

# La scie à ruban: un problème cinématique et statique

Autor(en): **Lombardi, Jean**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **72 (1954)**

Heft 25

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-61206>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## La scie à ruban Un problème cinématique et statique

Par Jean Lombardi, Ing. civil EPF, Berne

DK 621.935

### 1. Introduction

Il nous a été donné de constater, auprès des constructeurs de métiers à ruban de divers pays, une méconnaissance totale des lois régissant le comportement de ces scies, ou plus exactement de celles qui concernent la tenue des lames sur des volants bombés.

Souvent même, nous avons rencontré une ignorance certaine de la nature des phénomènes qui interviennent. Et il nous a semblé, par ailleurs, qu'un empirisme, que l'on aimerait croire révolu, présidait encore seul au choix des solutions mécaniques et à la détermination quantitative de divers paramètres réglant ce comportement. Si besoin était, on trouverait la preuve de ces affirmations dans le grand nombre de machines insatisfaisantes existant sur le marché.

En réalité, il semble bien qu'aucune étude théorique portant sur l'équilibrage des lames n'ait encore été entreprise. Ce fait s'explique aisément par la nature particulière du problème, qui se trouve être à la limite de plusieurs domaines de la science de l'ingénieur. En effet, les nombreuses questions posées par la construction et le fonctionnement des métiers à ruban relèvent de diverses disciplines physiques. Le problème qui nous occupera ici est cependant l'un des plus importants et des moins bien connus, car il est assez difficile, de prime abord, de comprendre les raisons qui font qu'une lame de scie s'enroulant sur des volants se maintienne en équilibre sur le sommet des bombés.

Ayant eu le loisir d'étudier mathématiquement cette question, nous avons été heureusement surpris de trouver qu'il en existe une solution générale et somme toute très simple. Nous pensons rendre service aux constructeurs en exposant ci-après une méthode de calcul et en montrant les avantages immédiats que l'on peut tirer de son application. Nous nous proposons d'étudier les lois régissant la tenue d'une lame sur les volants lorsque celle-ci est soumise aux efforts de sciage, c'est-à-dire aux réactions exercées par la pièce de bois à scier. Accessoirement, nous parlerons des sollicitations du ruban. Notons encore que la théorie que nous exposons est susceptible d'être appliquée à d'autres éléments mécaniques, tels que courroies de transmission ou tapis roulants.

### 2. Le problème de la tenue des lames (ou l'équilibrage des lames)

Nous considérons une lame de scie s'enroulant sur deux volants bombés et inclinables, dont l'un est moteur <sup>1)</sup>. La lame sera initialement tendue par une force connue  $S$  et elle sera soumise sur l'un de ses deux brins libres à des forces externes  $H$  et  $M$  agissant dans son plan (figure 1).

Le problème consiste à étudier l'équilibre cinématique et élastique de la lame et à chercher notamment les lois qui

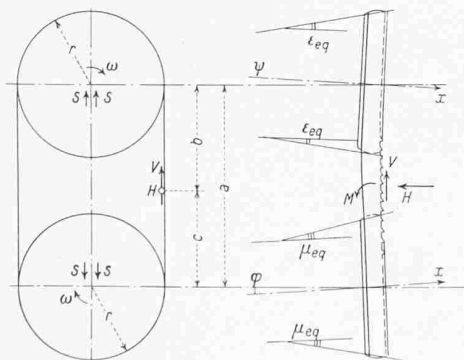


Fig. 1

<sup>1)</sup> Ce faisant, nous généralisons le problème, puisque les métiers à ruban ne comportent habituellement qu'un seul volant inclinable et bombé, l'autre étant fixe et cylindrique. Nous nous réservons de justifier cette généralisation par les applications qu'elle permettra.

relient les forces externes à la position occupée par le ruban sur les volants.

Avant d'entreprendre l'étude analytique, il est cependant opportun de rappeler certains faits élémentaires dont la connaissance facilitera grandement la compréhension de l'exposé.

On sait qu'un fil sans rigidité s'enroule sur un tambour cylindrique ou conique suivant une hélice dont le pas est déterminé par l'angle compris entre l'axe du fil et celui du tambour, au moment de leur premier contact. Ainsi, un fil formant courroie ne s'enroulera d'une manière stable sur deux poulies que s'il peut rentrer sur chacune d'elles normalement à leur axe. Si les axes de celles-ci convergent, le fil ne peut s'enrouler d'une façon stable et tend à se déplacer vers le point de concourance des axes.

Des considérations géométriques montrent d'autre part, qu'un ruban droit s'enroulant sur un cône finit toujours par se déplacer vers la base de celui-ci. Autrement dit, un ruban ne peut s'enrouler le long d'une directrice d'un cône que s'il possède, avant de le faire, une courbure latérale égale à celle que le cône lui impose par la suite, et que si sa tangente est normale à l'axe du cône au moment de leur entrée en contact.

Il est maintenant aisé d'étudier le problème de la scie à ruban comme se réduisant à une combinaison de ces cas élémentaires. En particulier, si l'on considère un volant ou une poulie formé par deux cônes opposés, à base commune, on conçoit qu'une courroie s'enroulant sur cette poulie aura tendance à se déplacer vers la base des cônes et donc à prendre, sous certaines conditions, une position d'équilibre dans le plan médian de la poulie. On saisit ainsi aussitôt et intuitivement l'effet stabilisant du bombé et, partant, on comprend qu'une lame puisse se maintenir sur des volants bombés.

Une remarque s'impose cependant encore. Il est évident que si les forces agissant sur la lame changent d'intensité, la position de la lame sur les volants se modifie aussi. Ce déplacement demande naturellement un certain temps, c'est-à-dire un certain nombre de tours pendant lesquels la lame s'enroule en spirale sur les volants. En pratique, il s'avère néanmoins inutile de suivre par le calcul ces déplacements, et il suffit de connaître les diverses positions d'équilibre correspondant aux diverses valeurs des forces.

Nous savons maintenant que, dans toute position d'équilibre cinématique, la lame doit entrer sur chaque volant perpendiculairement à l'axe de celui-ci, et qu'elle doit le faire avec la courbure latérale correspondant à la conicité du volant. Ces deux constatations permettent de résoudre le problème sans difficulté.

Nous formulerons d'abord les hypothèses faites, qui sont très restreintes et pratiquement toujours satisfaites. Nous admettons que:

1. chaque volant est un corps de rotation indéformable,
2. les axes des deux volants restent toujours dans un plan (vertical p. ex.),
3. les volants sont assez larges pour que la lame n'en sorte pas (dents de scie non comprises),
4. la lame est droite et plane; ses propriétés physiques sont constantes le long de son axe,
5. la lame se comporte élastiquement,
6. la force initiale de tension est suffisante pour assurer une adhésion parfaite de la lame sur les volants bombés,
7. cette force ne varie pratiquement pas ni par suite des réactions exercées par le bois, ni en fonction de la position de la lame sur les volants,
8. la résultante des forces opposées par le bois ainsi que son point d'application sont supposés connus.

### 3. Le cône équivalent

On a vu l'influence de la conicité d'une poulie sur le comportement de la courroie et l'action stabilisatrice du bombé d'un volant. Pour saisir quantitativement ces effets, il s'avère adéquat d'introduire la notion de cône équivalent.

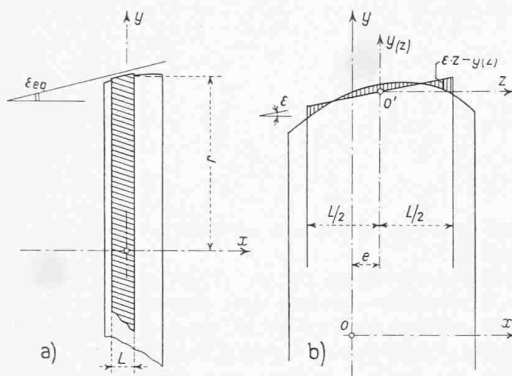


Fig. 2

La figure 2 montre un volant bombé dont une certaine partie est recouverte par une lame enroulée de manière que son axe se trouve dans un plan parallèle à celui du volant.

Par suite du bombé, les diverses fibres longitudinales de la lame subissent une elongation différente; de ce fait résulte une flexion latérale de celle-ci, donc une courbure latérale qui caractérise l'influence du volant. On conçoit que le comportement d'ensemble de la lame ne sera pas affecté si l'on substitue à ce volant un cône de demi-ouverture  $\epsilon_{eq}$  convenablement choisi. Nous l'appelons «cône équivalent», et disons qu'il doit imposer à la lame la même courbure latérale que la portion de volant intéressée.

Il est évident que, pour un volant donné, le cône équivalent varie avec la position et la largeur de la lame, sous réserve que celle-ci ne sorte jamais du volant<sup>2)</sup>.

En partant de ces remarques, le calcul de l'angle du cône équivalent est aisé. La figure 2b représente la partie du volant couverte par une lame de largeur  $L$ , ainsi que le cône cherché. Soit  $O$  l'origine des coordonnées  $x$  et  $y$ , fixes par rapport au volant, et soit  $e$  la distance de l'axe de la lame à cette origine; nous définissons alors l'abscisse locale par:  $z = x - e$ .

Le profil du volant est représenté par  $y(z)$ . Puisque nous avons supposé un contact parfait de la lame et du volant, le moment statique par rapport à  $O'$  de la surface hachurée, comprise entre le profil du volant et celui du cône, doit être nul afin qu'il existe l'égalité voulue entre les flexions latérales de la lame pour les deux cas. Il faut donc avoir:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} [\epsilon_{eq} z - y(z)] z dz = 0,$$

d'où l'on tire:

$$(1) \quad \epsilon_{eq} = \frac{12}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} y(z) z dz$$

Le calcul de cette intégrale est aisé. Si, par exemple, le profil du volant est parabolique avec un rayon de courbure  $\rho$  au sommet, on a:

$$y = \frac{-x^2}{2\rho} = \frac{-(z+e)^2}{2\rho},$$

et le calcul donne:

$$(2) \quad \epsilon_{eq} = \frac{-e}{\rho}$$

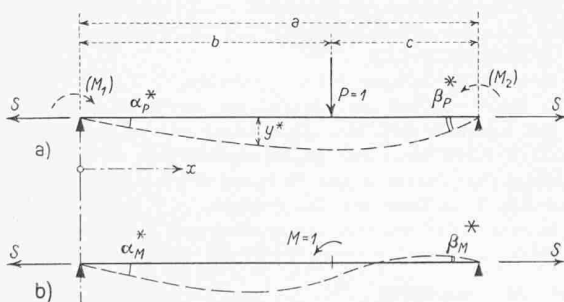


Fig. 3

<sup>2)</sup> Si la lame dépassait les bords du volant, la notion de cône équivalent resterait valable, mais le calcul qui suit perdrait sa valeur.

Dans ce cas particulier, et comme il fallait s'y attendre, le cône équivalent coïncide avec le cône tangent au volant dans l'axe de la lame. Son angle d'ouverture varie donc linéairement avec la position de cette dernière.

4. Formules pour le hauban

Entre un volant et l'autre, le ruban se comporte dans son plan comme une poutre tendue et fléchie, c'est-à-dire comme un hauban chargé transversalement. Il y a donc lieu de rappeler brièvement ou de dériver quelques formules applicables à celui-ci.

Pour le problème qui nous occupe, il faut d'abord connaître les angles de rotation de l'axe du hauban à ses points d'appui pour divers cas de charge. Nous nous contenterons de donner les expressions pour ces valeurs sans insister sur les autres grandeurs statiques, puisque l'établissement des formules qui les concernent n'offre aucune difficulté.

Considérons le hauban d'une portée  $a$  et d'inertie constante  $EJ$  représenté par la figure 3a. Nous supposons qu'il est tendu par une force  $S$  et qu'il porte une charge concentrée  $P$  à une distance  $c$  de l'appui droit.

Selon *S. Timoshenko* (Résistance des Matériaux, deuxième Partie), l'équation de la ligne élastique du hauban entre l'appui gauche et le lieu de la charge est la suivante si l'on pose  $p^2 = S/EJ$ :

$$y^* = -\frac{P \sinh p c}{S p \sinh p a} \sinh p x + \frac{P c x}{S a} \quad 0 \leq x \leq a - c$$

On déduit immédiatement de cette formule les rotations aux appuis pour une charge unitaire concentrée; ce sont:

$$(3) \quad \alpha_p^* = \frac{\partial y^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{S} \left( \frac{c}{a} - \frac{\sinh p c}{\sinh p a} \right)$$

$$\beta_p^* = -\frac{\partial y^*}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{1}{S} \left( \frac{a-c}{a} - \frac{\sinh p(a-c)}{\sinh p a} \right)$$

Nous désignons par un astérisque les valeurs s'appliquant au hauban pour les différencier de celles relatives à la poutre simple.

Pour le cas de charge de la figure 3b, nous trouvons les rotations aux appuis sous l'effet du moment  $M$ , en formant la dérivée selon  $c$  des valeurs que nous venons d'obtenir. On peut en effet considérer que le moment unitaire  $M$  est produit par le déplacement  $dc$  d'une force  $1/dc$ .

Nous obtenons ainsi:

$$(4) \quad \alpha_M^* = \frac{\partial \alpha_p^*}{\partial c} = \frac{1}{a S} \left( 1 - p a \frac{\cosh p c}{\sinh p a} \right)$$

$$\beta_M^* = \frac{\partial \beta_p^*}{\partial c} = \frac{1}{a S} \left( p a \frac{\cosh p(a-c)}{\sinh p a} - 1 \right)$$

Il nous suffit de faire  $c=0$  ou  $c=a$  dans ces formules, afin d'obtenir les rotations aux appuis sous l'effet de moments d'encastrement unitaires. Avec les notations habituelles en statique, nous avons:

$$(5) \quad \alpha_1^* = \beta_1^* = \frac{1}{a S} (p a \coth p a - 1)$$

$$\alpha_2^* = \beta_2^* = \frac{1}{a S} \left( 1 - \frac{p a}{\sinh p a} \right)$$

En passant à la limite  $S \rightarrow 0$  et donc  $p a \rightarrow 0$ , on retrouve évidemment les formules valables pour la poutre simple, à savoir:

$$(6) \quad \alpha_P = \frac{c(a^2 - c^2)}{6 E J a} \quad \beta_P = \frac{c(a-c)(2a-c)}{6 E J a}$$

$$\alpha_M = \frac{a^2 - 3c^2}{6 E J a} \quad \beta_M = \frac{2a^2 - 6ac + 3c^2}{6 E J a}$$

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{a}{3 E J} \quad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{a}{6 E J}$$

Afin de pouvoir apprécier l'influence de la force de traction  $S$  sur les déformations du hauban, nous avons dressé le Tableau I qui donne les valeurs de ces angles de rotation, en fonction du paramètre  $p a$  dans le cas où  $c = a/2$ .

A l'aide de ces divers résultats, nous pouvons maintenant entreprendre le calcul de l'équilibre de la lame de scie.

5. L'équilibre de la lame

Considérons en premier lieu le brin de retour représenté par la figure 4. Sur celle-ci, les angles d'inclinaison des arbres des volants sont désignés par  $\psi$  et  $\varphi$ , les angles d'ouverture des cônes équivalents pour la position considérée de la lame par  $\varepsilon_{eq}$  et  $\mu_{eq}$ . En général, il y aura un décalage par rapport à une verticale entre les points de contact de la lame avec les deux volants; il sera désigné par  $f$ . Dans cette figure, toutes les valeurs indiquées le sont dans leur sens positif.

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, la tangente au ruban doit être normale à l'arbre des volants aux points de contact avec ceux-ci; il faut donc avoir<sup>3)</sup>:

$$\alpha = \psi \text{ et } \beta = \varphi$$

Par ailleurs, lors de sa rentrée sur le volant supérieur, le brin de retour doit posséder une courbure correspondant au cône équivalent, ce qui donne:

$$M_1 = - \frac{E J \varepsilon_{eq}}{r}$$

si  $M_1$  est le moment de flexion latérale du ruban et  $r$  le rayon moyen du volant supérieur.

Avec ces données, les conditions d'élasticité habituelles

$$(7) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + f/a$$

et

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 - f/a$$

se transforment comme suit, puisque  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ :

$$- \alpha_1 E J \varepsilon_{eq}/r + \alpha_2 M_2 + f/a - \psi = 0$$

$$- \beta_1 E J \varepsilon_{eq}/r + \beta_2 M_2 - f/a - \varphi = 0$$

De ces formules, on tire immédiatement:

$$(8) \quad f \doteq a (\alpha_1 - \alpha_2) E J \varepsilon_{eq}/r + a (\alpha_1 \psi - \alpha_2 \varphi) / (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$M_2 = + E J \varepsilon_{eq}/r + (\psi + \varphi) / (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Nous signalerons en passant que la valeur calculée pour  $M_2$  ne correspond pas forcément à la courbure imposée à la lame par le cône équivalent du volant inférieur. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Avec la valeur obtenue pour le décalage  $f$ , nous pouvons maintenant procéder au calcul du brin chargé, ou brin sciant, représenté par la figure 5. En effet, le décalage  $f$  est le même pour les deux brins, puisque nous avons supposé que les axes des volants se trouvent dans un même plan vertical.

Les forces externes se réduisent à une force horizontale  $H$  et à un couple  $M$  agissant les deux en un point  $C$  supposé connu. La force  $H$  est la poussée du bois, tandis que le couple  $M$  est dû essentiellement à l'excentricité, par rapport à l'axe de la lame, de la résistance verticale de sciage  $V$  qui agit au bout des dents. La force  $V$  elle-même peut être négligée devant la tension  $S$  de la lame, car elle n'a pratiquement pas d'influence sur les déformations.

Pour ce brin, les conditions sont comme pour l'autre:

$$\alpha = \psi \text{ et } \beta = \varphi,$$

mais, cette fois, le moment à l'appui inférieur est:

$$M_4 = - E J \mu_{eq}/r,$$

si  $r$  représente le rayon moyen du volant inférieur que, pour simplifier, nous supposons égal à celui du volant supérieur.

Les conditions d'élasticité (7) s'écrivent dans le cas présent comme suit:

$$\alpha_p H + \alpha_M M + \alpha_1 M_3 - \alpha_2 E J \mu_{eq}/r + f/a - \psi = 0$$

et

$$\beta_p H + \beta_M M + \beta_1 M_3 - \beta_2 E J \mu_{eq}/r - f/a - \varphi = 0$$

La valeur de  $M_3$  s'obtient immédiatement. En l'éliminant, on trouve:

$$H (\alpha_p \alpha_2 - \beta_p \alpha_1) + M (\alpha_M \alpha_2 - \beta_M \alpha_1) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) E J \mu_{eq}/r + f (\alpha_1 + \alpha_2) / a + \psi \alpha_2 + \varphi \alpha_1 = 0$$

d'où, en introduisant (8), on tire finalement:

$$(9) \quad \frac{H r (\alpha_p \alpha_2 - \beta_p \alpha_1)}{E J (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} + \frac{M r (\alpha_M \alpha_2 - \beta_M \alpha_1)}{E J (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} + \frac{(\psi + \varphi) r}{(\alpha_1 + \alpha_2) E J} = - (\mu_{eq} + \varepsilon_{eq})$$

6. Application des formules obtenues

La solution à tout problème d'équilibrage des lames est fournie par les formules (8) et (9). L'application pratique de celles-ci procède des remarques suivantes. Deux cas de charge uniquement, à savoir la marche à vide et le travail de sciage à pleine charge, sont pratiquement à considérer pendant l'exploitation d'un métier à ruban. Normalement, on examine d'abord le cas de marche à vide. Le scieur règle donc les inclinaisons des arbres des deux volants pour que la lame occupe une position déterminée par des conditions évidentes de bon fonctionnement. Ce réglage effectué, les angles des volants ne seront plus modifiés au cours du sciage.

Le parallèle mathématique de cette opération consiste à déterminer d'abord par l'expression (1) les cônes équivalents aux volants pour la position choisie pour la lame, puis à calculer les angles d'inclinaison des volants par les formules (8) et (9) en annulant dans (9) les membres de charge ( $H = 0, M = 0$ ). Cette première opération s'effectue facilement après avoir choisi la valeur de la force initiale de tension  $S$  en fonction de considérations étrangères au problème que nous étudions ici.

Au cours du sciage, la lame reculera sur les volants et occupera finalement une position telle que la variation des cônes équivalents aux volants, consécutive à ce recul, permette d'équilibrer les réactions du bois. Le calcul direct de cette position par (8) et (9) n'est possible que dans certains cas et sera en général assez compliqué. Il est aisé, par contre, de contourner la difficulté en admettant successivement diverses positions de la lame, et en déterminant par ces mêmes formules les valeurs des forces ( $H$  et  $M$ ) nécessaires à lui imposer ces positions. On procédera de la sorte jusqu'à ce que l'on obtienne une concordance suffisante entre les forces données et les valeurs calculées. On conçoit que l'emploi de graphiques peut simplifier considérablement ce calcul; nous n'insisterons cependant pas sur ce point.

7. Discussion des formules

a) Symétrie du métier

Si nous passons maintenant à la discussion des formules que nous venons d'établir, nous sommes tout d'abord amené à souligner la symétrie de la relation (9) par rapport aux deux volants. En effet, dans cette formule interviennent, pour équilibrer les forces externes, d'une part la somme des inclinaisons des arbres des deux volants, et d'autre part la somme des angles des cônes équivalents. L'expression (8) par contre ne contient que l'angle équivalent au volant supérieur. On se rend compte toutefois, lors des applications numériques, que cette asymétrie est sans grande importance. On peut donc affirmer que la pratique courante, consistant à ne bomber et à n'incliner qu'un seul volant (le volant supérieur en général),

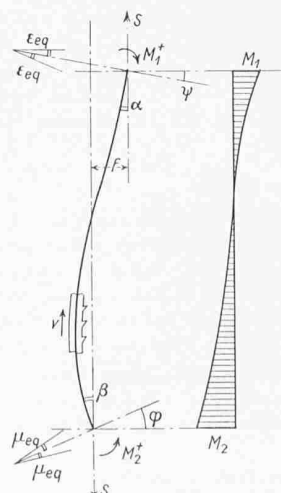


Fig. 4

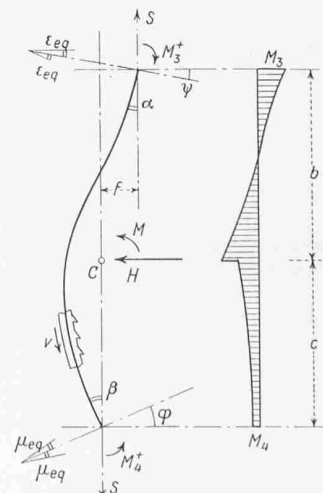


Fig. 5

<sup>3)</sup> Dans le calcul de ce paragraphe, nous n'écrivons pas les astérisques, puisqu'il est valable aussi bien pour la poutre que pour le hauban.



va à l'encontre de la symétrie de ces formules. Cette constatation n'a pas seulement une valeur théorique, mais aussi une très grande importance pratique. Pour preuve de cette affirmation, il suffit de dire qu'il nous a été possible de réduire dans des proportions considérables les sollicitations des lames et d'en éliminer complètement les ruptures, fréquentes auparavant, en rétablissant mécaniquement cette symétrie entre les deux volants d'une machine de construction courante (procédé breveté). Cette réduction des sollicitations de flexion a permis d'augmenter très sensiblement la force de tension initiale et d'éliminer entièrement le travail de tensionnage. On obtient ainsi un sciage meilleur, une économie de travail et une plus grande sécurité d'exploitation, au total donc une augmentation sensible du rendement et de la productivité.

b) Tension initiale

Un problème annexe, posé par le métier à ruban, est le choix de la force de tension initiale des lames.

Ce choix est influencé par de nombreux facteurs dont la plupart sont étrangers à la question qui nous occupe. Mais il est naturel de penser que la tenue des lames sur les volants est fonction de cette traction, ainsi qu'en témoignent d'ailleurs les formules (3), (4), (5) et le Tableau I. Il importe donc de se rendre compte directement de cette influence sur la tenue de la lame, c'est-à-dire sur la résistance au recul opposée par celle-ci.

L'exemple numérique exposé au paragraphe suivant montre que, contrairement à la première impression, l'on n'améliore que de peu la tenue de la lame en augmentant la force de traction initiale au delà de la valeur nécessaire à bien la faire adhérer sur les volants. Cette constatation permettra en général de négliger dans les calculs l'influence de *S* et d'employer les formules suivantes plus simples, obtenues à partir de (8) et (9) en passant à la limite *S* → 0.

$$(10) f = \frac{a^2}{6r} \epsilon_{eq} + \frac{a}{3} (2\psi - \varphi) \text{ et}$$

$$(11) - \frac{Hc b^2 r}{E J a^2} + \frac{M b (2c - b) r}{E J a^2} + \frac{2r}{a} (\psi + \varphi) + (\mu_{eq} + \epsilon_{eq}) = 0$$

c) Continuité de la courbure

Une remarque s'impose encore, qui a trait à la continuité de la courbure transversale de la lame à la sortie des volants. En effet, nous avons imposé à la lame au moment de sa rentrée sur les volants une courbure transversale égale à celle qu'elle aura sur le volant lui-même. Or, rien ne permet d'affirmer qu'immédiatement après la sortie des volants, une égalité semblable subsistera. Au contraire, des exemples numériques ont montré, qu'il peut y avoir des cas où, mathématiquement, il existe une discontinuité dans la courbure transversale, et partant dans les moments de flexion. Il est évident qu'une telle discontinuité n'est pas une réalité physique. Il faut donc supposer que, dans une zone limitée située près de ces points, il se produit des glissements entre lame et volant qui engendrent des efforts de frottement, dont la résultante est un couple compensant la discontinuité mentionnée plus haut. Ce phénomène ne modifie pas, ainsi que des essais l'ont montré, le comportement d'ensemble de la lame, mais il a une certaine importance quant à l'usure des volants. Le constructeur de métiers devra donc avoir soin de réduire au maximum ces glissements en choisissant convenablement les valeurs des bombés et les inclinaisons des arbres.

8. Les sollicitations du ruban

En utilisant les résultats de la théorie développée plus haut ainsi que les méthodes de la résistance des matériaux, il est aisé de calculer les sollicitations du ruban en chaque point. Nous n'insisterons pas sur le détail de ces calculs, mais nous croyons utile de rappeler brièvement les divers efforts auxquels le ruban est soumis et dont il faut tenir compte:

- a) tensions internes dues au «tensionnage» (nous entendons par là la pratique courante consistant à laminer à froid, pour l'allonger, la partie médiane du ruban sans toucher aux bords),
- b) contraintes dues à la force de tension initiale,
- c) celles dues à la force centrifuge,

Tableau I

<i>p a</i>	$\frac{E J \alpha_P^*}{a^2}$	$\frac{E J \alpha_M^*}{a}$	$\frac{E J \alpha_1^*}{a}$	$\frac{E J \alpha_2^*}{a}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
0	0,062 50	0,041 66	0,333 3	0,166 7	2,000	8,000	16,00
0,1	0,062 50	0,041 64	0,333 3	0,166 7	1,999	7,998	16,00
0,2	0,062 25	0,041 60	0,332 5	0,166 5	2,004	8,016	16,06
0,5	0,060 92	0,041 30	0,328 0	0,161 9	1,999	8,042	16,42
1,0	0,056 60	0,040 48	0,313 0	0,149 9	2,029	8,178	17,67
1,5	0,050 58	0,039 08	0,292 1	0,131 4	2,035	8,371	19,77
2,0	0,043 99	0,037 27	0,268 7	0,112 1	2,061	8,657	22,73
2,5	0,037 64	0,035 15	0,245 4	0,093 9	2,091	9,014	26,57
3,0	0,031 94	0,032 83	0,223 9	0,077 8	2,123	9,446	31,31
4,0	0,022 94	0,028 03	0,187 7	0,053 3	2,192	10,505	43,59
5,0	0,016 74	0,023 47	0,160 0	0,037 3	2,254	11,787	59,74
10,0	0,004 93	0,009 32	0,090 0	0,010 0	2,362	20,268	202,84
20,0	0,001 245	0,002 49	0,047 5	0,002 5	2,222	40,160	803,21
∞	0,000 00	0,000 00	0,000 0	0,000 0	2,000	∞	∞

$\beta_1^* = \alpha_2^* \quad \beta_2^* = \alpha_1^* \quad \text{Pour } c = a/2: \beta_P^* = \alpha_P^* \text{ et } \beta_M^* = -\alpha_M^*$

- d) tensions dues au bombé (adaption de la longueur des diverses fibres du ruban au profil du volant),
- e) enroulement de la lame sur les volants (pliage alterné),
- f) sollicitations de la lame à la flexion latérale conformément à la théorie exposée plus haut,
- g) efforts dans les dents dus à la résistance du bois (flexion, compression, cisaillement),
- h) effet d'entaille, c'est-à-dire répartition non-linéaire des tensions sur la section de la lame par suite de la présence des dents,
- i) efforts divers, tels que: vibrations, accélérations, chocs, effets thermiques etc.

On notera encore que les ruptures des lames sont dues au dépassement de la résistance à la fatigue. C'est pourquoi on aura soin de calculer non seulement les contraintes extrêmes, mais encore l'amplitude de variation des sollicitations.

On conçoit facilement que le nombre impressionnant d'efforts subis par la lame explique les ruptures fréquemment constatées. Par voie de conséquence, on saisit aussitôt l'intérêt que présente une méthode de calcul permettant de réduire, par une construction plus judicieuse, un certain nombre de ces sollicitations. C'est le cas de la méthode exposée dans cette étude pour les efforts de flexion latérale.

9. Exemple d'application

En vue de donner une idée de l'ordre de grandeur des divers paramètres intervenant dans le problème de l'équilibre, et pour montrer l'application des formules que nous

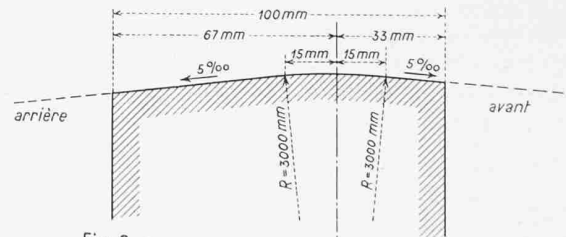


Fig. 6

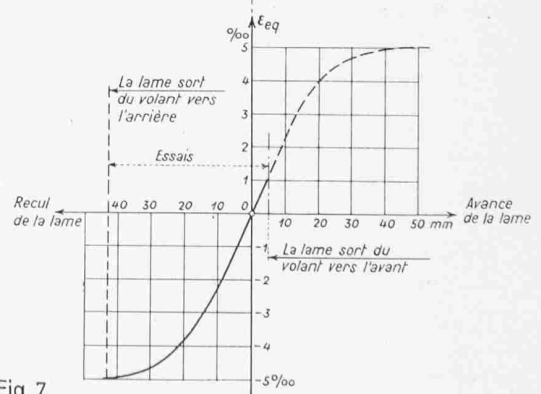


Fig. 7

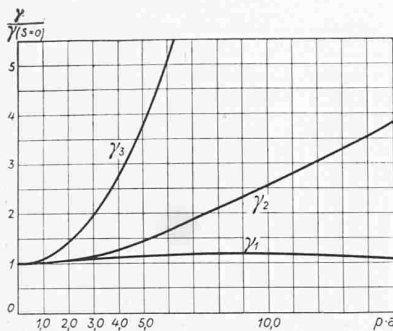


Fig. 8

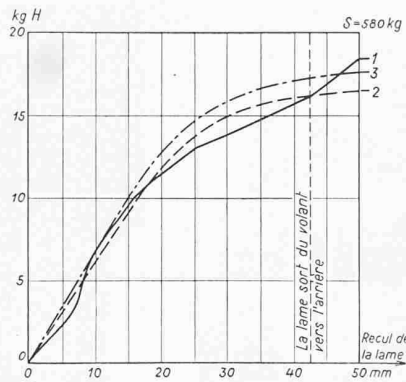


Fig. 9

avons dérivées, nous allons étudier numériquement la tenue d'une lame sur un métier de construction habituelle.

Nous admettons les valeurs suivantes relevées sur un métier à refendre Guillet type MED ayant servi à divers essais:

rayons des volants:	$r = 55,0$ cm
entr'axe des volants:	$a = 168,0$ cm
largeur de la lame:	$L = 5,8$ cm
épaisseur de la lame:	$= 0,1$ cm

Le volant inférieur est cylindrique et son axe est fixe; le volant supérieur est inclinable et possède un bombé comme indiqué par la figure 6.

La variation du cône équivalent au volant supérieur calculé suivant la formule (1) est donnée par la figure 7 qui montre bien l'influence stabilisante du bombé. Il est évident que la ligne dessinée est valable aussi longtemps que la lame ne sort pas des volants.

Le décalage  $f$  entre les points de contact de la lame avec les deux volants peut se calculer par la formule (8). Si nous admettons, pour simplifier, que les axes des volants sont horizontaux, c'est-à-dire que  $\psi = \varphi = 0$ , nous trouvons:

$$f = \frac{a^2}{r} \varepsilon_{eq} \left( \frac{\alpha_1 E J}{a} - \frac{\alpha_2 E J}{a} \right)$$

A l'aide des valeurs numériques données ci-dessus, de la figure 7 et du Tableau I, on peut calculer ce décalage. En effet nous avons:

$$(12) \quad p a = \sqrt{\frac{S a^2}{E J}} = \sqrt{\frac{S}{120}} \quad S \text{ en kg}$$

On voit par exemple que la valeur maximum de  $f$  est donnée pour le cas  $S = 0$  et  $\varepsilon_{eq} = 5\%$ , soit:

$$f_{max} = \frac{a^2}{r} \varepsilon_{eq max} \left( \frac{\alpha_1 E J}{a} - \frac{\alpha_2 E J}{a} \right)_{max}$$

$$f_{max} = \frac{168^2}{55} \frac{5}{1000} (0,1667) = 0,4 \text{ cm}$$

Si  $S$  augmente jusqu'à donner une tension d'environ 1000 kg/cm<sup>2</sup>, le décalage  $f$  ne diminue que de 10 %. De cet exemple, on déduit que  $f$  est relativement petit et peu sensible à l'influence de la tension initiale  $S$ , et qu'en pratique on peut se servir de la formule (10) en lieu et place de (8).

Pour montrer l'application de la formule (9) sans devoir entrer dans des calculs trop étendus, nous supposons que les forces de résistance du bois agissent à mi-distance entre les deux volants. Nous avons donc  $c = a/2$ ; il s'en suit:

$$\beta_P = \alpha_P \text{ et } -\beta_M = \alpha_M$$

La formule (9) se simplifie alors et devient:

$$-H + M \frac{\alpha_M}{\alpha_P} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{E J}{r} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_P} (\mu_{eq} + \varepsilon_{eq}) + \frac{(\psi + \varphi)}{\alpha_P} = 0$$

Nous pouvons écrire aussi:

$$(13) \quad H = \frac{M}{a} \gamma_1 + \frac{E J}{r a} (\mu_{eq} + \varepsilon_{eq}) \gamma_2 + \frac{E J}{a^2} (\psi + \varphi) \gamma_3$$

où  $\gamma_1 = a \frac{\alpha_M}{\alpha_P} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$ ,  $\gamma_2 = a \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_P}$ ,  $\gamma_3 = \frac{a^2}{E J \alpha_P}$

La variation de ces trois dernières fonctions est indiquée par le tableau I et la figure 8. Il est évident que ces valeurs

ne sont valables que dans un certain domaine de  $p a$ . La limite inférieure de ce domaine est donnée par la valeur de la force de tension minimum nécessaire pour bien faire adhérer la lame sur les volants. Cette force est essentiellement fonction de l'importance des bombés et d'un éventuel «tensionnage» de la lame. La limite supérieure de validité est fixée par la limite d'élasticité du métal de la lame, compte tenu dans la pratique d'une certaine marge de sécurité. L'étude de cette figure montre en premier lieu que le coefficient  $\gamma_1$  ne varie que très faiblement en fonction de  $p a$  et donc de  $S$ . Pour simplifier, on peut admettre dans le domaine d'applications normales:  $\gamma_1 \approx 2,2$ . Les deux fonctions  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  varient par

$$\gamma_2 = 8 + 0,15 (p a)^2$$

$$\gamma_3 = 16 + 1,8 (p a)^2$$

contre bien plus sensiblement, et on peut en approcher la variation par les courbes suivantes:

Une fois les coefficients de ces formules déterminés pour chaque cas particulier, ces dernières permettent d'étudier facilement la variation de  $H$  en fonction de  $p a$ , c'est-à-dire de la force  $S$ . Il est clair que les calculs que nous venons d'indiquer doivent s'effectuer dans chaque cas d'espèce, et qu'il n'y a donc pas lieu de pousser plus loin les développements théoriques.

Nous mentionnons encore la possibilité d'établir pour toute machine des abaques permettant de trouver chaque fois la valeur optimum de la force de tension initiale en fonction du point d'impact des réactions du bois, de la largeur de la lame et d'autres facteurs. Lors de ce choix, il faudra évidemment se référer constamment aux sollicitations de la lame.

10. Essais

Il nous a été donné de procéder à quelques essais de vérification sur la machine décrite au paragraphe précédent. Nous avons choisi une tension initiale de 1000 kg/cm<sup>2</sup>, soit 580 kg par brin. D'après (12):  $p a = 2,2$ . La réaction du bois était représentée par l'appui d'un galet monté sur roulement à billes agissant à mi-distance des deux volants.

Sans entrer dans le détail du calcul et des essais, nous en donnons les résultats par la figure 9 qui représente la relation entre l'effort horizontal  $H$  appliqué et le recul de la lame. La courbe (1) donne les valeurs mesurées, la courbe (2) celles obtenues par les formules simplifiées (10) et (11), et la courbe (3) celles calculées par les formules exactes (8) et (9). On constate une bonne concordance entre calcul et essais, car il y a tout lieu de croire que les différences trouvées restent dans les limites des inévitables erreurs d'expérimentation et qu'elles sont dues en grande partie à des différences probables entre le profil réel du volant et celui qui a été admis pour le calcul.

Remarquons pour terminer que, dans notre cas, la différence entre les résultats obtenus par les deux calculs est relativement petite et que, ici au moins, la méthode simplifiée donne des résultats suffisants, sans que l'on puisse évidemment généraliser cette constatation.

11. Conclusions

L'exemple ci-dessus montre que contrairement à une opinion assez répandue, l'augmentation de la force de tension n'entraîne pas nécessairement un accroissement de la résistance de la lame au recul. D'autre part, nous pouvons affirmer que les résultats acquis au cours de cette note, joints aux méthodes habituelles de la résistance des matériaux, permettent au constructeur de machines d'étudier à fond le problème de l'équilibrage des lames sur les volants. Il y a lieu de penser qu'il sera ainsi possible d'améliorer la construction des métiers et de choisir en connaissance de cause les divers paramètres influant sur l'équilibrage de la lame.

Une première amélioration déjà réalisée, et dont l'expérience a montré l'efficacité, est celle qui consiste à rendre le métier symétrique. D'autres perfectionnements sont sans doute possibles; ils auront pour conséquence d'augmenter le rendement des métiers à ruban et d'en étendre le champ d'application.