich die Schnittkräfte und die Verschiebungen gemäss den elastoplastischen Berechnungen (Bild 7) gestrichelt wiedergegeben sind. Die Übereinstimmung ist befriedigend, dies sowohl für den Verlauf der Momente und der Verformungen als auch für die Höhe des Lastmultiplikators (Differenz nur 2 Prozent, wobei die Fliessgelenktheorie eine Näherung auf der sicheren Seite liefert).

Für den Rahmen mit *weicher Querfederung*, $\gamma_s = 1{,}7$, soll zuerst der Vorgang bis zur Bildung des zweiten Fliessgelenkes, etwa in Riegelmitte, verfolgt werden. Bild 11 beweist, dass die Ergebnisse der Fliessgelenktheorie zweiter Ordnung vernünftig mit denen aus den elastoplastischen Berechnungen (gestrichelt) übereinstimmen. Der dem Eintreten des zweiten Fliessgelenkes entsprechende Multiplikator ist mit 1,25 leicht höher als der Wert von 1,2 aus Bild 8, wobei, wie bereits erwähnt wurde, Konvergenzschwierigkeiten die Berechnungen für einen Lastzuwachs über 1,2 hinaus verunmöglicht haben.

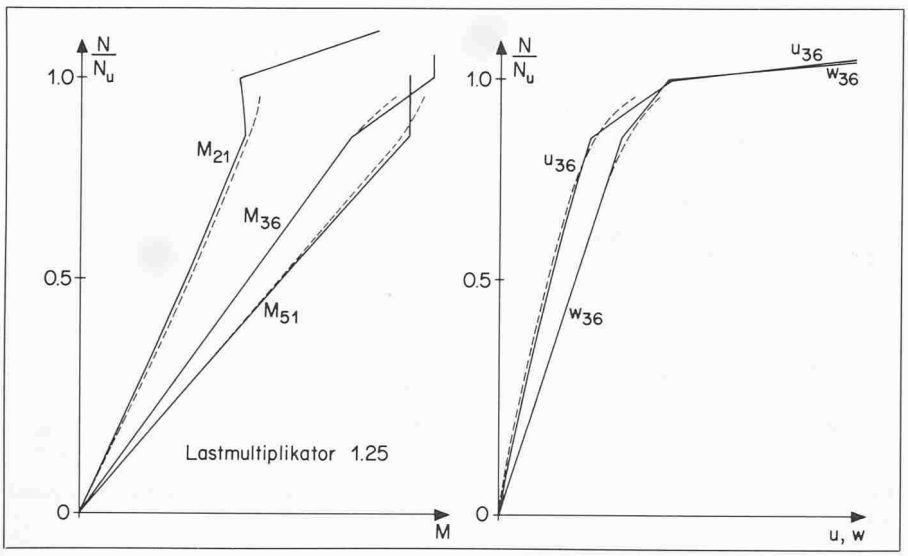

Bild 11. Quergefederter Rahmen mit $\gamma_s = 1{,}7$; Verlauf der Momente und der Auslenkungen nach der Fliessgelenktheorie 2. Ordnung

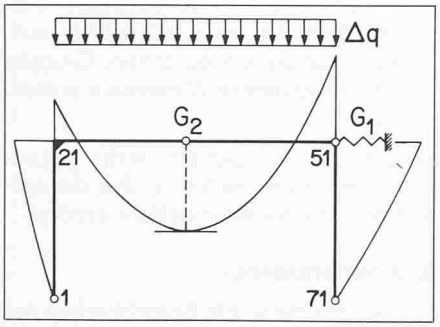

Bild 12. Quergefederter Rahmen mit $\gamma_s = 1{,}7$; Tragsystem nach der Bildung des zweiten Fliessgelenkes

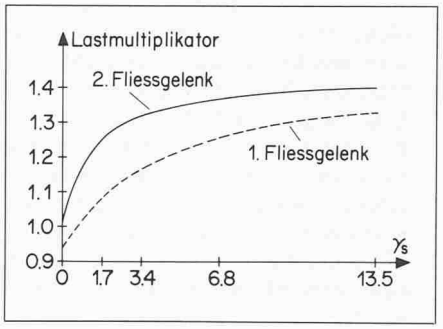

Bild 14. Lastmultiplikatoren des quergefederten Rahmens in Abhängigkeit vom Steifigkeitswert γ_s

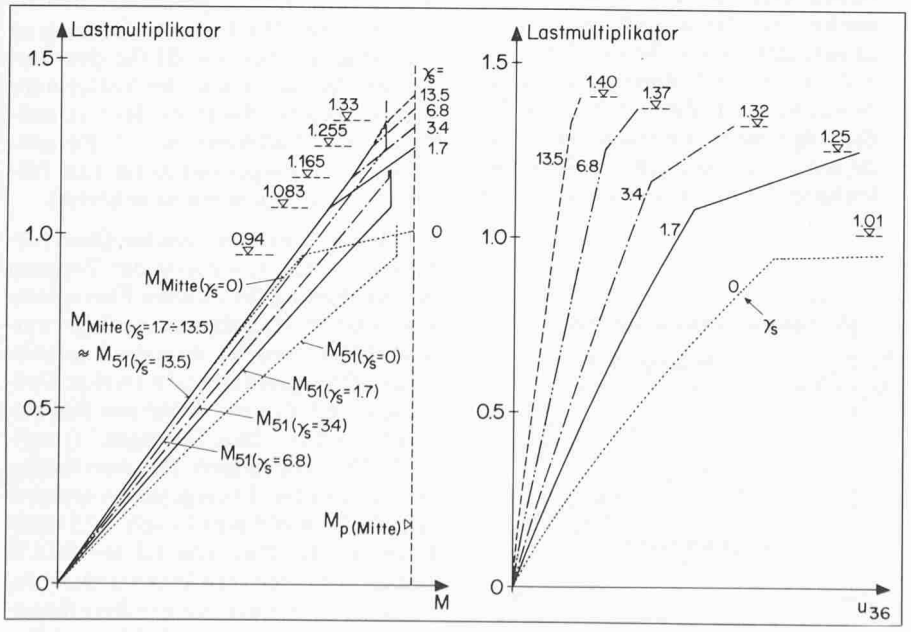

Bild 13. Quergefederte Rahmen mit verschiedenen Steifigkeitswerten γ_s; Vergleich des Verlaufes der Momente und der Auslenkungen nach der Fliessgelenktheorie

Mit der Bildung des zweiten Fliessgelenkes entsteht noch keine kinematische Kette: nach Bild 12 besteht nun das Tragsystem für den Belastungszuwachs Δ_q aus dem einfachen Balken G_1-G_2 und aus dem am Fuss gelenkig gelagerten Halbrahmen 1-21-G_2, der ohne waagrechte Stützung unstabil wäre. Mit dieser ungewöhnlichen Tragwirkung nimmt aber die Federkraft bzw. die Riegelverschiebung u_{36} äusserst rasch zu und erreicht schliesslich den unzumutbaren Wert von rund $h/9$! Die dazugehörigen Gelenkrotationen sind sehr gross. Beim Eckmoment M_{21} geht die nach der Bildung des ersten Fliessgelenkes einsetzende Tendenz zu einer Abnahme in einer abrupten Steigerung hinaus.

Die M-Fläche im Bild 12 beweist zudem, dass das Gelenk G_2 beim Anbringen von Δq in Richtung des Eckpunktes 51 wandern muss, weil bei gleichbleibender Lage die Momente des einfachen Balkens G_1-G_2 im Bereich G_2 höher sein müssten als im Fliessgelenk G_2 selber, d.h. grösser als M_p! Die Tragwirkung nach der Bildung des zweiten Gelenkes ist somit praktisch einer Unstabilität im Sinne von Bild 9 gleichzusetzen und wird deshalb für die weiteren Untersuchungen nicht mehr verfolgt.

Nebenbei sei bemerkt, dass die Verhältnisse aus Bild 12 auch für einen unverschiebbaren Rahmen gelten, falls Zwängungsmomente, z.B. aus Auflagersenkungen, eine Bildung der Fliessgelenke in der Reihenfolge G_1, G_2 erzwingen (in diesem Zusammenhang vgl. auch [10]).

Einfluss der Steifigkeit der Querstützung

Um den Einfluss der Grösse der Federsteifigkeit auf das Tragverhalten aufzuzeigen, wurde das System nach Bild 6 nicht nur für einen Steifigkeitswert γ_s = 1,7 (Bild 11), sondern auch für 3,4, 6,8 und 13,5 untersucht. Bild 2 zeigt, dass bei Annahme eines rein elastischen Verhaltens der Stiele diese γ_s-Werte unterhalb der Mindeststeifigkeit liegen. Mit der Einführung der unelastischen Stielsteifigkeit TJ_h, entsprechend der EKS-Knickspannungskurven, übersteigt dagegen die höchste berücksichtigte Steifigkeit den zur Mindeststeifigkeit gehörenden Wert um rund 30 Prozent.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind im Bild 13 zusammengefasst. Der Verlauf der Eckmomente M_{51} hängt von der seitlichen Auslenkung u und somit vom γ_s-Wert ab. Ähnliches gilt für das entsprechende plastische Moment, nimmt doch die den Biegewiderstand vermindernde Normalkraft mit dem Lastmultiplikator zu. Das Feldmoment zeigt dagegen bis zur Bildung des Fliessgelenkes im Eckpunkt 51 keinen

nennenswerten Einfluss der Federsteifigkeit. Beim weiteren Belastungszuwachs nimmt aber M_{Feld} um so rascher zu, je weicher die Querfederung ist.

Der Verlauf der waagrechten Riegelauslenkung u spricht für sich und braucht keine Kommentare.

Links im Bild 13 sind die Lastmultiplikatoren eingetragen, die der Bildung des ersten Fliessgelenkes (Eckpunkt 51) entsprechen, rechts die beim Erreichen des Tragwiderstandes (Bildung des Gelenkes im Feld, unter Vernachlässigung einer weiteren Laststeigerung). Im Bild 14 sind zudem die gleichen Werte in Funktion der Steifigkeitswerte γ_s dargestellt. Die mögliche Erhöhung des Tragwiderstandes ist im Bereich hoher γ_s-Werte gering.

Beim Grenzfall des unverschieblichen Rahmens führt die klassische Fliessgelenktheorie erster Ordnung zu einem Lastmultiplikator von 1,46. Unter Annahme einer durch den Verformungseinfluss bedingten Reduktion mit dem Faktor $1/(1 - N^*/N_{cr})$ und mit einem Eigenwert von 25,0 bezogen auf die Lasten nach Bild 6, beträgt der abgeminderte Lastmultiplikator rund 1,38 für eine starre Querstützung. Um einen solchen Wert zu gewährleisten, ist gemäss Bild 14 ein γ_s-Wert von knapp 10 erforderlich, der sehr gut mit den Ergebnissen der Verzweigungstheorie unter Berücksichtigung der unelastischen Stielsteifigkeit TJ_h übereinstimmt.

Festigkeitsnachweis für die seitliche Stützung

Die seitliche Stützung übernimmt folgende Kräfte:

- Einen Anteil an der waagrechten Belastung, der in brauchbarer Näherung aus dem Verhältnis der Steifigkeit der Querstützung zur Gesamtsteifigkeit ermittelt werden darf (mit einer dem Kehrwert der vorher berechneten Auslenkung $u_{H=1}$ entsprechenden Rahmensteifigkeit).
- Die Ablenkungskräfte aus Verformungseinfluss (Schiefstellung der Stiele usw.).

Subtrahiert man von den Federkräften, die sich aus der Fliessgelenkberechnung zweiter Ordnung ergeben, den soeben erwähnten Anteil der waagrechten Belastung, so verbleiben folgende stabilisierende Kräfte, die in Prozent der Gesamtvertikallast angegeben sind:

γ_s	1,7	3,4	6,8	13,5
%	2,0	1,9	1,5	1,2

Die mit $\gamma_s = 1{,}7$ durchgeführten elastoplastischen Berechnungen zweiter Ordnung ergeben allerdings nur 1,2 Prozent statt 2,0 Prozent, sind doch die Horizontalverschiebungen beim Erreichen des gerechneten Tragwiderstandes kleiner (vgl. die Bilder 8 und 11).

Bei einer praktischen Bemessung wird man wohl alle äusseren Lasten der Querstützung zuweisen und zudem die Wirkung der geometrischen Imperfektionen berücksichtigen. Man bleibt damit auf der sicheren Seite.

Schlussfolgerungen und Ausblick

Die vorgestellten Berechnungsergebnisse bestätigen die Brauchbarkeit der Steifigkeitskriterien, die sich aus der Anwendung der Verzweigungstheorie ergeben, besonders wenn man das unelastische Verhalten der Stiele berücksichtigt. Für den Festigkeitsnachweis der Querstützung sind meistens die äusseren waagrechten Lasten massgebend, so dass eine sehr genaue Erfassung der stabilisierenden Kräfte kaum erforderlich ist.

Schliesslich wollen wir kurz auf die tatsächliche Ausbildung von seitlich gestützten Rahmen zurückkommen, d.h. auf die durch eine Dachscheibe und durch Wandscheiben räumlich stabilisierten Hallensysteme. Bei einer solchen Anordnung kann man zuerst die folgenden *zwei Grenzfälle* betrachten:

- Praktisch starre Dachscheibe und nachgiebige Wandscheiben. Die Tragwirkung entspricht sehr gut unserem vereinfachten Modell. Bei der Ermittlung der für die einzelnen Rahmen einzusetzenden Federsteifigkeit ist selbstverständlich die Anzahl der durch eine Wandscheibe stabilisierten Tragebenen zu berücksichtigen.
- Verformbare, durch starre Wandscheiben gestützte Dachscheibe. Durch die Annahme einer sinusförmigen Verteilung der Belastung sowie der Stützkräfte der Rahmen auf die Dachscheibe kann man auch hier das räumliche Tragverhalten mit dem ebenen Modell beschreiben. Greifen nämlich die sinusförmig verteilten Stützkräfte der Rahmen an der Dachscheibe an (mit $H = 1$ in Hallenmitte), so ergibt sich wegen der Sinusaffinität die einzusetzende Federsteifigkeit des Ersatzsystems als Kehrwert der max. Durchbiegung der Dachscheibe. Man verbessert die Genauigkeit, wenn man die Belastung mittels einer *Fourier-Analyse* zerlegt; dabei können für die höheren Harmonischen, weil sie nur einem Bruchteil der vollen Dachscheibenspannweite entsprechen, die Rahmen als unverschiebbar betrachtet werden.

Im allgemeinen Fall ermöglicht die Betrachtung der Grenzfälle mindestens eine Abschätzung des Ausmasses der seitlichen Stützung. Es ist zudem vorgesehen, auf diesem Gebiet weitere Untersuchungen durchzuführen.

* * *

A. Piller, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baustatik und Stahlbau, hat die Computerberechnungen durchgeführt und durch seine Anregungen wesentlich bei der Ausarbeitung der Untersuchungen mitgewirkt.

Literaturangaben

[1] *Stüssi, F.*: «Grundlagen des Stahlbaues». Springer-Verlag 1971, S. 428

[2] *Chwalla, E.*: «Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen». Stahlbau-Verlag, Köln 1959

[3] European Recommendations for Steel Construction. EKS 1978

[4] Stabilitätsfälle im Stahlbau. Knicken von Stäben und Stabwerken. Normvorlage DIN 18 800, Juli 1979

[5] *Bürgermeister G., Steup, H., Kretzschmar, H.*: «Stabilitätstheorie», Teil 1, S. 26. Akademie-Verlag, Berlin 1966

[6] Einführung in die Norm SIA 161 (1979) Stahlbauten. Autographie zum Fortbildungskurs «Baustatik und Stahlbau», Publ. Nr. 79-1, ETH Zürich

[7] *Dubas, P.*: «Tragwiderstand von Stäben und Stabsystemen unter Druck und Biegung». Schw. Ingenieur und Architekt, 1979, S. 609

[8] *Rouvé, B.*: «Calcul du comportement postcritique des plaques raidies par la méthode des éléments finis»; Baustatik und Stahlbau, Publ. Nr. 76-1, ETH Zürich

[9] *Vogel, U.*: «Methoden und Kriterien für eine wirtschaftliche Bemessung von Stahlrahmen bei Anwendung des Traglastverfahrens.» Theorie und Berechnung von Tragwerken. Festschrift O. Steinhardt, Springer-Verlag 1974, S. 262

[10] *Oxfort, J.*: «Zur Berücksichtigung von Zwängungsspannungen in Rahmentragwerken aus Baustahl». Der Stahlbau, 1980, S. 110

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *P. Dubas*, Institut für Baustatik und Stahlbau, ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich