

Umrechnungen konischer (und zylindrischer) Schnitte von verstellbaren Turbomaschinen auf ebene Schnitte und umgekehrt

Autor(en): **Flatt, René**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **91 (1973)**

Heft 24

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-71904>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Umrechnung konischer (und zylindrischer) Schnitte von verstellbaren Turbomaschinen-Schaufeln auf ebene Schnitte und umgekehrt

DK 62-135:62-253.5

Von René Flatt, dipl. Ing. EPFL, Chavannes-près-Renens

Beim Entwurf der Schaufelung von Turbomaschinen axialer (oder halb-axialer) Bauart sowie bei der Auswertung von strömungstechnischen Versuchsergebnissen sind konische Schaufelschnitte von besonderem Interesse. Für die Herstellung von Schaufeln hingegen werden meistens ebene, parallel zueinander stehende Schnitte benötigt. Für die damit verbundene Umrechnung («konisch-eben») der Schaufelgeometrie wird ein Rechenverfahren vorgeschlagen, in welchem der Begriff «Tangentenband» vorkommt. Dieses Verfahren ist umkehrbar und lässt sich deshalb auch bei der Umrechnung «eben-konisch» anwenden. Ein solcher Fall tritt bei der Berechnung des Betriebsverhaltens einer vorgegebenen oder projektierten Schaufelung (mit oder ohne verstellbaren Schaufeln) auf.

1. Einleitung

Beim Entwurf der Schaufelung einer Turbomaschine axialer (oder halbaxialer) Bauart, sowie bei der Auswertung von strömungstechnischen Versuchsergebnissen sind konische Schaufelschnitte von besonderem Interesse, da sie der (in Umfangsrichtung gemittelten) Strömung verhältnismässig gut angepasst werden können. Ausserdem sind konische Schaufelschnitte abwickelbar und lassen sich mittels konformer Abbildung in ein ebenes, zweidimensionales «Vergleichsgitter» umrechnen.

Für die Herstellung von Schaufeln hingegen werden meistens ebene Schnitte verwendet, die senkrecht zur «Schaufelachse» (einer zur Maschinenachse beliebig orientierten Geraden) liegen. Man benötigt also eine Umrechnung der Schaufelgeometrie (Schaufelkontur; Tangenten zu den «äquivalenten Mittellinien» längs der Ein- und Austrittskanten) von konischen Schnitten auf ebene. Die entgegengesetzte Umrechnung (ebene auf konische Schnitte) wird bei der Berechnung einer Stufen- oder Maschinencharakteristik verwendet. Für verstellbare Schaufeln wird eine Drehung um die Schaufelachse miteinbezogen. Zylindrische Schnitte werden als Grenzfälle konischer Schnitte mitberücksichtigt.

Die vorgeschlagene Umrechnungsmethode ist ein numerisches Verfahren, das sich auf beliebige Schaufelformen (namentlich auch Schaufeln mit grossen Sehnenlängen wie zum Beispiel solche für Kaplan-turbinen) anwenden lässt. Falls die Form oder der Staffelungswinkel der Schaufelelemente stark mit dem relativen Nabenabstand variieren, muss die Anzahl Schaufelschnitte entsprechend hoch gewählt werden.

Will man einer Bemessung bestimmte Profiltypen (wie zum Beispiel NACA-, Doppelkreisbogen- oder Mehrkreisbogen-Profile) zugrunde legen, wird empfohlen, diese im ebenen kartesischen Koordinatensystem $E_1(x, y)$ (siehe Abschnitt 2, Bild 1) festzusetzen.

Bei vielen mathematisch bestimmten Profilen wird auch eine (von der geometrischen Mittellinie abweichende) sog. «äquivalente Mittellinie» angegeben. (Diese sollte gleichfalls im Koordinatensystem $E_1(x, y)$ bestimmt werden.) Deren Hauptzweck besteht darin, an den Ein- bzw. Austrittskanten je eine einfache und sinnvolle Referenzrichtung (γ_1 bzw. γ_2) festzulegen (Bilder 1 und 2). Anhand dieser Grössen können der Krümmungswinkel ($\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$) und der Staffelungswinkel ($\bar{\gamma} = \frac{1}{2} [\gamma_1 + \gamma_2]$) berechnet werden. Die Winkel γ_1 und γ_2 dienen ebenfalls der Festlegung der Winkelüberbreitung (der Strömung):

$$\delta\beta_1 = \beta_1 - \gamma_1 \text{ bzw. } \delta\beta_2 = \beta_2 - \gamma_2$$

(mit β_1 bzw. β_2 = Strömungswinkel am Ein- bzw. Austritt).

Die genaue Beschreibung der Schaufelgeometrie umfasst im wesentlichen drei Arten von Angaben:

- a) Die Art und Lage der Schnittflächen
- b) Die Schaufelkontur in diesen Schnittflächen, wobei diese Kontur direkt durch eine Serie von Punkten oder mittels deren mathematischen Formulierung (die meistens von sog. «Schaufelparametern» ausgeht) angegeben werden kann

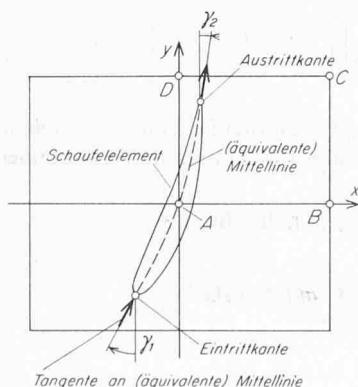


Bild 1 (links). Kartesisches Koordinatensystem $E_1(x, y)$, konforme Abbildung von Bild 2

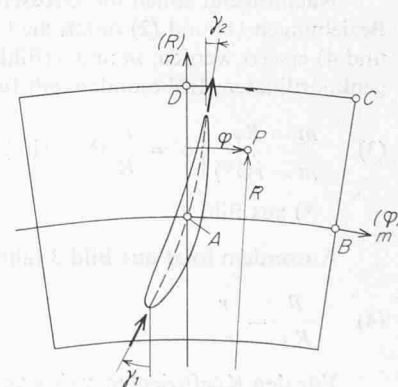


Bild 2 (rechts). Polares Koordinatensystem $E_2(R, \varphi)$, Abwicklung des konischen Schnittes von Bild 1

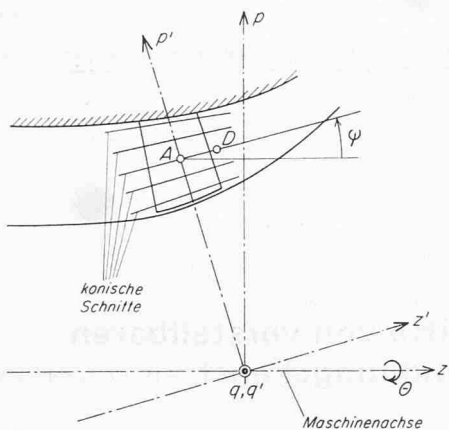


Bild 3 (links). Zylindrisches Koordinatensystem $E_3 (z, r, \Theta)$, konische Schnitte mit Steigungswinkel ψ

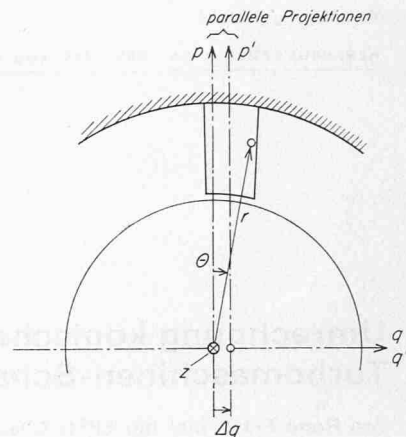


Bild 4 (rechts). Kartesisches Koordinatensystem $E_4 (z, p, q)$

c) Die Tangenten an die «äquivalenten Mittellinien» längs den Ein- und Austrittskanten

2. Beschreibung der verschiedenen Koordinatensysteme

Um die Lage der korrespondierenden Punkte in den *konischen Schnitten*, deren Abwicklungen und den zugeordneten konformen Abbildungen zu ermitteln, werden die drei Koordinatensysteme $E_1 (x, y)$, $E_2 (R, \varphi)$ und $E_3 (z, r, \Theta)$ (Bilder 1 bis 3) eingeführt. Die Koordinatensysteme $E_4 (z, p, q)$, $E_5 (z', p', q')$ und $E_6 (z'', p'', q'')$ (Bilder 4 bis 6) dienen zur Beschreibung der *ebenen Schnitte*.

3. Koordinatentransformation

3.1 Konforme Abbildung des Kreisausschnittes von E_2 (Bild 2) auf E_1 (Bild 1)

Zwischen x und φ besteht eine Proportionalität:

$$(1) \quad x = \left(\frac{x_B}{\varphi_B} \right) \varphi$$

Bei einer konformen Abbildung müssen sich unendlich kleine Quadrate gleichfalls in unendlich kleine Quadrate transformieren. Folglich muss gelten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dR}{R d\varphi} \\ \text{Aus (1) } dx &= \left(\frac{x_B}{\varphi_B} \right) d\varphi \end{aligned} \right\} dy = \left(\frac{x_B}{\varphi_B} \right) \frac{dR}{R}$$

oder nach Integration

$$(2) \quad y = \left(\frac{x_B}{\varphi_B} \right) \ln \left(\frac{R}{R_A} \right)$$

3.2 Übergang von E_1 (Bild 1) auf E_3 (Bild 3)

Nachfolgend sollen die Grössen R und φ (Bild 2) in den Beziehungen (1) und (2) durch die Grössen r und Θ (Bilder 3 und 4) ersetzt werden. m und n (Bild 2) sind orthogonale Längenkoordinaten. Insbesondere gilt für $n = \text{konst}$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} m &= R\varphi \\ m &= r\Theta^* \end{aligned} \right\} \varphi = \frac{r}{R} \Theta = \sin \psi \cdot \Theta$$

*) aus Bild 4

Ausserdem folgt aus Bild 3 (ähnliche Dreiecke)

$$(4) \quad \frac{R}{R_A} = \frac{r}{r_A}$$

Für den Koeffizienten x_B/φ_B von (1) und (2) folgt aus (3)

$$(5) \quad \frac{x_B}{\varphi_B} = \frac{x_B}{\sin \psi \cdot \Theta_B}$$

Gln. (1), (3) und (5) ergeben

$$(6a) \quad x = \frac{x_B}{\Theta_B} \Theta$$

Gln. (2), (4) und (5) ergeben

$$(6b) \quad y = \frac{x_B}{\Theta_B} \frac{1}{\sin \psi} \ln \frac{r}{r_A}$$

Gl. (6b) versagt im Fall $\psi \ll 1$. Deshalb sei hierfür eine Näherungsformel angegeben:

$$y = \frac{x_B}{\Theta_B} \frac{\ln \left(1 + \frac{r - r_A}{r_A} \right)}{\sin \psi} \cong \frac{x_B}{\Theta_B} \frac{\left(\frac{r - r_A}{r_A} \right)}{\left(\frac{r - r_A}{z - z_A} \right)}$$

$$(7) \quad y \cong \left(\frac{x_B}{r_A \Theta_B} \right) (z - z_A) \quad \text{gültig für } \psi \ll 1.$$

Die Beziehungen (6) können natürlich auch umgekehrt werden:

$$(8a) \quad \Theta = \frac{1}{(x_B/\Theta_B)} x$$

$$(8b) \quad r = r_A \exp \left[\left(\frac{x_B}{\Theta_B} \frac{1}{\sin \psi} \right)^{-1} y \right]$$

Den Zusammenhang mit der zylindrischen Koordinate z erhält man über den Referenzpunkt $A (z_A, r_A, \Theta_A)$:

$$\tan \psi = \frac{r - r_A}{z - z_A} = \frac{r_A (r/r_A - 1)}{z - z_A},$$

wovon mit (8b)

$$(8c) \quad z = z_A + \frac{r_A}{\tan \psi} \left\{ \exp \left[\left(\frac{x_B}{\Theta_B} \frac{1}{\sin \psi} \right)^{-1} y \right] - 1 \right\}$$

Ähnlich wie (6b) versagt auch (8c) im Fall $\psi \ll 1$. Die für diesen Bereich gültige Näherungsformel wird aus (7) gewonnen:

$$(9) \quad z \cong z_A + \left(\frac{x_B}{r_A \Theta_B} \right)^{-1} y \quad \text{gültig für } \psi \ll 1$$

3.3 Übergang von E_3 (Bild 3) auf E_4 (Bild 4)

$$(10a) \quad \begin{aligned} p &= r \cos \Theta \\ q &= r \sin \Theta \end{aligned}$$

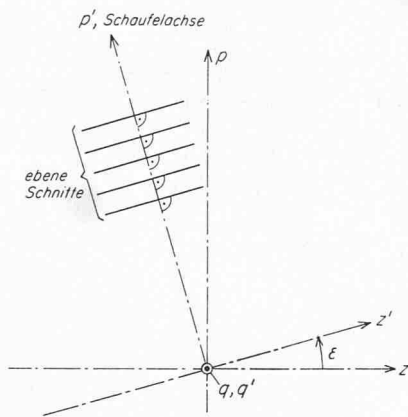


Bild 5. Kartesisches Koordinatensystem $E_5 (z', p', q')$, ebene Schnitte (senkrecht zur Schaufelachse p')

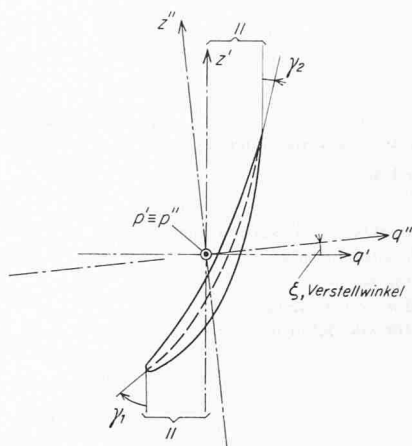


Bild 6. Kartesisches Koordinatensystem $E_6 (z'', p'', q'')$, ebener Schnitt

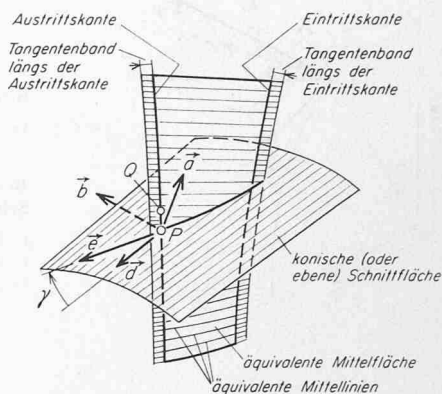


Bild 7. Schnitt durch «äquivalente Mittelfläche»

und umgekehrt

$$(10b) \quad r = \sqrt{p^2 + q^2} \\ \Theta = \arctan(q/p)$$

3.4 Übergang von E_4 (Bild 4) auf E_5 (Bild 5)

$$z' = z \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon \\ (11a) \quad p' = -z \sin \varepsilon + p \cos \varepsilon \\ q' = q - \Delta q$$

und umgekehrt

$$z = z' \cos \varepsilon - p' \sin \varepsilon \\ (11b) \quad p = z' \sin \varepsilon + p' \cos \varepsilon \\ q = q' + \Delta q$$

Die Schaufelachse ist gegeben durch:

$$q' = z' = 0$$

3.5 Übergang von E_5 auf E_6 (Bilder 5 und 6)

$$z'' = z' \cos \zeta - q' \sin \zeta \\ (12a) \quad p'' = p' \\ q'' = z' \sin \zeta + q' \cos \zeta$$

und umgekehrt

$$z' = z'' \cos \zeta + q'' \sin \zeta \\ (12b) \quad p' = p'' \\ q' = -z'' \sin \zeta + q'' \cos \zeta$$

Die Schaufelachse ist gegeben durch:

$$q'' = z'' = 0$$

Bemerkung: In der Praxis treten oftmals folgende Vereinfachungen auf:

a) Keine Verstellbarkeit der Schaufeln ($\zeta = \text{konst} = 0$), woraus erfolgt:

$$z'' = z', \quad p'' = p', \quad q'' = q'.$$

b) Schaufelachse p' führt durch z ($\Delta q = 0$) und steht senkrecht auf z ($\varepsilon = 0$), woraus folgt:

$$z' = z, \quad p' = p, \quad q' = q.$$

4. Winkeltransformation

Eine Berechnungsmethode der γ -Winkel für den Spezialfall von zylindrischen Schnitten wurde bereits in [2] angegeben. Das nachfolgend beschriebene Verfahren gilt auch für konische und ebene Schnitte.

Die Schar der «äquivalenten Mittellinien» der konischen sowie auch der ebenen Schaufelschnitte bilden ein und dieselbe Fläche, die in der Folge als «äquivalente Mittelfläche» bezeichnet sei (Bild 7). Man stelle sich die Tangenten an die vorgegebene «äquivalenten Mittellinien» längs der Schaufelkanten als sehr kurze Vektoren $\vec{t}$ vor. Die unendliche Schar von $\vec{t}$ -Vektoren bilden eine Art schmales, räumlich verwundenes «Tangentenband», welches tangent an die «äquivalente Mittelfläche» ist.

Eine bestimmte (konische oder ebene) Schnittfläche (Index (...) _k bzw. (...) _e) schneidet dieses Tangentenband längs einem kurzen, praktisch geraden Linienabschnitt, der ebenfalls mit einem tangent anliegenden Vektor ($\vec{e}$) identifiziert sei. $\vec{e}$ ist also tangent an die «äquivalente Mittelfläche» längs des betrachteten Schaufelschnittes.

Nun sei noch der Vektor $\vec{d}$, welcher die Richtung $\gamma = 0$ darstellen soll, definiert:

a) Im Falle eines konischen Schnittes (Bild 7) sei $\vec{d}_k$ parallel zur Schnittlinie der Meridianebene durch den Punkt P mit der Schnittfläche.

b) Im Falle eines ebenen Schnittes sei $\vec{d}_e$ parallel zur z' -Achse (Bild 5).

Das skalare Produkt von $\vec{e}$ und $\vec{d}$ liefert demnach den «neuen γ -Winkel», denn

$$(13) \quad \cos \gamma = \frac{\vec{e} \cdot \vec{d}}{|\vec{e}| |\vec{d}|}$$

Für die praktische Berechnung von $\vec{e}$ geht man wie folgt vor: Man bildet zunächst die beiden Vektoren

$\vec{a}$ = vektorielle Darstellung eines Elementes der Schnittfläche und

$\vec{b}$ = vektorielle Darstellung eines Elementes des Tangentenbandes.

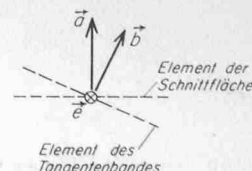


Bild 8. Vektorielle Darstellung von Flächenelementen

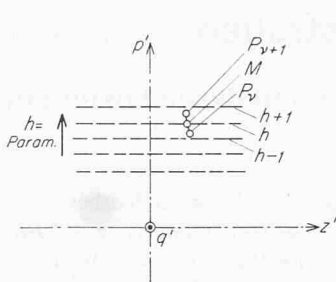


Bild 12. Bestimmung der zu den «Punktpaaren» gehörenden ebenen Schnitte

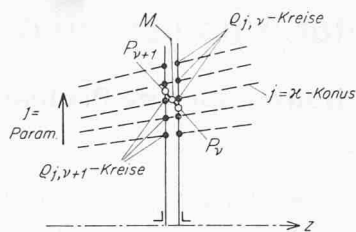


Bild 13. Bestimmung der zu den «Punktpaaren» gehörenden konischen Schnitte

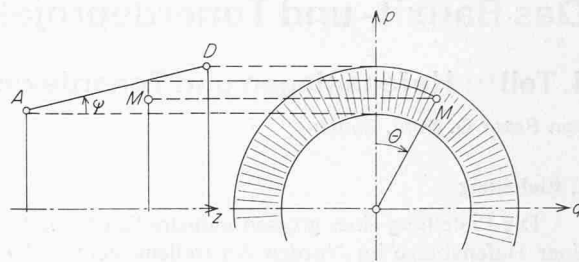


Bild 14. Erläuterung zum Schnittpunkt M im Fall «eben-konisch»

enthält, schneidet die konischen j -Flächen längs konzentrischen Kreisen, deren Radien mit $\rho_{j,v}$ (bzw. $\rho_{j,v+1}$) benannt seien.

Unter den $\rho_{j,v}$ -Kreisen, die der Bedingung

$$(23) \quad \rho_{j,v} > r_v$$

(mit r_v = zweite Koordinate in E_3 des Punktes P_v)

genügen, sucht man denjenigen mit dem kleinsten Radius heraus. Dessen j -Wert wird mit κ bezeichnet. Nun untersucht man, ob der nächste Punkt P_{v+1} inner- oder ausserhalb dieses « $j = \kappa$ -Konus» liegt, indem man die Ungleichheit (24) analysiert:

$$(24) \quad \rho_{\kappa,v+1} > r_{v+1}$$

Gilt die Aussage (24), bedeutet dies, dass der « $j = \kappa$ -Konus» ausserhalb des Punktpaares $P_v - P_{v+1}$ liegt; κ wird in diesem Fall um 1 erhöht. Ist jedoch (24) falsch, so gehört der « $j = \kappa$ -Konus» zu diesem Punktpaar. Da unter Umständen auch noch weitere Konen zu $P_v - P_{v+1}$ gehören können, wird κ um 1 erhöht und erneut (24) analysiert usw.

NB: Im Sonderfall $\rho_{j,v} = r_v$ (bzw. $\rho_{\kappa,v+1} = r_{v+1}$) ist natürlich der zu bestimmende Schnittpunkt direkt durch den Punkt P_v (bzw. P_{v+1}) gegeben.

5.2 Gleichungssysteme für die lineare Interpolation

Die Bestimmung der Schnittpunkte M (Bild 12 bzw. 14) der $P_v - P_{v+1}$ -Segmente mit den Schnittflächen kann auf einfache Art analytisch behandelt werden. Die parametrischen Gleichungen eines solchen Segmentes in E_4 lauten:

$$(25) \quad \left. \begin{aligned} z &= z_v + \lambda(z_{v+1} - z_v) \\ p &= p_v + \lambda(p_{v+1} - p_v) \\ q &= q_v + \lambda(q_{v+1} - q_v) \end{aligned} \right\} \text{ mit } \lambda = \begin{cases} j = 1, 2, \dots, (m-1) \\ \text{oder} \\ h = 1, 2, \dots, (n-1) \end{cases}$$

und $\lambda = 0 \div 1 = \text{Parameter}$

Fall «konisch-eben»

Auf ähnliche Weise kann (25) natürlich auch mit (z', p', q') von E_5 angeschrieben werden. Mit $p' = p_h$ ergibt sich daraus:

$$(26) \quad \lambda = \frac{p'_h - p'_v}{p'_{v+1} - p'_v}$$

(25) mit (26) liefert die gesuchten Koordinaten des Punktes M (Bild 12) zunächst in E_5 und mit den Beziehungen (11b) in E_4 .

Fall «eben-konisch»

Die Gleichungen des Konus (in E_3) lauten (Bild 14):

$$z = z$$

$$(27) \quad r = r_A + \operatorname{tg} \psi (z - z_A) = \sqrt{p^2 + q^2} \quad [\text{Gl. 10b}]$$

$$\Theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (q/p) \quad [\text{Gl. 10b}]$$

Einsetzen von z, p und q von (25) in die zweite Gleichung von

(27) und Quadrieren beider Seiten führt zu einer Beziehung mit einer einzigen Unbekannten (λ):

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{[r_A + \operatorname{tg} \psi (z_v - z_A)]}{K_1} + \frac{[\operatorname{tg} \psi (z_{v+1} - z_v)]}{K_2} \lambda \right\}^2 = \\ & = \left[\frac{p_v + (p_{v+1} - p_v) \lambda}{K_3} \right]^2 + \left[\frac{q_v + (q_{v+1} - q_v) \lambda}{K_4} \right]^2 \\ & K_1^2 + 2 K_1 K_2 \lambda + K_2^2 \lambda^2 = p_v^2 + 2 p_v K_3 \lambda + \\ & + K_3^2 \lambda^2 + q_v^2 + 2 q_v K_4 \lambda + K_4^2 \lambda^2 \\ & \frac{(K_2^2 - K_3^2 - K_4^2) \cdot \lambda^2 - 2 (p_v K_3 + q_v K_4 - K_1 K_2) \cdot \lambda}{K_5} + \\ & + \frac{(K_1^2 - p_v^2 - q_v^2)}{K_7} = 0 \end{aligned}$$

$$(28) \quad \lambda = \frac{1}{K_5} (K_6 \pm \sqrt{K_6^2 - K_5 K_7})$$

Von den beiden Lösungen von (28) ist nur diejenige von Interesse, die der Bedingung entspricht:

$$(29) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

da ja der gesuchte Schnittpunkt M (Bild 14) zwischen den Punkten P_v und P_{v+1} liegen muss. λ in (25) eingesetzt, liefert die gesuchten Koordinaten von M in E_4 .

5.3 Interpolierte γ -Werte

Zur Bestimmung von γ im Punkt P (Bild 7) dürfte folgende lineare Interpolation in den meisten praktischen Fällen genügen:

$$(30) \quad \gamma = \gamma_v + \frac{r - r_v}{r_{v+1} - r_v} \cdot (\gamma_{v+1} - \gamma_v)$$

Der Verfasser dankt der Firma Gebr. Sulzer AG (Winterthur) für die Freigabe zur Veröffentlichung dieser Arbeit, welche einer erweiterten Fassung eines unveröffentlichten Sulzer-Berichtes entspricht.

Literaturverzeichnis

- [1] Hearsay, R.M.; A.J. Wennerstrom: Axial Compressor Airfoils for Supersonic Mach Numbers. ARL-Report Nr. 70-0046, March 1970 (Aerospace Research Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA)
- [2] Tysl, E.R.; F.C. Schwenk; T.H. Watkins: «Experimental Investigation of a Transonic Compressor Rotor with a 1.5 Inch Chord Length and an Aspect Ratio of 3.0. I-Design, Over-all Performance, and Rotating-Stall Characteristics. NACA RM E5 4L31, March 28, 1955 (National Advisory Committee for Aeronautics, USA)

Adresse des Verfassers: René Flatt, dipl. Ing. EPFL, Rue de la Mouline 12, 1022 Chavannes-près-Renens