

Die Traglasttheorie der Statik als mathematisches Modell

Autor(en): **Betten, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **91 (1973)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-71774>

Nutzungsbedingungen

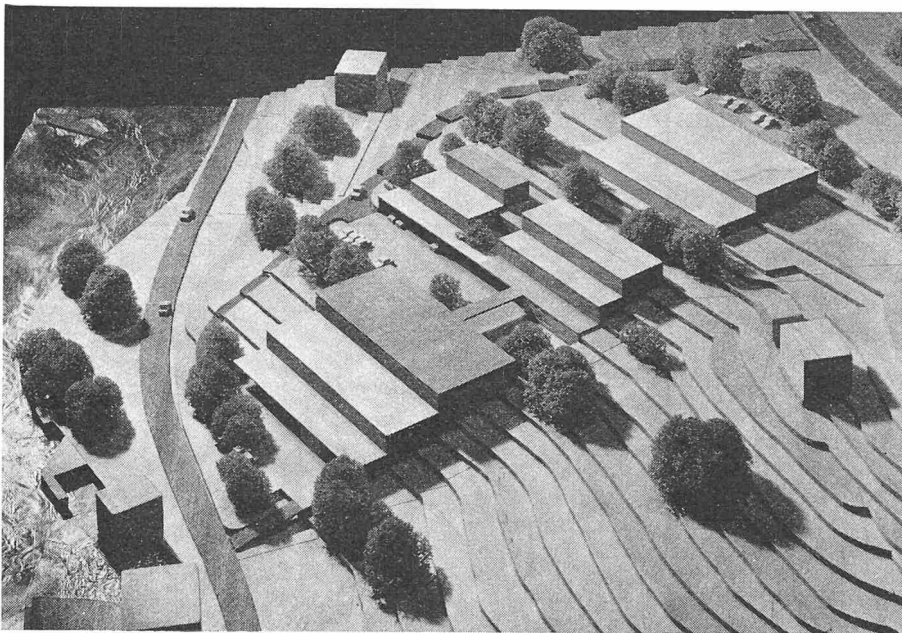
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.



Das künftige Seeforschungsinstitut der EAWAG von Nordosten. Das Bild zeigt den Vollausbau der Anlage zwischen der projektierten Uferstrasse (links) und der vorgesehenen Höhenstrasse (Ecke oben rechts). Unten links das alte hydrobiologische Laboratorium

Bauherrschaft: EAWAG, Dübendorf.

Vertreter der Bauherrschaft: Delegierter des Schulrates für die Annexanstalten.

Baufachorgan: Direktion der Eidg. Bauten, Bern; Bauinspektion V, Zürich.

Projektverfasser: Roland Mozzatti, Architekt, Luzern; Mitarbeiter: Roman Lüscher, Architekt, Luzern.

Statik: Ingenieurgesellschaft Plüss u. Meyer/E. Zemp, Luzern.

Baugrunduntersuchung: VAW-ETH Zürich, Institut für Erd- und Grundbau.

Elektroanlagen: Elektr.-Ing. Scherler AG, Luzern.

Heizungs- und Lüftungsanlagen: E. Bertsch, Heizung u. Lüftung, Luzern.

Sanitäranlagen: Gianotti u. Schudel, Sanitäringenieure, Winterthur.

Die Traglasttheorie der Statik als mathematisches Modell

Von J. Betten, Aachen, Mitteilung aus dem Institut für Werkstoffkunde der RWTH Aachen

DK 624.04

In dem vorliegenden Aufsatz wird gezeigt, dass die Traglasttheorie als mathematisches Modell aufgefasst werden kann. Dazu werden zunächst im Sinne der mathematischen Logik der Begriff einer mathematischen Theorie, insbesondere das Wesen einer axiomatisierten Theorie, und der Modellbegriff näher erörtert.

Das mathematische Modell der Traglasttheorie beruht auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebung an der Versagensgrenze als Axiom. Daraus lassen sich die Traglastsätze ableiten, die eine Eingabelung der Traglast durch eine obere und untere Schranke ermöglichen (Schrankenmethode). Zum mathematischen Modell der Traglasttheorie gehört schliesslich noch die Gruppe der Voraussetzungen, die einerseits über den erforderlichen Rechenaufwand zur Ermittlung der Tragfähigkeit entscheidet und andererseits die Güte des Modells bestimmt.

Allgemeines über den Modellbegriff

Der Begriff des Modells wird häufig auf anschauliche, mitunter verkleinerte bzw. vergrösserte Darstellungen angewandt. In diesem Sinne wird etwa der Architekt das Modell eines auszuführenden Bauwerks herstellen. Ein ähnliches Beispiel ist ein Relief als Modell einer Landschaftsoberfläche. Kein Modell jedoch wird alle Eigenschaften der darzustellenden Wirklichkeit vollständig wiedergeben. *Das Modell ist nur Modell in bezug auf bestimmte Eigenschaften und Relationen* [1].

In ähnlicher Weise haben die empirischen Wissenschaften Modelle entwickelt, die nur in bezug auf bestimmte Relationen der darzustellenden Erfahrungswirklichkeit mit dieser unter bestimmten Voraussetzungen übereinstimmen [2]. So gilt z.B. das Keplersche Gesetz, nach dem sich die Quadrate der Um-

laufzeiten der Planeten wie die Kuben ihrer grossen Halbachsen verhalten, nur näherungsweise, da die Massen der Planeten relativ zur Sonnenmasse unberücksichtigt bleiben. Weiterhin beinhaltet das erste Keplersche Gesetz, nach dem sich die Planeten auf Ellipsenbahnen um die Sonne (als einen Brennpunkt) bewegen, ein anschauliches Modell des Sonnensystems. Ebenso beruhen vielfach Atomtheorien, wie z.B. die von Rutherford, auf anschaulichen Modellen.

Der Modellbegriff steht somit für die gegenüber der Wirklichkeit vereinfachten, idealisierten Vorstellung einer physikalischen Gegebenheit: Das Modell ist ein idealisiertes Abbild der Wirklichkeit. Es wird entscheidend präzisiert durch die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen des darauf gestützten methodischen Rechenverfahrens (Algorithmus) [3].

Mathematische Theorie und mathematisches Modell

Mathematische Modelle werden in mathematischen Theorien, meist axiomatisierten Theorien, benutzt. Die Frage «Was ist eine mathematische Theorie?» ist eine metamathematische Frage [4].

Theorie heisst ursprünglich soviel wie Betrachtung ($\theta\epsilon\omega\rho\epsilon\iota\varsigma$ = anschauen). Jedoch hat sich die Auffassung des Begriffs «Theorie» von der Antike (Aristoteles) über das Mittelalter (Pascal) bis zur Jetztzeit (Bolzano, Tarski) gewandelt. Man unterscheidet den klassischen und den modernen Begriff einer mathematischen Theorie [5].

Der klassische Begriff einer mathematischen Theorie geht auf Aristoteles zurück und wurde von Pascal (1655) neu formuliert. Nach der mathematischen Methode von Pascal definiert man alles, was nicht undefinierbar ist, und beweist alles, was

nicht unbeweisbar ist. Wörter oder Redeweisen sind dann *undefinierbar*, wenn ihre Bedeutungen so klar sind, dass sie einer Präzisierung weder fähig sind noch bedürfen. Eine Aussage soll als *unbeweisbar* gelten, wenn die durch sie ausgedrückte Wahrheit so evident ist, dass sie eines Beweises weder fähig noch bedürftig ist. In der klassischen Theorie werden die Aussagen in der Pascalschen Sprache formuliert, die sich aus *Urwörtern* (undefinierbar) und ihren *Derivate* (von Urwörtern ableitbar) zusammensetzt. Die Sätze einer mathematischen Theorie im Pascalschen Sinne zerfallen ebenfalls in zwei Klassen: in die Klasse der den Urwörtern entsprechenden *Grundsätze* oder *Prinzipien* (bzw. *Axiome*) und in die Klasse ihrer *Derivate*, die aus den Grundsätzen ableitbar sind und als *Lehrsätze* bezeichnet werden. Grundsätze sind unbeweisbar, d.h., sie sind eines Beweises weder fähig noch bedürftig. Dagegen müssen alle Lehrsätze einer mathematischen Theorie mit Hilfe der Grundsätze beweisbar sein.

Der moderne Begriff einer mathematischen Theorie geht auf Bolzano (1837) und Tarski (1935) zurück. Darunter versteht man den «Inbegriff aller mathematischen Wahrheiten», die in einer geeigneten Sprache (Bolzano-Sprache) dieser Theorie dargestellt werden können. Alle Sätze in der mathematischen Bolzano-Sprache sind *axiomatisch-deduktiv* erklärt, d.h. als die Folgerungen (Konsequenzen) einer endlichen Menge mathematischer Aussageformen. Das führt auf den mathematischen Folgerungsbegriff [6]. Somit sind auch im Bolzanoschen Sinne mathematische Theorien axiomatisiert, d.h., in ihrer Darstellung werden gewisse Sätze dieser Theorie als Axiome an den Anfang gestellt, und zwar derart, dass alle übrigen Sätze (*Theoreme* bzw. *Derivate*) der Theorie aus den Axiomen (*Axiomensystem*) gefolgert bzw. abgeleitet werden können. Der wesentliche Unterschied zwischen der klassischen und modernen Auffassung einer mathematischen Theorie liegt in den Anforderungen, die an ein Axiomensystem gestellt werden. Entgegen der klassischen Auffassung brauchen Axiome im modernen Sinne *nicht evident* zu sein [7]. Axiome werden als Aussagen verstanden, die Beziehungen zwischen den Elementen vorgegebener Mengen festlegen. Sie sind nur brauchbar, wenn sich aus ihnen keine Widersprüche herleiten lassen. Ein Axiomensystem ist *widerspruchsvoll*, wenn es zwei Theoreme der Form « T_i » und « $\neg T_i$ » gibt. Im anderen Falle ist es *widerspruchsfrei*. Das Postulat der *Widerspruchsfreiheit* (logische Wahrheit) eines gegebenen Axiomensystems wird durch die Konstruktion eines logischen Modells nachgewiesen, d.h., die Widerspruchsfreiheit eines Systems ist gesichert durch ein mathematisches Modell dieses Systems.

In den bisherigen Ausführungen sind die wesentlichen Merkmale (*Axiome*, *Derivate*) mathematischer Theorien im klassischen und modernen Sinne skizziert. Dabei wurde auf eine dritte Gruppe, nämlich die der Annahmen und Voraussetzungen, die auch zum wesentlichen Inhalt eines mathematischen Modells gehören, nicht näher eingegangen. Um die mathematische Lösung insbesondere technischer Probleme zu ermöglichen, werden Modelle zugrunde gelegt, die Gruppen von sinnvollen Annahmen enthalten. Die Annahmen bestimmen entscheidend die Güte eines Modells: Es ist um so besser, je weniger weit sich die Annahmen von der Wirklichkeit entfernen. Um bessere Übereinstimmung mit Messergebnissen (häufig mit der Wirklichkeit identifiziert!) zu erhalten, können die in den Lösungen auftretenden Parameter bzw. Freiwerte korrigiert werden, so dass sie nicht als physikalische Konstanten und Stoffwerte angesehen werden können. Aus diesem Grunde werden die Modelle immer weiter verfeinert, d.h., man passt die Annahmen immer mehr der Wirklichkeit an, muss aber die dadurch meist auftretenden mathematischen Schwierigkeiten in Kauf nehmen. Dieser Aufwand lohnt sich insbesondere, wenn dadurch die eingeführten Freiwerte den Charakter eines anpassbaren Parameters verlieren und vielmehr physikalische

Konstanten oder Stoffwerte widerspiegeln. Diese Kennwerte können dann und nur dann *unabhängigen Messungen* (Grundversuchen) entnommen und in die gefundenen (aufgestellten) Beziehungen eingesetzt werden.

Andererseits kann gerade durch die Verfeinerung eines Modells eine zunächst als vermeintliche physikalische Konstante oder Stoffeigenschaft eingeführte Grösse immer mehr diesen Charakter verlieren und den eines anpassbaren Parameters annehmen. Ein Beispiel ist der von Siebel [9] bei elementaren Berechnungen in der Umformtechnik als Reibungsbeiwert im Coulombschen Sinne benutzte Koeffizient μ , der sich mit zunehmender Erweiterung der Rechenmodelle von Formgebungsverfahren mehr als verfahrensabhängiger anpassbarer Parameter und weniger als für verschiedene Werkstoffpaarungen gebildeter Reibungskoeffizient erwiesen hat [10].

Traglasttheorie und mathematisches Modell

Die Traglasttheorie bemüht sich mit geringem Rechenaufwand um Aussagen über das mechanische Verhalten von Tragwerken. Sie gestattet eine einfache Bestimmung der Tragfähigkeit bzw. der Traglast und gibt Einblick in den wahrscheinlichen Bruchmechanismus.

Voraussetzungen in der Traglasttheorie

Die Gruppe der Annahmen und Voraussetzungen in der Traglasttheorie ist im wesentlichen durch folgende Punkte gegeben [8]:

1) Die äusseren Belastungen (im allgemeinen Kräfte P_i und Momente M_i) sollen langsam, stetig und proportional anwachsen (proportionale Belastung zu jedem Zeitpunkt t):

$$(1 \text{ a; b}) \quad P_i(t)/P_j(t) = \pi_{ij} = \text{const. bzw.} \\ M_i(t)/M_j(t) = \mu_{ij} = \text{const.,}$$

so dass die Angabe irgendeiner beliebigen Kraft P_i oder eines Momentes M_i ausreicht, um den Belastungszustand *eindeutig* zu beschreiben. Der grösste Wert aller P_i (bzw. M_i) im Augenblick des Zusammenbruchs ist die Traglast P_T (bzw. das Tragmoment M_T), die somit den Versagenszustand *eindeutig* beschreibt:

$$(2 \text{ a; b}) \quad \max(P_i) = P_T \text{ bzw. } \max(M_i) = M_T$$

2) Vom Werkstoff wird idealplastisches Verhalten vorausgesetzt (Prandtl-Reuss-Körper ohne Verfestigung). Für Tragwerke aus verfestigendem Werkstoff ist keine Traglast definiert. Zur Beurteilung der Tragfähigkeit eines Tragwerkes aus verfestigendem Werkstoff ist daher eine Angabe über zulässige Deformationen notwendig.

3) Ausbildung einer begrenzten Anzahl von Fließgelenken, Fließgelenklinien oder Fließbereichen, in denen die Schnittlasten bei Steigerung der äusseren Lasten konstant bleiben.

4) Bei Erreichen der Traglast P_T haben sich hinreichend viele Fließstellen gebildet, um das Tragwerk zu einem «*Mechanismus*» zu machen, der durch Angabe einer einzigen Verschiebung *kinematisch bestimmt* ist. Mit der Entstehung eines neuen Fließgelenkes während der Belastung des Tragwerkes nimmt der Grad der statischen Unbestimmtheit jeweils um Eins ab, d.h., ein n -fach statisch unbestimmtes System bricht zusammen, wenn sich $n + 1$ Fließgelenke gebildet haben (vollständiger Bruchmechanismus). Das System wird dann *statisch bestimmt* (besser: statisch bestimmbar), d.h., die statischen Grundgleichungen reichen zur Bestimmung der Traglast aus.

5) Bis zum Erreichen der Traglast P_T seien die Verformungen so klein, dass die geometrischen Änderungen des Tragwerkes weder in die Gleichgewichtsbedingungen noch in die Randbedingungen eingehen (*Theorie erster Ordnung*.) Gleichgewichts- und Randbedingungen werden daher anstatt auf den verformten Körper stets auf den noch unverformten Körper bezogen.

- [4] Lorenzen, P.: Metamathematik, B-I-Hochschultaschenbuch, Band 25, 1962.
- [5] Scholz, H.: Der klassische und der moderne Begriff einer mathematischen Theorie. Math.-Phys. Semesterberichte 3 (1953), S. 30-47.
- [6] Tarski, A.: Über den Begriff der logischen Folgerung. «Actual. scient. ind.» Nr. 394, S. 1-11, Paris, 1936.
- [7] Leinfellner, W.: Einführung in die Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. B-I-Hochschultaschenbuch, Band 41, 2. Aufl., 1967.
- [8] Betten, J.: Fließgelenkhypothese zur Beschreibung des funktionellen Versagens von Tragwerken. «Zeitschrift Konstruktion», im Druck.

- [9] Siebel, E.: Die Formgebung im bildsamen Zustand. Düsseldorf: Verlag Stahleisen, 1932.
- [10] Troost, A., und Betten, J.: Über den Einfluss der Reibung und der Schubspannung auf die bildsame Formgebung. «Archiv f. d. Eisenhüttenwesen», 40 (1969), S. 387-394.
- [11] J. Betten: Habilitationsvortrag, Aachen, 1971, unveröffentlicht.

Adresse des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. J. Betten, Institut für Werkstoffkunde, Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen, D-51 Aachen.

Die Verlustanalyse als Mittel zur Bemessung des Spiraleintrittsdurchmessers von Wasserturbinen

DK 621.224

Von Prof. J. Osterwalder, Darmstadt

Zusammenfassung

Bei der Projektierung von Wasserkraftanlagen ist man bestrebt, die Hauptabmessungen und insbesondere die Breite der jeweiligen Spirale klein zu halten, da dieses Mass den Abstand von Turbine zu Turbine (Achsabstand) und somit die Baukosten erheblich beeinflussen kann. Bei der Festlegung der Strömungsquerschnitte und des Eintrittsdurchmessers D_E ist aber auch darauf zu achten, dass unzulässige Verluste vermieden werden. Im vorliegenden Beitrag werden die Spiralverluste abgeleitet und formelmässig angegeben; es lässt sich damit der Durchmesser D_E für einen bestimmten, als zulässig erachteten Verlust berechnen und für Turbinen verschiedener Schnelligkeit angeben.

*

Der Beitrag veranschaulicht die Bedeutung der Verlustanalyse als Mittel zur Bemessung von Turbinenspiralen mit kreisförmigen Strömungsquerschnitten. Zur Vereinfachung der Problemstellung werden folgende Annahmen getroffen:

- Lineare Abhängigkeit des Spiralquerschnittes A_φ vom Zentriwinkel φ , was in vielen Fällen den Tatsachen entspricht (Bild 1).
- In allen Querschnitten A_φ herrscht die gleiche mittlere Geschwindigkeit ($c_\varphi = c_E = \text{konst.}$), was bei umfängssymmetrischer Abströmung durch die Stützschaufelkanäle und dem erwähnten linearen Verlauf $A_\varphi \sim \varphi$ zutrifft.
- Die Strömungsverluste werden in Anlehnung an die Widerstandsgesetze der Rohrströmung ermittelt, wobei der Reibungsbeiwert λ als ein für die Spiralenströmung repräsentativer Mittelwert anzusehen ist.

Unter diesen Voraussetzungen können die bezogenen Spiralverluste wie folgt hergeleitet werden:

$$dH_V = \frac{\bar{c}_\varphi^2}{2g} \lambda \frac{dl}{D_\varphi} = \frac{c_E^2}{2g} \lambda \frac{R_\varphi d\varphi}{D_\varphi}$$

$$\frac{R_\varphi}{D_\varphi} = \frac{a D_1 + 0,5 D_\varphi}{D_\varphi} = \frac{a D_1}{D_\varphi} + 0,5$$

$$\frac{R_\varphi}{D_\varphi} = \frac{a D_1 (2\pi)^{1/2}}{D_E \varphi^{1/2}} + 0,5$$

$$dH_V = \frac{c_E^2}{2g} \lambda \left[\frac{a D_1 (2\pi)^{1/2}}{D_E \varphi^{1/2}} + 0,5 \right] d\varphi$$

$$\frac{H_V}{H} = K_{cE}^2 \lambda \cdot \left[\frac{a D_1 (2\pi)^{1/2}}{D_E} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \varphi^{-1/2} d\varphi + \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 0,5 d\varphi \right]$$

$$\frac{H_V}{H} = K_{cE}^2 \lambda \left[\frac{a D_1 (2\pi)^{1/2}}{D_E} \frac{(2\pi)^{1/2}}{D_E} + \pi \right]$$

$$(1) \quad \frac{H_V}{H} = K_{cE}^2 \lambda \pi \left(\frac{4 a D_1}{D_E} + 1 \right)$$

Anhand von Formel (1) kann der Verlust einer gegebenen Turbine mit bekannten Daten Q , H , D_1 , D_E , a wie folgt ermittelt werden:

Beispiel: Kaplan-Spiralturbine mit 6 Laufschaufeln bei Vollast

$$\frac{D_1}{D_E} = 0,82; \quad a = 0,756;$$

$$Q_{11}^* = \frac{Q}{D_1^2 (2gH)^{1/2}} = 0,30$$

$$\lambda = 0,014$$

$$K_{cE} = \frac{c_E}{(2gH)^{1/2}} = \frac{4Q}{\pi D_E^2 (2gH)^{1/2}} = \frac{4Q}{\pi (D_E/D_1)^2 D_1^2 (2gH)^{1/2}}$$

$$K_{cE} = \frac{4 Q_{11}^*}{\pi} \left(\frac{D_1}{D_E} \right)^2 = \frac{4 \cdot 0,3}{\pi} \cdot 0,82^2 \cdot 0,256$$

$$\frac{H_V}{H} = 0,256^2 \cdot 0,014 \cdot \pi \cdot (4 \cdot 0,756 \cdot 0,82 + 1) = 0,01$$

Mit Formel (1) lässt sich ferner der bezogene Spiraldurchmesser D_E/D_1 für einen bestimmten, als tragbar erachteten

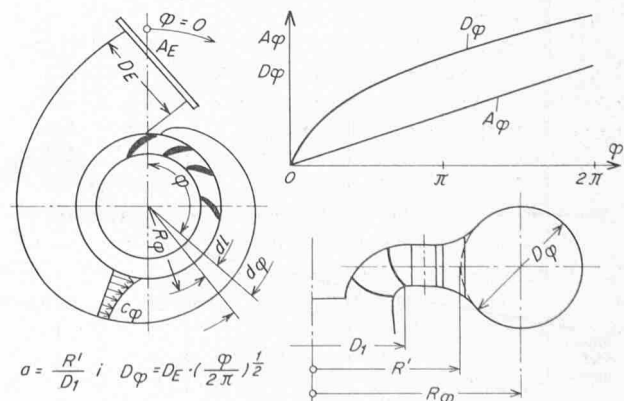


Bild 1. Schematische Darstellung des Spiralgehäuses einer Francis-turbine mit Angabe der verwendeten Rechnungsgrößen