Theoretische Grundlage der Schwingungsberechnung von Bauteilen

Autor(en): **Wehrli, Christoph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **84 (1966)**

Heft 9

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-68849

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

schaftlichen Entschuldungsgesetz verweigert, gilt Artikel 218 des Obligationenrechtes, der für die Veräusserung landwirtschaftlicher Grundstücke eine Sperrfrist von sechs Jahren verfügt.

Die luzernische Gemeinde Malters hatte sich schon mehrfach mit den dargelegten Fragen zu befassen. Der Gemeinderat fasste nun kürzlich einen grundsätzlichen Entscheid, der über die Grenzen von Malters hinaus Beachtung verdient. Demnach werden in der Bauzone gelegene Bauparzellen aus dem landwirtschaftlichen Entschuldungsgesetz entlassen, wenn die Erschliessung sichergestellt ist. Dadurch will der Gemeinderat einen Beitrag leisten, dass ein möglichst hohes Angebot an Bauland entsteht. Werden ausserhalb der Bauzone Parzellen zu einem Baulandpreis verkauft, bleibt für diese das landwirtschaftliche Entschuldungsgesetz massgebend. Gleichwohl soll das Land dem bezahlten Preis entsprechend zum Verkehrswert besteuert werden, sofern die Parzellen nicht mit einem landwirtschaftlichen Betrieb vereinigt werden. Ausserhalb der Bauzone soll solches Land nur dann aus der Unterstellung unter das landwirtschaftliche Entschuldungsgesetz entlassen werden, wenn eine Baubewilligung vorliegt.

Allzu oft hat man den Eindruck, die Praxis in der Besteuerung und in der Handhabung rechtlicher Massnahmen stimme mit der Konzeption, die Hortung von Bauland und eine ungerechtfertigte Steigerung der Bodenpreise überhaupt zu verhindern, nicht überein. Um so erfreulicher ist der Entscheid des Gemeinderates von Malters, der sachlich genau den Grundsätzen entspricht, die die Schweizerische Vereinigung für Landesplanung in ihrer im Herbst 1965 erschienenen Broschüre «Gedanken zum Bodenrecht und zur Bodenpolitik» aufgestellt hat. *VLP*

Theoretische Grundlagen der Schwingungsberechnung von Bauteilen

DK 624.042.8

Von Prof. Dr. **Christoph Wehrli,** ETH, Zürich

Vortrag, gehalten am 15. Oktober 1965 an der ETH anlässlich der Studientagung über dynamische Wirkungen auf Bauwerke, durchgeführt von der S. I. A.-Fachgruppe der Ingenieure für Brückenbau und Hochbau

1. Einleitung

Schwingungen sind mehr oder weniger regelmässige zeitliche Schwankungen von Zustandsgrössen. In der Natur und in allen Bereichen der Technik treten Schwingungen auf. Als mechanische Schwingungen bezeichnet man Bewegungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage, wobei die Zustandsgrössen Lagekoordinaten sind.

In der Schwingungslehre unterscheidet man im wesentlichen vier Gruppen von Schwingungen: Eigenschwingungen, erzwungene Schwingungen, parametererregte Schwingungen und selbsterregte Schwingungen. Von diesen Schwingungstypen, die durch ihre Entstehungsart gekennzeichnet sind, werden im folgenden ausschliesslich die ersten beiden betrachtet.

Eigenschwingungen oder *freie Schwingungen* sind Bewegungen des sich selbst überlassenen Schwingers ohne äussere Einwirkungen.

Von *erzwungenen Schwingungen* spricht man bei Bewegungen unter dem Einfluss äusserer Störungen wie Erschütterungen, Störkräften, Stoss usw.

Da schon Schwingungen mit endlichem Freiheitsgrad die wesentlichen Erscheinungen und Eigenschaften erkennen lassen, werden wir uns im weiteren zunächst mit derartigen Schwingungen befassen und anschliessend noch kurz auf Fragen bei kontinuierlichen Schwingern übergehen. Ferner sei darauf hingewiesen, dass abgesehen von einer Ausnahme nur lineare Probleme zur Sprache kommen. Es scheint im Rahmen dieser kurzen Einführung zweckmässig, sich vor allem anhand von geeigneten Beispielen ein Bild über die wichtigsten Tatsachen zu verschaffen.

2. Freie Schwingungen

Als Beispiel eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad nehmen wir einen Massenpunkt m auf einem masselos gedachten, elastischen Stab (Bild 1). Mit der von der Gleichgewichtslage aus gemessenen Verschiebung y ergibt der Impulssatz die Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + cy = 0 \,, \tag{2.1}$$

deren Lösung $y = A \cos(\omega t - \varepsilon)$ eine harmonische Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz $\omega = \sqrt{c/m}$ darstellt. Amplitude A und Phasenverschiebung ε werden durch zwei Anfangsbedingungen bestimmt.

Bild 2 zeigt ein System mit zwei Freiheitsgraden, bestehend aus zwei Massen m an elastischen Stäben, gekoppelt durch eine Feder. Formulieren wir den Impulssatz für jeden der beiden Massenpunkte und ordnen die erhaltenen Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\, x_1 - c_2\, x_2 &= 0 \,, \\ m\ddot{x}_2 - c_2\, x_1 + (c_1 + c_2)\, x_2 &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mit dem Lösungsansatz $x_i = A_i \cos(\omega t - \varepsilon)$, $(i = 1{,}2)$ entsteht ein homogenes Gleichungssystem für A_1 und A_2, das, falls es nicht nur die Nullösung haben soll, eine verschwindende Determinante besitzt:

$$\Delta(\omega) = m^2 \omega^4 - 2\, m\, (c_1 + c_2)\, \omega^2 + c_1\, (c_1 + 2\, c_2) = 0 \,. \tag{2.3}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$ und $\omega_2 = \sqrt{(c_1 + 2\, c_2)/m}$ sind die *Eigenkreisfrequenzen* des Schwingers, dessen allgemeinste Bewegung durch Überlagerung der beiden Eigenschwingungen entsteht: $x_i = A_{i1} \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + A_{i2} \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2)$, $(i = 1{,}2)$. Dabei ist zu beachten, dass die A_{i1} und A_{i2} je dem erwähnten Gleichungssystem genügen müssen, sodass vier Anfangsbedingungen zur Ermittlung der vorkommenden Konstanten ausreichen. Das beschriebene Vorgehen lässt sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall von beliebigem Freiheitsgrad erweitern.

3. Erzwungene Schwingungen

a. Erregung durch Stoss

Unter einem Stoss versteht man eine Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers oder Systems in einem Zeitintervall, das so kurz ist, dass sich die Lage nicht merklich ändert. Die in diesem Zusammenhang etwa in Frage kommende Art des Stosses besteht im Auftreffen einer Masse auf den Schwinger.

Um einen konkreten Fall zu haben, denken wir uns einen Massenpunkt m, der mit der Schnelligkeit v_a vertikal auf die ruhende Masse des Schwingers von Bild 1 auftrifft. Der Impulssatz, formuliert für das System, bestehend aus beiden Massen während des Stossvorganges, lautet $m\ddot{y} + m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g$, oder integriert über die Stosszeit Δt:

$$mv(\Delta t) + m_1 v_1(\Delta t) = m_1 v_a \,. \tag{3.1}$$

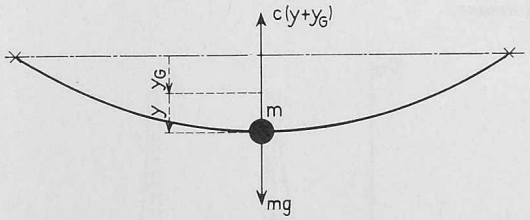


Bild 1. Schwinger mit Freiheitsgrad eins;

$y_G = \dfrac{mg}{c} = \dfrac{mg\, l^3}{48\, EJ}$ $\quad l$ = Stablänge, EJ = Biegesteifigkeit

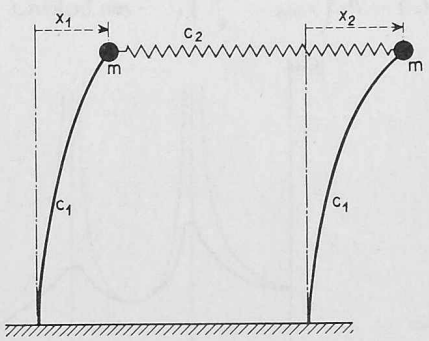


Bild 2. Schwinger mit Freiheitsgrad zwei;

$c_1 = \dfrac{3\, EJ}{l^3}$, $\quad c_2$ = Federkonstante

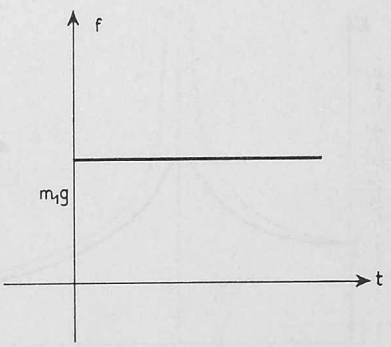


Bild 3. Sprungfunktion

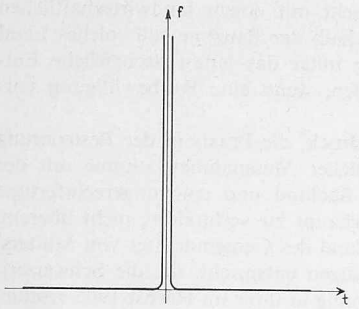


Bild 4 (links). Stossfunktion, wobei

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)\, dt = m\, v_0$$

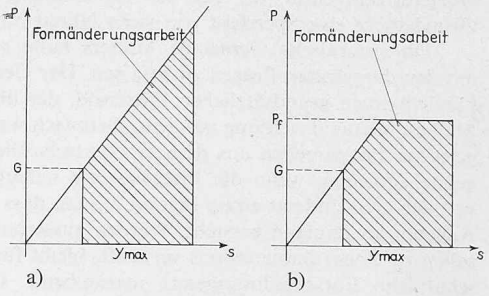


Bild 5 (rechts). Zur Berechnung des Höchstausschlages

s = Auslenkung aus undeformierter Lage

P = Rückstellkraft

Bei einem *vollkommen unelastischen* Stoss ist $v(\Delta t) = v_1(\Delta t)$, nach (3.1) also die gemeinsame Schnelligkeit beider Massen

$$(3.2) \quad v(\Delta t) = \frac{m_1 v_a}{m + m_1}.$$

Wir können nun die Schwingungsdifferentialgleichung in der Form

$$(m + m_1)\ddot{y} + cy = f(t) \quad \text{(Bild 3)}$$

schreiben, zu der die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v(\Delta t) = v_0$ gehören. Die Mittellage der Schwingung verschiebt sich sprunghaft um den Betrag $m_1 g/c$.

Beim *vollkommen elastischen* Stoss ergeben sich $v(\Delta t)$ und $v_1(\Delta t)$ aus (3.1) und der Bedingung für die Erhaltung der kinetischen Energie. Abgesehen von eventuellen weiteren Stössen der beiden Massen lässt sich die Schwingungsaufgabe folgendermassen formulieren:

$$m\ddot{y} + cy = f(t) \qquad \text{(Bild 4)}, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0\,.$$

Zur Ermittlung des Höchstausschlages, der von besonderem Interesse ist, wird zweckmässig der Energiesatz herangezogen, da sich diese Methode auch für nichtlineare Fälle eignet.

Zunächst sei rein elastisches Verhalten des Schwingers vorausgesetzt. Mit y_{max} als grösste Auslenkung (von der Ruhelage aus gemessen) folgt dann (Bild 5a)

$$-\frac{1}{2}(m + m_1)\, v_0^2 = (m + m_1)\, g\, y_{max} - \frac{c}{2}\left[(y_G + y_{max})^2 - y_G^2\right]$$

und daraus für unelastischen Stoss mit (3.2) und der Abkürzung

$$y_{G_1} = m_1 g / c$$

$$(3.3) \quad y_{max} = y_{G_1}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{v_a^2}{g\,(y_G + y_{G_1})}}\right].$$

Die Wurzel wird als *Stosszuschlag* bezeichnet.

Nun nehmen wir einen elastisch-idealplastischen Schwinger an, der sich infolge des Stosses auch plastisch deformiert (Bild 5b):

$$-\frac{1}{2}(m + m_1)\, v_0^2 =$$

$$= (G + G_1)\, y_{max} - \frac{1}{2c}(P_f^2 - G^2) - P_f\left(y_{max} - \frac{P_f}{c}\right),$$

also

$$y_{max} = \frac{P_f^2 + G^2 + c v_0^2 (m + m_1)}{2\, c\, (P_f - G - G_1)}.$$

Hier ist der *Stosszuschlag nicht mehr definiert*, da keine statische Last existiert, für welche die Auslenkung den berechneten Wert y_{max} hat.

b. Harmonische Erregung

Harmonisch mit der Zeit veränderliche Störkräfte oder Erschütterungen als Ursache von Schwingungen spielen eine wichtige Rolle, da sie häufig auftreten. Zudem kann die Reaktion des Schwingers auf allgemeine periodische Störungen aus Einzelreaktionen zusammengesetzt werden, die von harmonischen Anteilen herrühren.

Um an bereits besprochene Beispiele anknüpfen zu können, erteilen wir zuerst den Lagern des Schwingers von Bild 1 vertikale Bewegungen $a \cos \Omega t$. Die Gleichung (2.1) wird jetzt inhomogen, indem auf der rechten Seite das Glied $c\, a \cos \Omega t$ hinzukommt; sie besitzt das partikuläre Integral $y_p = \frac{c\,a}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$. Der Verlauf der Amplitude $C(\Omega) = \frac{c\,a}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$ dieser *eigentlichen erzwungenen Schwingung* ist in Bild 6 durch die gestrichelte Kurve dargestellt.

Eine Störkraft $P \cos \Omega t$, die am rechten Massenpunkt des Systems von Bild 2 angreift, hat einen Störterm in der zweiten Gleichung (2.2) zur Folge. Auch hier bezeichnet man die partikuläre Lösung $x_{1p} = C_1 \cos \Omega t$, $x_{2p} = C_2 \cos \Omega t$ als *eigentliche erzwungene Schwingung*, deren Amplituden $C_1 = \frac{P c_2}{\Delta(\Omega)}$, $C_2 = \frac{P}{\Delta(\Omega)}(c_1 + c_2 - m\,\Omega^2)$ (vergl. (2.3)) in Bild 7 auch wieder gestrichelt skizziert sind. Durch Überlagerung von Eigenschwingung und erzwungener Schwingung gewinnt man die allgemeinste Bewegung des Schwingers.

Das Verhalten eines Schwingers wird durch die *Dämpfung* wesentlich beeinflusst. Für den Fall der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung klingt die Eigenschwingung exponentiell mit der Zeit ab, sodass praktisch nur die eigentliche erzwungene Schwingung übrig bleibt. Die Abhängigkeit ihrer Amplituden von der Störfrequenz ist den ausgezogenen Kurven in den Bildern 6 und 7 zu entnehmen. Das Anwachsen der Amplituden in der Umgebung der Eigenkreisfrequenzen bedeutet *Resonanz*.

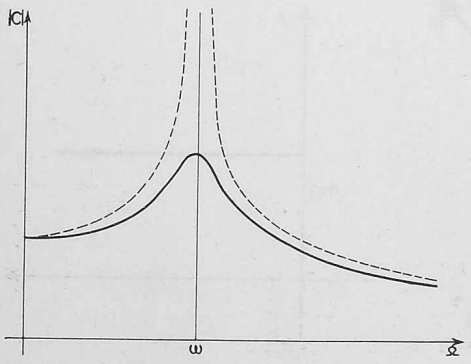


Bild 6. Amplitude der erzwungenen Schwingung für Schwinger von Bild 1

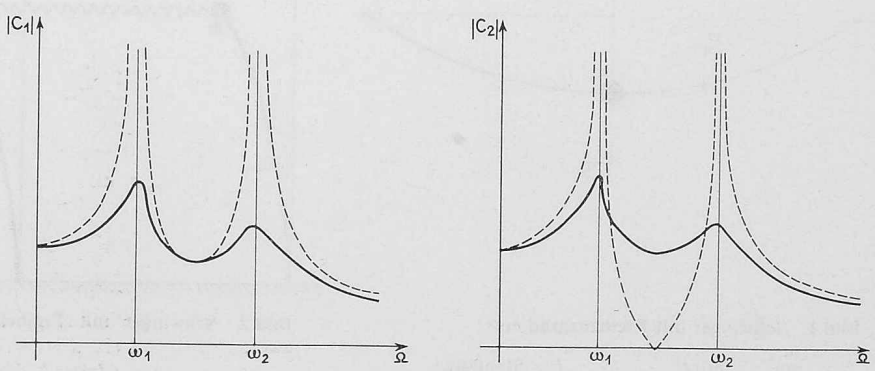


Bild 7. Amplituden der erzwungenen Schwingung für Schwinger von Bild 2.

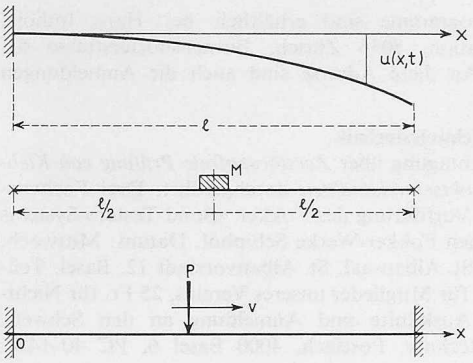


Bild 8 (oben). Querschwingungen eines Stabes

Bild 9 (Mitte). Zur Berücksichtigung der Masse m bei homogenem prismatischem Stab

Bild 10 (unten). Stab mit wandernder Last;

$$y_1 \approx 1 - \cos\frac{2\pi}{l}x$$

4. Schwingungen bei verteilter Masse

Bei den meisten Schwingungsproblemen ist die Masse nicht in einzelnen Punkten konzentriert, sondern mindestens zum Teil kontinuierlich verteilt, was bewirkt, dass der Freiheitsgrad unendlich gross wird. Das prinzipielle Vorgehen bei solchen Schwingern wollen wir uns kurz am Beispiel der Querschwingungen des einseitig eingespannten Stabes veranschaulichen (Bild 8). Zur Differentialgleichung $(EJu'')'' = -\varrho F\ddot{u}$ (EJ = Biegesteifigkeit, ϱ = Dichte, F = Querschnitt) gehören die Randbedingungen $u(0,t) = u'(0,t) = u''(l,t) = u'''(l,t) = 0$. Im Sinne einer Verallgemeinerung der Methode bei endlichem Freiheitsgrad macht man für die Eigenschwingungen den Ansatz $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t - \varepsilon)$. Nur für ganz bestimmte Werte von ω, den *Eigenkreisfrequenzen*, gibt es Lösungen $y \neq 0$ der durch Einsetzen gewonnenen gewöhnlichen Differentialgleichung, die den Randbedingungen genügen. Mit den Eigenkreisfrequenzen $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots$ und den entsprechenden *Eigenfunktionen* $y_1\, y_2, \ldots$ wird die allgemeine Lösung $u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x)\cos(\omega_i t - \varepsilon_i)$ gebildet.

Da die ω_i nur in ganz wenigen Spezialfällen exakt anzugeben sind, wurden verschiedene Näherungsverfahren entwickelt. Ein wichtiges stützt sich auf den Energiesatz und lässt sich allgemein bei elastischen Schwingern anwenden.

Man setzt eine Eigenschwingung $u = y\cos\omega t$ mit einer geschätzten Eigenfunktion y (eine die Randbedingungen befriedigende Ortsfunktion) an. Mit der in der Ruhelage verschwindenden potentiellen Energie V und der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}\int \varrho\omega^2 y^2 \sin^2\omega t\, dv$ gilt:

$$T + V = \text{konst.} = V_{max} = T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2\int \varrho y^2 dv = \omega^2 T^*, \text{ d.h.}$$

$\omega^2 = V_{max}/T^*$. Der Quotient V_{max}/T^* stellt eine Näherung für die Eigenkreisfrequenz der geschätzten Eigenschwingung dar. Sehr eng in Zusammenhang mit dieser Eigenschaft steht das *Rayleighsche Prinzip*, wonach ω_1 das Minimum des Quotienten V_{max}/T^* ist.

Eine einfache Anwendung möge die Methode erläutern (Bild 9): Mit $y = \frac{x}{l^3}(3l^2 - 4x^2)$, $\left(x \leqq \frac{l}{2}\right)$ als Näherung für die erste Eigenfunktion kommt

$$\omega_1^2 \approx \frac{\int_0^{l/2} EJ\, y''^2\, dx}{\int_0^{l/2} \varrho F y^2 dx + \frac{1}{2}My^2\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{48\,EJ}{\left(M + \frac{17}{35}m\right)l^3}.$$

Wie das Beispiel deutlich zeigt, führen diese Überlegungen den Schwinger auf einen solchen vom Freiheitsgrad eins mit geeignet vergrösserter Masse zurück. Daraus folgt insbesondere, dass (3.3) auch als Näherung für y_{max} bei Berücksichtigung der verteilten Masse angesehen werden kann.

Auf Grund der Aussage über Resonanz in Abschnitt 3b, die ebenso für kontinuierliche Schwinger gilt, sind schon Näherungswerte im Hinblick auf die Resonanzstellen ausserordentlich nützlich. Soll beispielsweise beim beidseitig eingespannten Balken mit wandernder Last (Bild 10) die kleinste kritische Geschwindigkeit untersucht werden, so ergibt sich aus

$$\omega_1^2 \approx \frac{EJ\int_0^l \cos^2\frac{2\pi}{l}x\,dx}{\varrho F\int_0^l \left(1 - \cos\frac{2\pi}{l}x\right)^2 dx} = \frac{16\pi^4}{3}\frac{EJ}{ml^3}$$

und der Überlegung, dass die Last in der halben Eigenschwingungsdauer über den Balken laufen muss

$$v_{1\,krit.} = \frac{\omega_1 l}{\pi} \approx \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Literatur

K. Magnus: Schwingungen. Teubner Stuttgart 1961, 251 S.

I. P. Den Hartog: Mechanische Schwingungen, 2. Aufl. Springer Berlin–Göttingen–Heidelberg 1952, 427 S.

S. Timoshenko, D. H. Young: Vibration Problems in Engineering. Van Nostrand Toronto u. a. O. 1955, 468 S.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *Christoph Wehrli*, Kempterstr. 8, 8032 Zürich.

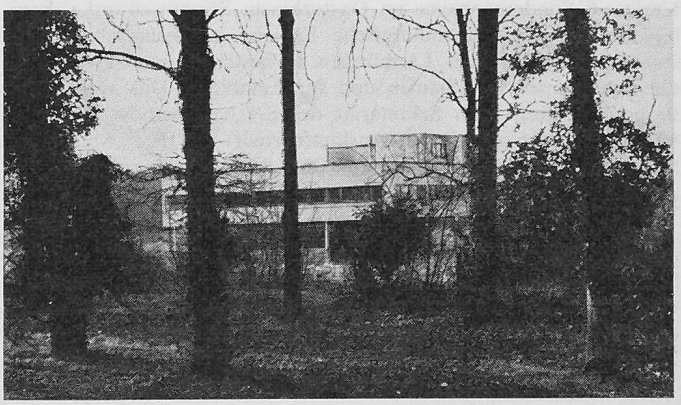
Die Villa Savoie vom Zerfall bedroht DK 72

Die Villa Savoie in Poissy (rd. 20 km nordwestlich von Paris, an der Seine gelegen) ist 1929–31 entstanden. In diesem herrlich gelegenen Bau konnte *Le Corbusier* seine fünf Grundsätze, mit welchen er die Brücke zwischen einer neuen Wohnform und der Technik zu schlagen trachtete, in besonders freier und klarer Form verwirklichen. Es waren dies die 5 Punkte:

1. die frei durchgehenden Stützen (pilotis);
2. Unabhängigkeit der tragenden Konstruktion von der raumabschliessenden und ihre Folge:
3. der freie Grundriss;
4. die freie Fassade, sowie (neben möglichst entlastetem Erdgeschoss)
5. die ausgebildeten Dachgärten.

Heute ist die Villa Savoie vom Zerfall bedroht. Es ist daher ein Verdienst der Architekturstudenten an der ETH und weiterer Kreise, die Aufmerksamkeit des französischen Kultusministers Malraux sowie der Allgemeinheit auf die Erhaltung dieses grundsätzlich wichtigen Werkes des verstorbenen Meisters gerichtet zu haben. Die Villa Savoie wurde im Gesamtwerk «Le Corbusier und Pierre Jeanneret», Vol. 2, 1929–1934, herausgegeben von *W. Boesiger* im Verlag Dr. H. Girsberger, Zürich, publiziert. Ein Vergleich der kurz nach Vollendung erfolgten photographischen Aufnahmen mit den hier wiedergegebenen Bildern aus jüngster Zeit erweist drastisch, wie berechtigt die Sorge um dieses Baudenkmal ist. *G. R.*

Resolution

«Die Architekturabteilung der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, deren Studenten, zusammengeschlossen in der ‹Architektura›, sowie die Teilnehmer an der Gedenkfeier für Le Corbusier

Villa Savoie von Westen gesehen (heutiger Zustand)