ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN INGENIEUR- UND ARCHITEKTEN-VEREINS S.I.A. UND DER GESELLSCHAFT EHEMALIGER STUDIERENDER DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE G.E.P.

Elastisch oder plastisch - das ist hier die Frage

DK 624.04:539.374

Einige Gedanken zur Diskussion zwischen den Herren Prof. Dr. F. Stüssi und Prof. Dr. B. Thürlimann über die Anwendung verschiedener statischer Methoden (siehe SBZ 1962, Heft 4, S. 53, und Heft 8, S. 123 und 136).

Von Dr. sc. techn. **Bernhard Gilg**, dipl. Bau-Ing., Zürich

1. Einleitung

Die Statik ist eine typische Hilfswissenschaft. Als solche liefert sie dem Ingenieur die Berechnungsmittel, welche es ihm erlauben, die Sicherheit seiner Bauwerke abzuschätzen. Denn bekanntlich handelt es sich bei den Sicherheitsfaktoren ja nicht um absolute Zahlen, sondern um *wahrscheinlichste Werte,* da die Annahmen über

a) die Dimensionen des Tragwerkes,
b) die Eigengewichte, Nutzlasten und dynamischen Beanspruchungen,
c) die Qualität der Baustoffe und die daraus resultierenden Festigkeiten sowie
d) den Berechnungsgang

stets mit Fehlern behaftet sind.

Jede statische Berechnung hat also die Aufgabe, über die bei zunehmender Belastung des Tragwerkes in den einzelnen Punkten auftretenden Spannungen und Verformungen möglichst genau Aufschluss zu erteilen, wobei sie den spezifischen Eigenschaften der Baustoffe Rechnung tragen muss.

2. Der Begriff der Sicherheit

Die Sicherheit steht in direktem Zusammenhang mit den Festigkeiten eines Baustoffes. Es sollen nachstehend zwei Sicherheiten definiert werden, eine erste gegen Schädigung, eine zweite gegen Bruch.

a) Sicherheit gegen Schädigung

Wir bezeichnen mit *kritischer Spannung* diejenige Beanspruchung, welche — wenn sie in einem beliebigen Punkt des Tragwerkes auftritt — diesem eine *bleibende, wertvermindernde Verformung* zufügt. Entsprechend dieser Definition kann die kritische Spannung für ein und denselben Baustoff von Punkt zu Punkt sehr verschiedene Werte annehmen. So liegt sie z. B. für eine Auflagerplatte aus Stahl an deren Kontaktfläche mit einem Rollenlager sicher höher als über der Mittelstütze eines Zweifeldbalkens derselben Stahlqualität, da im ersten Fall eine bleibende Verformung lediglich zur Verbreiterung der Auflagerfläche und zu einer unwesentlichen Senkung des Tragwerks führt, während im zweiten Fall eine bleibende Winkeländerung der Stabaxe über der Stütze beträchtliche Verschiebungen verursachen kann.

Wird also eine gewisse Sicherheit gegen Schädigung vorgeschrieben, so heisst das, die auf Grund der statischen Berechnung ermittelten Spannungen dürfen in jedem Punkt des Tragwerks nur einen gewissen Prozentsatz der dort zu einer Schädigung führenden kritischen Spannung betragen.

b) Sicherheit gegen Bruch

Der Belastungszustand, welcher das *Tragwerk zerstört,* soll als *Bruchbelastung* bezeichnet werden. In den meisten Fällen wird nicht nur eine, sondern eine ganze Anzahl von Bruchbelastungen möglich sein, welche mit mehr oder weniger exakten Berechnungsverfahren ermittelt werden können. Wird nun eine gewisse Sicherheit gegen Bruch vorgeschrieben, so heisst das, die tatsächlich auftretenden Lastfälle dürfen nur einen bestimmten Prozentsatz der zum Bruch führenden Lastfälle ausmachen. Der Bruch kann dabei durch Zerreissen oder Stauchen oder durch Instabilität infolge der Bildung von plastischen Gelenken, eventuell auch durch Nachgeben der Fundationen eintreten.

c) Zusammenstellung der Sicherheiten

$$S_1 = \text{Sicherheit gegen Schädigung} = \frac{\text{Kritische Spannung}}{\text{Berechnete Spannung}}$$

$$S_2 = \text{Sicherheit gegen Bruch} = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Vorhandene Belastung}}$$

3. Die statische Berechnung

Entsprechend der Tatsache, dass ein Tragwerk oder ein Gebäude zwei deutlich voneinander verschiedene Sicherheiten besitzt, sind im allgemeinen Fall auch zwei voneinander getrennte statische Berechnungen erforderlich.

Eine erste Berechnung — nennen wir sie die *Normalberechnung* — ermittelt die unter den gegebenen Belastungen auftretenden Spannungen und setzt diese mit den kritischen Spannungen des Tragwerks in Beziehung, woraus der Sicherheitsfaktor S_1 resultiert. Ist der Faktor S_1 vorgeschrieben, so werden mit Hilfe der Normalberechnung für eine gegebene Belastung die erforderlichen Dimensionen des Tragwerkes bestimmt. Da vor der ersten wertvermindernden Verformung der betrachtete Bauteil sich praktisch nur im elastischen Bereich «bewegt», kann die Normalberechnung mit genügender Genauigkeit nach den Prinzipien der klassischen Statik durchgeführt werden und liefert z. B. mit Hilfe von Einflusslinien für jeden beliebigen Querschnitt und Lastfall sämtliche inneren Spannungen und Verformungen.

Eine zweite Berechnung — nennen wir sie die *Bruchberechnung* — hat die Vorgänge bis zum Bruch möglichst wirklichkeitsgetreu zu erfassen und muss somit die bei der Ueberschreitung des elastischen Bereiches auftretenden Phänomene berücksichtigen.

In den meisten Fällen ist die Bruchberechnung ein summarisches Verfahren, d. h. sie gibt nicht über jeden einzelnen Querschnitt, sondern nur über das Tragwerk als Ganzes Auskunft. Ferner ist sie eine gezielte Berechnung, da sie nicht für eine gegebene Belastung den Zustand des Tragwerkes untersucht, sondern für einen gegebenen Zustand — nämlich den Bruch — die nötige Belastung ermittelt. Da theoretisch eine unendlich grosse Anzahl von Lastfällen für den Bruch verantwortlich gemacht werden kann, ist die Auswahl der wesentlichen Fälle nicht immer ganz leicht.

Während die im elastischen Bereich gültige Statik nur unwesentlich von den spezifischen Eigenschaften der Baustoffe beeinflusst wird, variiert die Bruchberechnung nicht nur von Baustoff zu Baustoff, sondern sie kann auch innerhalb ein und desselben Materials sehr verschiedenartig aussehen. Als Beispiel diene der Stahl, welcher bekanntlich je nach Qualität sehr unterschiedliche Spannungs-Dehnungsdiagramme und Wechselbelastungskurven aufweist.

4. Die Anwendung der Sicherheiten

a) Sicherheit und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wie in der Einleitung erläutert wurde, muss für sämtliche bei der Berechnung des Sicherheitsfaktors getroffenen Annahmen mit einer gewissen Fehlerhaftigkeit gerechnet werden. Der Fehler bewirkt ein Abweichen der tatsächlichen Spannung oder Bruchlast von der rechnerisch ermittelten. Werden keine systematischen, sondern nur zufällige Fehler gemacht, so gilt das Gesetz, dass mit zunehmender Fehlergrösse die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten abnimmt. Es soll dies folgendermassen formuliert werden:

Mit der Wahrscheinlichkeit $1/w$ ist die Annahme so falsch getroffen worden, dass die tatsächliche Spannung um p % grösser ist als die berechnete oder die tatsächliche Bruchbelastung um p % kleiner als die berechnete.

Ein Beispiel dazu wäre, dass bei der Normalberechnung in einem von hundert Fällen die tatsächliche Belastung die angenommene um 20 % übertrifft, so dass die tatsächliche Spannung mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_{100}$ um 20 % grösser als die theoretisch ermittelte ausfällt.

Werden die Wahrscheinlichkeiten sowie die ihnen zugeordneten Fehler kumuliert, so ergibt sich z. B. bei drei fehlerhaften Annahmen mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}$$

eine um den Faktor

$$(1 + p_1{}^0/_0)\ (1 + p_2{}^0/_0)\ (1 + p_3{}^0/_0)$$

zu grosse Spannung oder zu kleine Bruchlast.

Der Sicherheitsfaktor kann nun ohne weiteres mit der Wahrscheinlichkeit in Verbindung gebracht werden. Bei den nachstehenden Formeln bedeutet:

σ_{th} die mit der Normalberechnung ermittelte Spannung
σ_{kr} die kritische Spannung
σ_{eff} die effektive Spannung (tatsächliche Spannung)
P_{th} den angenommenen Belastungszustand
$P_{\text{B,th}}$ die mit der Bruchberechnung ermittelte Bruchbelastung
$P_{\text{B,eff}}$ die tatsächliche Bruchbelastung

Ferner entspricht bei den Wahrscheinlichkeiten w und den prozentualen Abweichungen p
der Index 1 den Annahmen für die Tragwerksdimensionen
der Index 2 den Annahmen über die Belastung
der Index 3 den Annahmen über die Festigkeiten
der Index 4 den Annahmen für den Berechnungsgang

Es ist dann

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{th}}\,(1 + p_1)\ (1 + p_2)\ (1 + p_4)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_4}$$

Da die kritische Spannung ebenfalls aus Festigkeitsuntersuchungen ermittelt wurde, stellt sie einen fehlerbehafteten Mittelwert dar. Mit einer Wahrscheinlichkeit $1/w_3$ beträgt die effektive kritische Spannung

$$\sigma_{\text{kr,eff}} = \frac{\sigma_{\text{kr}}}{1 + p_3}$$

Um den Sicherheitsfaktor mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Beziehung zu bringen, müssen wir den in Abschnitt 2, lit. c definierten Ausdruck — z. B. für die Sicherheit S_1 — als Formel aufstellen:

$$S_1 = \frac{\sigma_{\text{kr}}}{\sigma_{\text{th}}} = \frac{\sigma_{\text{kr,eff}}}{\sigma_{\text{eff}}}\,(1 + p_1)\ (1 + p_2)\ (1 + p_3)\ (1 + p_4)$$

Analog lässt sich der Sicherheitsfaktor gegen Bruch formulieren:

$$S_2 = \frac{P_{\text{B,th}}}{P_{\text{th}}} = \frac{P_{\text{B,eff}}}{P_{\text{eff}}}\,(1 + p_1)\ (1 + p_2)\ (1 + p_3)\ (1 + p_4)$$

Dabei stellt P_{eff} die tatsächliche Belastung dar, welche natürlich grösser als die theoretisch angenommene werden kann.

Die Sicherheitsfaktoren sagen uns also, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Tragwerk kritisch (d. h. geschädigt) wird oder einstürzt. Im ersten Fall wird dann die tatsächliche Spannung gleich der effektiven kritischen Spannung, im 2. Fall die tatsächliche Belastung gleich der tatsächlichen Bruchbelastung. In beiden Fällen reduziert sich somit der Sicherheitsfaktor auf den Ausdruck:

$$S_1 = S_2 = (1 + p_1) \ldots\ldots (1 + p_4)$$

Nehmen wir nun an, wir hätten für die Sicherheit gegen Schädigung einen Faktor 1,7 vorgeschrieben, so ist

$$(1 + p_1) \ldots\ldots (1 + p_4) = 1{,}7$$

zu setzen und dafür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4}$$

zu berechnen.

Als praktische Anwendung würde das etwa folgendermassen aussehen:
In 1 von 20 Fällen bewirken falsche Dimensionen eine Spannungszunahme von 15 %,
in 1 von 30 Fällen bewirken falsche Belastungen eine Zunahme von 10 %,
in 1 von 20 Fällen bewirkt eine falsche Berechnungsannahme eine Erhöhung von 10 %,
in 1 von 50 Fällen liegt die kritische Spannung 22 % unter dem versuchstechnisch bestimmten Mittelwert;
dann wird in 1 von 600 000 Fällen das Tragwerk eine bleibende Schädigung erfahren.

b) Wahl der massgebenden Sicherheit

Die immer wieder diskutierte Frage bei der Gegenüberstellung von linearer (elastischer) Statik und Bruchberechnung (unter Berücksichtigung des plastischen Bereiches) ist diejenige der notwendigen oder auch übertriebenen Sicherheit.

Setzen wir ein Tragwerk voraus, bei welchem nach der ersten Schädigung nur noch eine geringe Mehrbelastung nötig ist, um den Bruch herbeizuführen, so dürfte dieses unbestrittenermassen elastisch zu berechnen sein, wobei die Dimensionierung auf Grund des Sicherheitsfaktors S_1 erfolgt.

Stellen wir uns dagegen ein Tragwerk vor, dessen Einsturz erst erfolgt, wenn die zur ersten Schädigung nötige Last um ein mehrfaches überschritten ist, so würde z. B. die Wahl eines Sicherheitsfaktors

$$S_1 = 1{,}7$$

einen Bruchsicherheitsfaktor

$$S_2 = 5$$

zur Folge haben. Dabei stellt sich natürlich sofort die Frage, ob dieses Tragwerk nicht eventuell schlecht dimensioniert ist und ob sich der projektierende Ingenieur nicht mit mehr Aufwand zu einer besseren Abstimmung der Dimensionen der verschiedenen Tragwerksteile (etwa bei einem statisch hochgradig unbestimmten System) durchfinden könnte. Immerhin bleibt auch nach sublimster Projektarbeit unter Umständen eine Diskrepanz zwischen S_2 und S_1, welche nach einer wirtschaftlicheren Lösung ruft, als sie durch die Dimensionierung nach dem Faktor S_1 möglich ist.

Hier sollte nun eben die Wahrscheinlichkeit berücksichtigt werden. Es ist durchaus denkbar, dass eine erste schädliche Verformung schon mit einer Wahrscheinlichkeit von $1:10^4$ (z. B. $S_1 = 1{,}3$) in Kauf genommen werden kann, wenn dafür der Bruch nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $1:10^9$ (z. B. $S_2 = 4$) eintrifft. Was aber unter allen Umständen vermieden werden muss, ist eine gleiche Bruchwahrscheinlichkeit wie im oben zitierten Fall, welcher eine Schädigungswahrscheinlichkeit von vielleicht nur 1 : 10 entspricht, oder — und dieser Fall ist gar nicht ausgeschlossen — eine zwar genügend hohe Sicherheit gegen Bruch, jedoch verbunden mit einer bereits bei normaler Belastung auftretenden schädigenden Verformung (z. B. $S_1 = 0{,}9$).

5. Schlussfolgerungen

Wir haben zu zeigen versucht, dass ein sinnvolles Nebeneinander von elastischer und plastischer Statik möglich ist, allerdings nicht ohne eingehende Studien über die Frage der Wahrscheinlichkeit.

Viele Leser mögen wohl mit etwas gemischten Gefühlen die in den letzten Monaten mit einer gewissen Schärfe geführte Diskussion über das Thema «Elastisch — Plastisch» verfolgt haben. Sie war aber trotz allem — weil sie von kompetenter Seite ausging — sehr aufschlussreich.

Die Schweiz ist ein kleines Land, besitzt aber in Zürich eine seit über 100 Jahren berühmte technische Hochschule, aus welcher schon manche wertvolle Entdeckung in die Welt hinausgegangen ist. Was läge also näher, als dass auch heute wieder von der ETH aus eine die beiden Gesichtspunkte klärende und einende Forschungstendenz sich anbahnen würde, welche sicher zum Nutzen von Wissenschaft und Praxis wäre und überdies vielleicht doch die eine oder andere unliebsame Ueberraschung verhüten dürfte.

Adresse des Verfassers: Ing. Dr. *B. Gilg*, Rifferswil ZH

Nukleare Raketenantriebe

DK 629.1.035.4

Von Dr. **Erich Jantsch**, Baden [1])

Einleitung

Für alle bisher verwirklichten und im Rahmen dieses Aufsatzes in Frage kommenden Raketenantriebe dient als Grundprinzip die Beschleunigung durch Massenausstoss $\dot{m}$ mit einer Ausstossgeschwindigkeit v_{ex}. Die Schubkraft F, die auf die Rakete wirkt, ist dann

(1) $$F = \dot{m}\, v_{ex}$$

die Beschleunigung

(2) $$a = \frac{F}{m} = v_{ex}\frac{\dot{m}}{m}$$

worin m die beschleunigte Masse (Gesamtmasse der Rakete plus unverbrauchter Treibstoff) ist [2]). Die Integration von Gl. (2), oder auch die direkte Anwendung der Erhaltungssätze für Masse und Impuls führen zur Gleichung für die «Ausbrenn»-Geschwindigkeit (die Endgeschwindigkeit der Rakete nach vollständigem Verbrauch des Treibstoffes)

(3) $$v_b = v_{ex} \ln \frac{m_0}{m_b}$$

worin m_0 die Anfangs- und m_b die Endmasse bedeuten. In Gl. (3) sind noch Gravitations- und Reibungsverluste abzuziehen. Im Prinzip könnte also — so lange man nicht in den Bereich relativistischer Geschwindigkeiten gelangt — jede beliebige Endgeschwindigkeit erreicht werden, doch ist für Satelliten- und Weltraumaufgaben, die eine Nutzlastmasse in der Grössenordnung von Tonnen voraussetzen, nach amerikanischen Quellen aus konstruktiven Gründen höchstens mit einem Verhältnis $m_0/m_b = 10$ zu rechnen, d. h. 90 % der Anfangsmasse besteht aus Treibstoff. In den restlichen 10 % macht die eigentliche Nutzlast auch wieder nur einen Bruchteil aus. Die höchste erreichbare Endgeschwindigkeit wäre dann für eine Einstufen-Rakete $v_b = 2{,}3\ v_{ex}$, wovon noch Gravitations- und Reibungsglieder abzuziehen wären. Bei einer Mehrstufen-Rakete addieren sich die Endgeschwindigkeiten.

Grundsätzlich stehen für gegebene Weltraumaufgaben zwei Wege offen, nämlich 1. Hohe, kurzzeitige Beschleunigung (schon fast einem «Abschiessen» vergleichbar), die ein Abheben von Planeten- und Mondoberfläche gestattet, wobei die Rakete sich ausserhalb der kurzen Beschleunigungszeiten bei Start und Landung wie ein Geschoss verhält. Die Optimierung der chemischen und der im folgenden näher ausgeführten nuklear-thermischen Systeme führt zu Konzeptionen mit einer Raketenbeschleunigung zwischen 1,2 und 2 g_0 (g_0 = Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche). 2. Geringe, andauernde Beschleunigung, die Start und Landung nur auf Satellitenbahnen (in Form eines «Hinausspiralens») gestattet. Die weiter unten besprochenen nuklear-elektrischen Systeme mit Beschleunigungen von der Grössenordnung $10^{-4}\ g_0$ bis $10^{-3}\ g_0$ sind für diese Konzeption geeignet. — Grundsätzlich mögliche «Zwischentypen» scheinen heute nicht in sinnvoller Weise verwirklichbar.

Für die «Abschuss»-Variante ergeben sich im Zusammenhang mit typischen «Nahverkehrs»-Aufgaben die folgenden Geschwindigkeitsdifferenzen (wobei sich für mehrere Beschleunigungs- und Bremsmanöver innerhalb der gleichen Mission die nötigen Geschwindigkeitsdifferenzen addieren und eine solche Aufgabe grundsätzlich äquivalent einer Aufgabe ist, die einmaliges Erreichen der totalen Geschwindigkeitsdifferenz verlangt):

8 000 m/s	Erreichen einer niederen Satellitenbahn um die Erde;
11 200 m/s	Entfernung von der Erde ohne Berücksichtigung der Reibung (Abschussgeschwindigkeit $v_0 = (2 r_0 g_0)^{1/2}$ mit r_0 und g_0 als Radius und Beschleunigung an der Oberfläche eines Körpers, führt zu lim $v = 0$, für $r \rightarrow \infty$, wenn allein die Gravitation dieses Körpers betrachtet wird)
14 000 m/s	Start von Erdoberfläche, Mondumkreisung und Rückkehr auf Erdsatellitenbahn;
15 000 m/s	Start von Erdoberfläche und Landung auf Mondoberfläche ohne Rückkehr;
21 400 m/s	Start von Erdoberfläche, Landung und Start auf Mondoberfläche, Rückkehr auf Erdsatellitenbahn;
21 000—25 000 m/s	Schnelle Reise zum Mars (etwa 1 Jahr Flugzeit), Start und Rückkehr auf Erdsatellitenbahn, mit Marsumkreisung;
30 000 m/s	Schnelle Reise zum Mars (etwa 1 Jahr Flugzeit), Start von Erdoberfläche, Marsumkreisung, Rückkehr auf Erdsatellitenbahn.

Bei Start und Landung auf Satellitenbahnen wird die Satellitengeschwindigkeit (also z. B. 8000 m/s im Falle einer niederen Erdsatellitenbahn) ausgenützt, bzw. erspart. Auch bei der Landung auf anderen Himmelskörpern oder auf Satellitenbahnen um andere Himmelskörper spielen Richtung und Grösse der Geschwindigkeit dieses Körpers für eine optimale Flugplanung eine entscheidende Rolle; so wird man etwa auf einem benachbarten Planeten mit Vorteil landen, wenn er sich von der Erde wegbewegt, dann jedoch mit dem Start zur Rückkehr warten, bis er die Rakete der Erde «entgegenwirft».

Mit den heute zur Verfügung stehenden und erprobten chemischen Antrieben erreicht man Ausstossgeschwindigkeiten bis etwa 2500 m/s, mit den in Entwicklung und Erprobung begriffenen O_2-H_2-Systemen und F_2-H_2-Systemen 3400 bis 3500 m/s (jeweils verlustfreie theoretische Werte). Mit 3650 m/s im O_3-H_2-System ist die Grenze für normale chemische Reaktionen erreicht, die allerdings durch das sehr schnelle «Einfrieren» freier Radikale oder höherer atomarer Anregungszustände noch höher gesetzt werden kann (nach einer amerikanischen Aeusserung werden auf diese Weise Ausstossgeschwindigkeiten bis zu 4800 m/s angestrebt).

Es ist sofort zu erkennen, dass selbst die einfachsten der skizzierten Weltraumaufgaben auf chemischem Wege nur mit mehrstufigen Systemen ausgeführt werden können und

[1]) Gekürzte Fassung eines am 28. Sept. 1961 vor der Ortsgruppe Baden der G. E. P. gehaltenen Vortrags. Vgl. auch den Aufsatz von Prof. Dr. J. Ackeret [7], der einige einschlägige Probleme etwas ausführlicher diskutiert.

[2]) In der anglo-amerikanischen Literatur findet man in der Regel anstelle der Ausstossgeschwindigkeit v_{ex} den spezifischen Impuls $I_s = v_{ex}/g_0$ mit der Dimension einer Zeit; der Schub F erhält dann die Dimension eines Gewichtes entsprechend dem technischen Massystem; die Division durch das Raketen-«Gewicht» (wie es auf der Erdoberfläche wäre) ergibt eine dimensionslose Beschleunigung in Einheiten von $g_0 = 9{,}81$ m/s². Da die Unsinnigkeit und Willkürlichkeit des Mitschleppens von g_0 gerade bei Raketen, die sich in fremde Gravitationsfelder oder sogar in praktisch gravitationsfreie Räume begeben können, besonders krass zutage tritt, seien unsere Betrachtungen konsequent auf die von Gravitationskräften unabhängigen Begriffe der Masse und der Ausstossgeschwindigkeit und ihre Einheiten im Giorgi-System abgestellt.