Freitragende Wendeltreppen mit starrer Einspannung und horizontale Kreisringträger

Freitragende Wendeltreppen mit starrer Einspannung und horizontale Kreisringträger

Von Dipl. Ing. **Armin Hunziker**, Lausanne DK 624.026:539.41

I. Voraussetzungen und Grundsystem

Der Grundriss des Treppenlaufes sei kreisförmig (Bild 1), und die senkrechten Schnitte zur Treppenaxe werden näherungsweise als Rechtecke angenommen. (In Wirklichkeit sind die im *Raume* vertikalen Radial-Schnitte Rechtecke.) Die Berechnung wird mit Hilfe der Theorie der elastischen Formänderungen durchgeführt. Die an beiden Enden eingespannte Wendeltreppe ist sechsfach statisch unbestimmt. Als statisch bestimmtes Grundsystem wählen wir zwei räumlich gekrümmte Konsolen, die wir erhalten, indem wir die Treppe im Scheitel S durchschneiden.

Das Problem führt zu übersichtlichen Funktionen, wenn wir annehmen, dass die über die Treppenbreite b verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast längs der Treppenaxe gleichförmig verteilt angreift. Aus Gründen der Symmetrie werden von den sechs überzähligen Grössen vier gleich Null; es bleiben lediglich das Biegemoment M_s und die Horizontalkraft Y_s. Der Lastfall mit symmetrisch zum Scheitel S angeordneten vertikalen Einzellasten ergäbe ebenfalls nur zwei überzählige Grössen.

Zur Bestimmung der Momente M^α, T^α und U^α in einem beliebigen Treppen-Querschnitt $s - s$ benötigen wir einige Beziehungen, die in Bild 2 zusammengestellt sind. Für die untere Treppenhälfte ergibt sich durch Superposition der Schnittkräfte im Grundsystem M_0^α, T_0^α und U_0^α mit den Einflüssen der überzähligen Grössen M_s und Y_s:

A. P l a t t e n m o m e n t i m P u n k t e P

(1) $$M^\alpha = M_s \cos\alpha - Y_s \sin\alpha \, r \, \alpha \, \mathrm{tg}\beta + M_0^\alpha$$

B. T o r s i o n s m o m e n t i m P u n k t e P

(2) $$T^\alpha = M_s \sin\alpha \cos\beta - Y_s \sin\alpha \sin\beta \, r \, (1 - \cos\alpha) + Y_s \cos\alpha \, r \sin\beta \, (\alpha - \sin\alpha) + T_0^\alpha = M_s \sin\alpha \cos\beta + Y_s \, r \sin\beta \, (\alpha \cos\alpha - \sin\alpha) + T_0^\alpha$$

C. S c h e i b e n m o m e n t i m P u n k t e P

(3) $$U^\alpha = M_s \sin\alpha \sin\beta + Y_s \sin\alpha \cos\beta \, r \, (1 - \cos\alpha) + Y_s \cos\alpha \left[\frac{r \sin\alpha}{\cos\beta} + r \, \mathrm{tg}\beta \, (\alpha - \sin\alpha) \sin\beta \right] + U_0^\alpha = M_s \sin\alpha \sin\beta + Y_s \, r \cos\beta \, (\sin\alpha + \alpha \cos\alpha \, \mathrm{tg}^2\beta) + U_0^\alpha$$

II. Schnittkräfte im Grundsystem aus äusserer Belastung

Unter Annahme einer gleichmässig verteilten vertikalen Linienlast q längs der Treppenaxe erhalten wir folgende Schnittgrössen (Bild 3):

A. P l a t t e n m o m e n t i m G r u n d s y s t e m

$$dM_0^\alpha = - q \, r \, d\varphi \, r \sin(\alpha - \varphi)$$

(4) $$M_0^\alpha = - \int_0^\alpha q \, r^2 \sin(\alpha - \varphi) \, d\varphi = - q \, r^2 (1 - \cos\alpha)$$

B. T o r s i o n s m o m e n t i m G r u n d s y s t e m

$$dT_0^\alpha = - q \, r \, d\varphi \cos\beta \, r \, [1 - \cos(\alpha - \varphi)]$$

(5) $$T_0^\alpha = - \int_0^\alpha q \, r^2 \cos\beta \, [1 - \cos(\alpha - \varphi)] \, d\varphi = - q \, r^2 \cos\beta \, (\alpha - \sin\alpha)$$

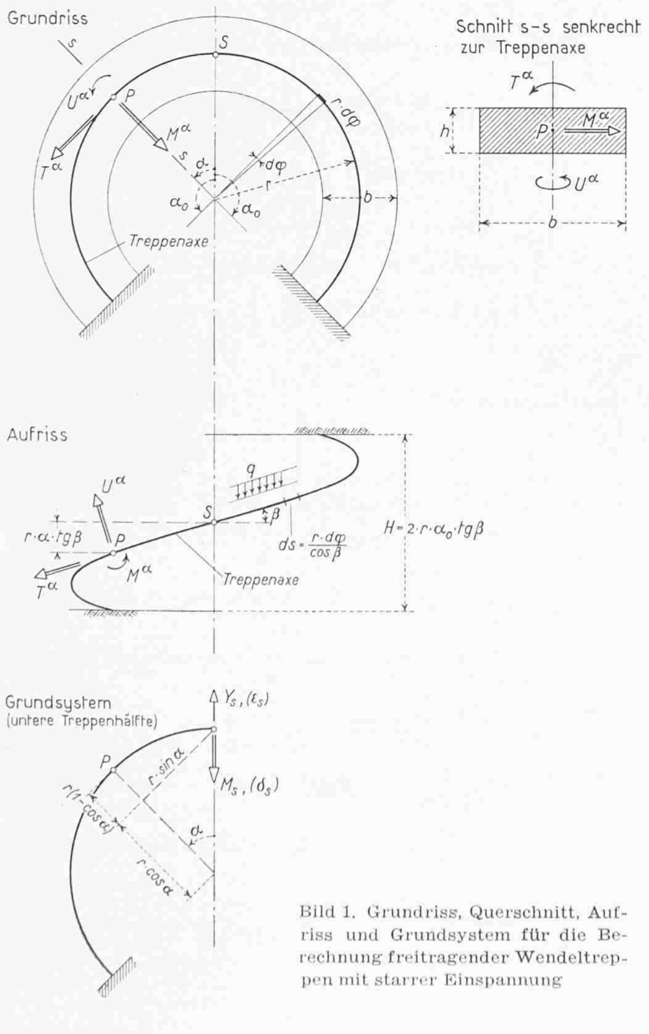

Bild 1. Grundriss, Querschnitt, Aufriss und Grundsystem für die Berechnung freitragender Wendeltreppen mit starrer Einspannung

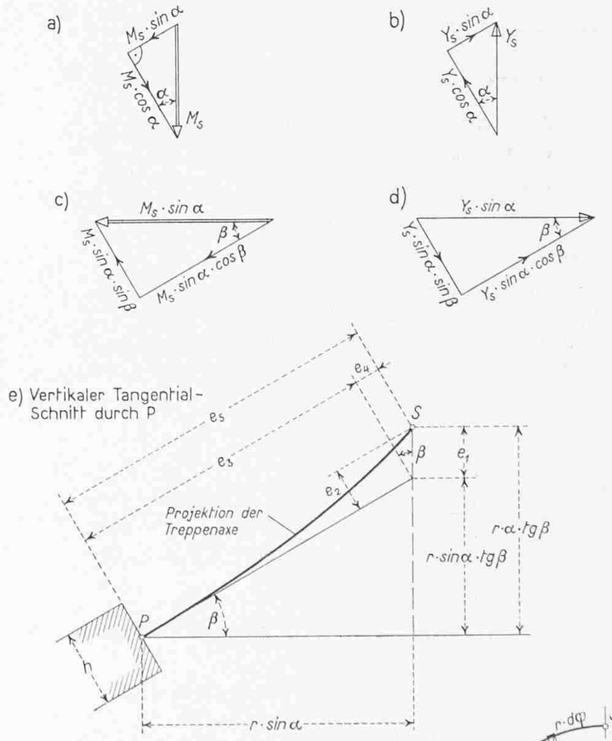

Bild 2. Beziehungen zur Bestimmung der Schnittgrössen

$e_1 = r \, \alpha \, \mathrm{tg}\beta - r \sin\alpha \, \mathrm{tg}\beta = r \, \mathrm{tg}\beta \, (\alpha - \sin\alpha)$

$e_2 = r \, \mathrm{tg}\beta \, (\alpha - \sin\alpha) \cos\beta = r \sin\beta \, (\alpha - \sin\alpha)$

$e_3 = \dfrac{r \sin\alpha}{\cos\beta}$

$e_4 = e_1 \sin\beta = r \, \mathrm{tg}\beta \, (\alpha - \sin\alpha) \sin\beta$

$e_5 = e_3 + e_4 = \dfrac{r \sin\alpha}{\cos\beta} + r \, \mathrm{tg}\beta \, (\alpha - \sin\alpha) \sin\beta$

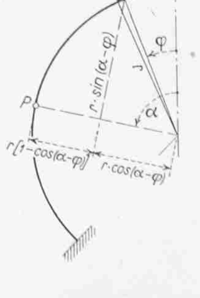

Bild 3 (rechts). Grundriss

C. Scheibenmoment im Grundsystem

$$dU_0{}^\alpha = -q\,r\,d\varphi \sin\beta\; r\,[1-\cos(\alpha-\varphi)]$$

$$U_0{}^\alpha = -\int_0^\alpha q\,r^2 \sin\beta\,[1-\cos(\alpha-\varphi)]\,d\varphi = \tag{6}$$

$$= -q r^2 \sin\beta\,(\alpha - \sin\alpha)$$

III. Ueberzählige Grössen M_s und Y_s

A. Deformationen im Scheitel

Um die überzähligen Grössen M_s und Y_s zu bestimmen, formulieren wir die Elastizitätsbedingungen im Scheitel S:

$$\delta_{0s} + \delta_{1s} M_s + \delta_{2s} Y_s = 0 \tag{7}$$

$$\varepsilon_{0s} + \varepsilon_{1s} M_s + \varepsilon_{2s} Y_s = 0 \tag{8}$$

Die Werte δ und ε sind dem nächsten Abschnitt zu entnehmen.

B. Anwendung der Arbeitsgleichung

Die Verformungen δ und ε leiten wir mit Hilfe der Arbeitsgleichung her; der Einfluss der Normal- und Querkräfte wird vernachlässigt. Es bedeuten:

E = Elastizitätsmodul

$$G = \frac{m}{2\,(m+1)}\,E = \varkappa E = \text{Schubmodul} \tag{7}$$

$$\varkappa = \frac{m}{2\,(m+1)} \tag{8}$$

für Beton nach S. I. A.-Normen 1951, Art. 7:
$m = 6$, daher $\varkappa = 3/7$

Die Trägheitsmomente sind:

für Plattenbiegung: $J = \dfrac{b\,h^3}{12}$

$$\text{Torsion } (b < h):\quad J_t = \frac{b\,h^3}{3}\left(1 - 0{,}630\,\frac{h}{b} + 0{,}052\,\frac{h^5}{b^5} + \dots\right)\ ^{1)} \tag{9}$$

$$\text{Scheibenbiegung:}\quad J_u = \frac{h\,b^3}{12} \tag{10}$$

Wir benützen die Arbeitsgleichung

$$\delta = \int \frac{M'\,M}{E\,J}\,ds + \int \frac{T'\,T}{G\,J_t}\,ds + \int \frac{U'\,U}{E\,J_0}\,ds$$

und können damit schreiben (Alle Integrale erstrecken sich über eine Treppenhälfte, d. h. von $\alpha = 0$ bis α_0):

1. δ_{0s}

Belastungszustand	Verschiebungszustand
$M_s' = 1$	q
$M' = +1\cos\alpha$	$M = -q r^2\,(1-\cos\alpha)$
$T' = +1\sin\alpha\cos\beta$	$T = -q r^2 \cos\beta\,(\alpha - \sin\alpha)$
$U' = +1\sin\alpha\sin\beta$	$U = -q r^2 \sin\beta\,(\alpha - \sin\alpha)$

$$\delta_{0s} = -\int \frac{\cos\alpha\; q r^2\,(1-\cos\alpha)}{E\,J}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} - \int \frac{\sin\alpha\cos\beta\; q\,r^2\cos\beta\,(\alpha-\sin\alpha)}{G\,J_t}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} - \int \frac{\sin\alpha\sin\beta\; q\,r^2\sin\beta\,(\alpha-\sin\alpha)}{E\,J_u}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= -q\,r^3\left[\frac{1}{\cos\beta\,E\,J}\,(\int\cos\alpha\,d\alpha - \int\cos^2\alpha\,d\alpha) + \frac{\cos\beta}{G\,J_t}\,(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha) + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta\,E\,J_u}\,(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha)\right]$$

2. δ_{1s}

Belastungszustand	Verschiebungszustand
$M_s' = 1$	$M_s = 1$
$M' = +1\cos\alpha$	$M = +1\cos\alpha$
$T' = +1\sin\alpha\cos\beta$	$T = +1\sin\alpha\cos\beta$
$U' = +1\sin\alpha\sin\beta$	$U = +1\sin\alpha\sin\beta$

1) Siehe: Schleicher, Taschenbuch für Bauingenieure, 1949, S. 172

$$\delta_{1s} = \int \frac{\cos^2\alpha}{E\,J}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{G\,J_t}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{E\,J_u}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= r\left[\frac{1}{\cos\beta\,EJ}\int\cos^2\alpha\,d\alpha + \frac{\cos\beta}{G\,J_t}\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta\,EJ_u}\int\sin^2\alpha\,d\alpha\right]$$

3. $\delta_{2s} = \varepsilon_{1s}$

Belastungszustand	Verschiebungszustand
$M_s' = 1$	$Y_s = 1$
$M' = +1\cos\alpha$	$M = -1\sin\alpha\; r\,\alpha\,\mathrm{tg}\beta$
$T' = +1\sin\alpha\cos\beta$	$T = +r\sin\beta\,(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)$
$U' = +1\sin\alpha\sin\beta$	$U = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\cdot\alpha$

$$\delta_{2s} = -\int \frac{\cos\alpha\sin\alpha\; r\,\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{E\,J}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int \frac{\sin\alpha\cos\beta\; r\sin\beta\,(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{G\,J_t}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int \frac{\sin\alpha\sin\beta\,(r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\,\alpha)}{E\,J_u}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= r^2\left[-\frac{\sin\beta}{E\,J\cos^2\beta}\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{\sin\beta}{G\,J_t}\,(\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha) + \frac{\sin\beta}{E\,J_u}\,(\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \mathrm{tg}^2\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha)\right]$$

4. ε_{0s}

Belastungszustand	Verschiebungszustand
$Y_s' = 1$	q
$M' = -r\,\alpha\sin\alpha\,tg\beta$	$M = -q r^2\,(1-\cos\alpha)$
$T' = r\sin\beta\,(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)$	$T = -q r^2\cos\beta\,(\alpha-\sin\alpha)$
$U' = r\sin\alpha\cos\beta + r\,\alpha\cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\beta$	$U = -q r^2\sin\beta\,(\alpha-\sin\alpha)$

$$\varepsilon_{0s} = \int \frac{r\,\alpha\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta\; q\,r^2\,(1-\cos\alpha)}{E\,J}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} - \int \frac{r\sin\beta\,(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\; q\,r^2\cos\beta\,(\alpha-\sin\alpha)}{G\,J_t}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} - \int \frac{(r\sin\alpha\cos\beta + r\alpha\cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\beta)\; q r^2\sin\beta\,(\alpha-\sin\alpha)}{E\,J_u}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= q\,r^4\left[\frac{\mathrm{tg}\beta}{E\,J\cos\beta}\,(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha) - \frac{\sin\beta}{G\,J_t}\,(\int\alpha^2\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\,d\alpha + \int\sin^2\alpha\,d\alpha) - \frac{\sin\beta}{E\,J_u}\,(\cos\beta\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \cos\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\int\alpha^2\cos\alpha\,d\alpha - \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha)\right]$$

5. ε_{2s}

Belastungszustand	Verschiebungszustand
$Y_s' = 1$	$Y_s = 1$
$M' = -\sin\alpha\; r\,\alpha\,\mathrm{tg}\beta$	M } siehe
$T' = r\sin\beta\,(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)$	T } Belastungs-
$U' = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta\sin\beta\,\alpha$	U } zustand

$$\varepsilon_{2s} = \int \frac{\sin^2\alpha\; r^2\,\alpha^2\,\mathrm{tg}^2\beta}{E\,J}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int \frac{r^2\sin^2\beta\,(\alpha^2\cos^2\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)}{G\,J_t}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} + \int\left(\frac{r^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + 2r^2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta\sin\beta\cdot\alpha}{E\,J_u} + \frac{r^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta\sin^2\beta\,\alpha^2}{E\,J_u}\right)\frac{r\,d\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= r^3\left[\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{E\,J\cos\beta}\int\alpha^2\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{\sin^2\beta}{G\,J_t\cos\beta}\,(\int\alpha^2\cos^2\alpha\,d\alpha - 2\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \int\sin^2\alpha\,d\alpha) + \frac{1}{E\,J_u\cos\beta}\,(\cos^2\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha + 2\sin^2\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \sin^2\beta\,\mathrm{tg}^2\beta\int\alpha^2\cos^2\alpha\,d\alpha)\right]$$

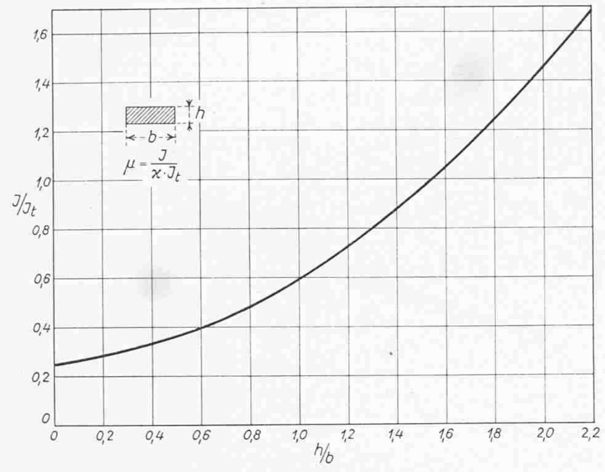

Bild 4. Diagramm zur Bestimmung der μ-Werte
$\varkappa$ siehe Gleichung (8)

C. Die EJ-fachen Verschiebungswerte

Die Beziehungen zwischen EJ, GJ_t und EJ_u sind die folgenden [siehe Gl. (7) bis (10)]:

(11) $$\frac{EJ}{GJ_t} = \frac{J}{\varkappa \cdot J_t} = \mu$$

(12) $$\frac{EJ}{EJ_u} = \frac{h^2}{b^2} = \nu$$

Der Wert J/J_t kann aus einem Diagramm, Bild 4, herausgelesen werden. Damit lauten die EJ-fachen Verschiebungsgrössen:

1. $$EJ\delta_{0s} = -qr^3\Big[\frac{1}{\cos\beta}\left(\int\cos\alpha\,d\alpha - \int\cos^2\alpha\,d\alpha\right) + \mu\cos\beta\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) + \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right)\Big]$$

2. $$EJ\delta_{1s} = r\Big[\frac{1}{\cos\beta}\int\cos^2\alpha\,d\alpha + \mu\cos\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\int\sin^2\alpha\,d\alpha\Big]$$

3. $$EJ\delta_{2s} = r^2\Big[-\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \mu\sin\beta\left(\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) + \nu\sin\beta\left(\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \mathrm{tg}^2\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right)\Big]$$

4. $$EJ\,\varepsilon_{0s} = qr^4\Big[\frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right) - \mu\sin\beta\left(\int\alpha^2\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\,d\alpha + \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) - \nu\sin\beta\,(\cos\beta\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \cos\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\int\alpha^2\cos\alpha\,d\alpha - \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha)\Big]$$

5. $$EJ\varepsilon_{2s} = r^3\Big[\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{\cos\beta}\int\alpha^2\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{\mu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\int\alpha^2\cos^2\alpha\,d\alpha - 2\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) + \frac{\nu}{\cos\beta}\left(\cos^2\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha + 2\sin^2\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \sin^2\beta\,\mathrm{tg}^2\beta\int\alpha^2\cos^2\alpha\,d\alpha\right)\Big]$$

D. Abkürzungen und Auswertung der Integrale

Alle Integrale erstrecken sich von $\alpha = 0$ bis α_0. Wir führen einige Abkürzungen ein:

1. $$E_1 = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}$$

2. $$E_2 = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}$$

3. $$E_3 = \sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0$$

4. $$E_4 = \alpha_0\sin^2\alpha_0$$

5. $$E_5 = \alpha_0^2\sin\alpha_0$$

6. $$E_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{2}\sin 2\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2}\cos 2\alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)$$

7. $$a_{01} = \frac{1}{\cos\beta}\left(\int\cos\alpha\,d\alpha - \int\cos^2\alpha\,d\alpha\right) = \frac{1}{\cos\beta}\left(\sin\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = \frac{1}{\cos\beta}(\sin\alpha_0 - E_1)$$

8. $$b_{01} = \mu\cos\beta\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) = \mu\cos\beta\,(\sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4} = \mu\cos\beta\,(E_3 - E_2)$$

9. $$c_{01} = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}(E_3 - E_2)$$

10. $$a_{11} = \frac{1}{\cos\beta}\int\cos^2\alpha\,d\alpha = \frac{1}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = \frac{1}{\cos\beta}E_1$$

11. $$b_{11} = \mu\cos\beta\int\sin^2\alpha\,d\alpha = \mu\cos\beta\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = \mu\cos\beta\,E_2$$

12. $$c_{11} = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\int\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}E_2$$

13. $$a_{21} = -\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha = -\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\,\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) = -\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\,\frac{1}{2}(E_4 - E_2)$$

14. $$b_{21} = \mu\sin\beta\left(\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) = \mu\sin\beta\left[\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right] = \mu\sin\beta\left[\frac{1}{2}(E_4 - E_2) - E_2\right]$$

15. $$c_{21} = \nu\sin\beta\left(\int\sin^2\alpha\,d\alpha + \mathrm{tg}^2\beta\int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right) = \nu\sin\beta\left[\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) + \mathrm{tg}^2\beta\,\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)\right] = \nu\sin\beta\left[E_2 + \mathrm{tg}^2\beta\,\frac{1}{2}(E_4 - E_2)\right]$$

16. $$a_{02} = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\left(\int\alpha\sin\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right) = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\Big[\sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0 - \frac{1}{2}\Big((\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\Big)\Big] = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\left[E_3 - \frac{1}{2}(E_4 - E_2)\right]$$

17. $$b_{02} = -\mu\sin\beta\left(\int\alpha^2\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - \int\alpha\sin\alpha\,d\alpha + \int\sin^2\alpha\,d\alpha\right) = -\mu\sin\beta\Big[\alpha_0^2\sin\alpha_0 - 2(\sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0) - \frac{1}{2}\left(\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) - (\sin\alpha_0 - \alpha_0\cos\alpha_0) + \left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)\Big] = -\mu\sin\beta\left[E_5 - 3E_3 - \frac{1}{2}(E_4 - E_2) + E_2\right]$$

$$18.\ c_{02} = -\nu \sin\beta\,(\cos\beta \int \alpha \sin\alpha\, d\alpha - \cos\beta \int \sin^2\alpha\, d\alpha +$$
$$+ \sin\beta\, \mathrm{tg}\beta \int \alpha^2 \cos\alpha\, d\alpha - \sin\beta\, \mathrm{tg}\beta \int \alpha \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha) =$$
$$= -\nu \sin\beta \Big\{ \cos\beta\,(\sin\alpha_0 - \alpha_0 \cos\alpha_0) -$$
$$- \cos\beta \left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) +$$
$$+ \sin\beta\, \mathrm{tg}\beta\,[\alpha^2 \sin\alpha_0 - 2\,(\sin\alpha_0 - \alpha_0 \cos\alpha_0)] -$$
$$- \sin\beta\, \mathrm{tg}\beta\, \frac{1}{2}\left(\alpha_0 \sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)\Big\} =$$
$$= -\nu \sin\beta \Big\{ \cos\beta\,(E_3 - E_2) +$$
$$+ \sin\beta\, \mathrm{tg}\beta \left[E_5 - 2E_3 - \frac{1}{2}\,(E_4 - E_2)\right]\Big\}$$

$$19.\ a_{22} = \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{\cos\beta} \int \alpha^2 \sin^2\alpha\, d\alpha =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} - \frac{\alpha_0^{\,2}}{4} \sin 2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{4} \cos 2\alpha_0 + \frac{\sin 2\alpha_0}{8}\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} - E_6\right)$$

$$20.\ b_{22} = \frac{\mu \sin^2\beta}{\cos\beta}\,(\int \alpha^2 \cos^2\alpha\, d\alpha - 2\int \alpha \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha +$$
$$+ \int \sin^2\alpha\, d\alpha) = \frac{\mu \sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} + \frac{\alpha_0^{\,2}}{4} \sin 2\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{4} \cos 2\alpha_0 -\right.$$
$$\left.- \frac{\sin 2\alpha_0}{8} - \alpha_0 \sin^2\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) =$$
$$= \frac{\mu \sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} + E_6 - E_4 + 2E_2\right)$$

$$22.\ c_{22} = \frac{\nu}{\cos\beta}\,(\cos^2\beta \int \sin^2\alpha\, d\alpha + 2 \sin^2\beta \int \alpha \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha +$$
$$+ \sin^2\beta\, \mathrm{tg}^2\beta \int \alpha^2 \cos^2\alpha\, d\alpha) = \frac{\nu}{\cos\beta}\left[\cos^2\beta \left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) +\right.$$
$$+ 2\sin^2\beta\, \frac{1}{2}\left(\alpha_0 \sin^2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) +$$
$$\left.+ \sin^2\beta\, \mathrm{tg}^2\beta \left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} + \frac{\alpha_0^{\,2}}{4} \sin^2\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{4} \cos 2\alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{8}\right)\right]$$
$$= \frac{\nu}{\cos\beta}\left[\cos^2\beta\, E_2 + \sin^2\beta\,(E_4 - E_2) +\right.$$
$$\left.+ \sin^2\beta\, \mathrm{tg}^2\beta \left(\frac{\alpha_0^{\,3}}{6} + E_6\right)\right]$$

Schreiben wir ausserdem:

(13) $a_{01} + b_{01} + c_{01} = D_1$

(14) $a_{11} + b_{11} + c_{11} = D_2$

(15) $a_{21} + b_{21} + c_{21} = D_3$

(16) $a_{02} + b_{02} + c_{02} = D_4$

(17) $a_{22} + b_{22} + c_{22} = D_5$

Damit erhalten wir für die EJ-fachen Verschiebungen:

(18) $EJ\, \delta_{0s} = -qr^3\,[a_{01} + b_{01} + c_{01}] = -qr^3 D_1$

(19) $EJ\, \delta_{1s} = r\,[a_{11} + b_{11} + c_{11}] = r\, D_2$

(20) $EJ\, \delta_{2s} = r^2\,[a_{21} + b_{21} + c_{21}] = r^2 D_3$

(21) $EJ\, \varepsilon_{0s} = qr^4\,[a_{02} + b_{02} + c_{02}] = q\, r^4 D_4$

(22) $EJ\, \varepsilon_{2s} = r^3\,[a_{22} + b_{22} + c_{22}] = r^3 D_5$

E. Die statisch unbestimmten Grössen M_s und Y_s

1. *Allgemeine Lösung*

Wir setzen die Gleichungen (18)—(22) in die Elastizitätsgleichungen (7) und (8) ein:

(7a) $-qr^3 D_1 + r\, D_2 M_s + r^2 D_3 Y_s = 0$

(8a) $qr^4 D_4 + r^2 D_3 M_s + r^3 D_5 Y_s = 0$

Die Lösung lautet:

$$(23)\quad M_s = qr^2 \frac{D_1 D_5 + D_3 D_4}{D_2 D_5 - D_3^2}$$

$$(24)\quad Y_s = -qr \frac{D_2 D_4 + D_1 D_3}{D_2 D_5 - D_3^2}$$

Wir können nun die Schnittkräfte M^α, T^α und U^α in einem beliebigen Punkt P der Treppenaxe nach den Gleichungen (1) bis (3) berechnen.

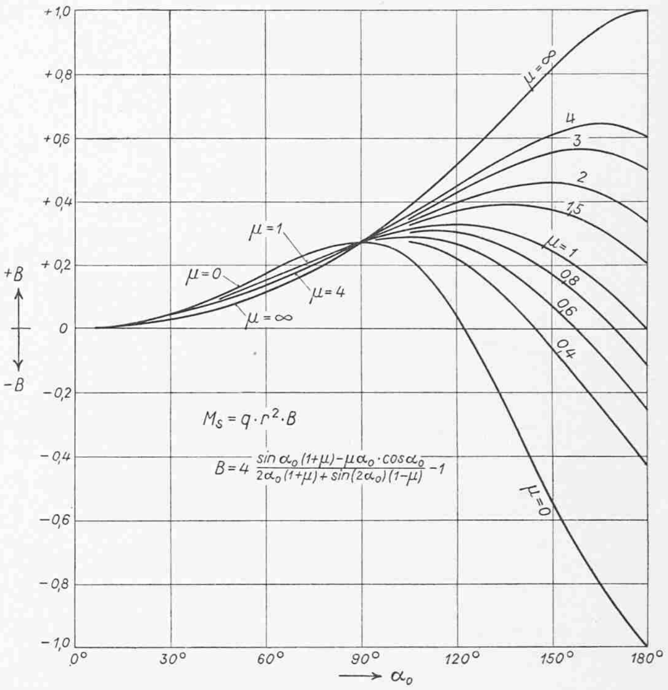

Bild 5. Die statisch unbestimmte Grösse M_s als Funktion von μ und dem halben Oeffnungswinkel α_0, für horizontale Kreisringträger mit gleichmässiger vertikaler Linienlast q längs der Trägeraxe

2. Spezialfall: $\beta = 0$

Die Annahme $\beta = 0$ entspricht einem horizontalen Kreisringträger mit längs seiner Axe gleichmässig verteilter Belastung q. Dieser Fall ist einfach statisch unbestimmt.

a) Die statisch unbestimmte Grösse M_s

Die D-Werte, Gl. (13) bis (17), vereinfachen sich zu:

(13a) $D_1 = \sin\alpha_0 - E_1 + \mu\,(E_3 - E_2)$

(14a) $D_2 = E_1 + \mu\, E_2$

(15a) $D_3 = 0$

(16a) $D_4 = 0$

(17a) $D_5 = \nu\, R_2$

Für M_s und Y_s erhalten wir:

$$M_s = qr^2 \frac{[\sin\alpha_0 - E_1 + \mu\,(E_3 - E_2)]\,\nu\, E_2}{(E_1 + \mu\, E_2)\,\nu\, E_2} =$$
$$= qr^2 \frac{\sin\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4} + \mu\left(\sin\alpha_0 - \alpha_0 \cos\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)}{\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4} + \mu\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right)}$$
$$= qr^2 \left[4\, \frac{\sin\alpha_0\,(1 + \mu) - \mu\, \alpha_0 \cos\alpha_0}{2\,\alpha_0\,(1 + \mu) + \sin 2\alpha_0\,(1 - \mu)} - 1\right] = qr^2 B\ ^{2)}$$

$Y_s = 0$

Der Wert $B = 4\,\dfrac{\sin\alpha_0\,(1 + \mu) - \mu\, \alpha_0 \cos\alpha_0}{2\,\alpha_0\,(1 + \mu) + \sin 2\alpha_0\,(1 - \mu)} - 1$

kann dem Diagramm Bild 5 entnommen werden. Für $\alpha_0 = \pi/2$ wird M_s unabhängig von μ, nämlich

$$M_s = qr^2 \left(4\,\frac{1}{\pi} - 1\right) = qr^2\, 0{,}274$$

b) Die Schnittkräfte M^α und T^α

U^α wird Null, und die Gleichungen (1) und (2) vereinfachen sich zu:

(1a) $M^\alpha = M_s \cos\alpha + M_0^{\,\alpha} = M_s \cos\alpha - qr^2\,(1 - \cos\alpha)$

(2a) $T^\alpha = M_s \sin\alpha + T_0^{\,\alpha} = M_s \sin\alpha - qr^2\,(\alpha - \sin\alpha)$

Für $\alpha = \pi/2$ wird $M^\alpha = -qr^2$, also unabhängig von α_0 und μ.

---

[2]) Den gleichen Wert findet man im Buche von Santarella: Il cemento armato II, Seite 372 (1945).

IV. Beispiel

Wir wählen eine Wendeltreppe mit folgenden Ausgangswerten:

$b = 1{,}70$ m	$H = 3{,}16$ m
$h = 0{,}21$ m	$q = 2{,}3$ t/m
$r = 1{,}93$ m	$m = 6$
$\alpha_0 = 120^0$	$\varkappa = 3/7$

Die Auswertung erfolgt mit Rechenschieber-Genauigkeit und ergibt:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{H}{2r\alpha_0} = \frac{3{,}16}{2 \cdot 1{,}93 \cdot 2{,}094} = 0{,}391$$

$$\frac{h}{b} = \frac{21}{170} = 0{,}123$$

$$\mu = \frac{J}{\varkappa J_t} = \frac{0{,}27 \cdot 7}{3} = 0{,}63$$

$$\nu = \frac{h^2}{b^2} = \frac{21^2}{170^2} = 0{,}0153$$

1. $E_1 = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4} = \frac{2{,}094}{2} - \frac{0{,}866}{4} = 0{,}831$

2. $E_2 = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4} = \frac{2{,}094}{2} + \frac{0{,}866}{4} = 1{,}263$

3. $E_3 = \sin\alpha_0 - \alpha_0 \cos\alpha_0 = 0{,}866 - 2{,}094 \cdot 0{,}5 = 1{,}913$

4. $E_4 = \alpha_0 \sin^2\alpha_0 = 2{,}094 \cdot 0{,}866^2 = 1{,}57$

5. $E_5 = \alpha_0^2 \sin\alpha_0 = 2{,}094^2 \cdot 0{,}866 = 3{,}80$

6. $E_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{2}\sin 2\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2}\cos 2\alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}\right) =$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{2{,}094^2}{2}(-0{,}866) - \frac{2{,}094}{2} \cdot 0{,}5 + \frac{0{,}866}{4}\right] = -1{,}103$

7. $a_{01} = \frac{1}{\cos\beta}(\sin\alpha_0 - E_1) = \frac{1}{0{,}931}(0{,}866 - 0{,}831) = 0{,}0376$

8. $b_{01} = \mu\cos\beta\,(E_3 - E_2) = 0{,}63 \cdot 0{,}931\,(1{,}913 - 1{,}263) = 0{,}381$

9. $c_{01} = \frac{\nu \sin^2\beta}{\cos\beta}(E_3 - E_2) =$
$= \frac{0{,}0153 \cdot 0{,}364^2}{0{,}931}(1{,}913 - 1{,}263) = 0{,}001'415$

10. $a_{11} = \frac{1}{\cos\beta}E_1 = \frac{1}{0{,}931} \cdot 0{,}831 = 0{,}893$

11. $b_{11} = \mu\cos\beta\, E_2 = 0{,}63 \cdot 0{,}931 \cdot 1{,}263 = 0{,}741$

12. $c_{11} = \frac{\nu\sin^2\beta}{\cos\beta}E_2 = \frac{0{,}0153 \cdot 0{,}364^2}{0{,}931} \cdot 1{,}263 = 0{,}002'75$

13. $a_{21} = -\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\,\frac{1}{2}(E_4 - E_2) =$
$= -\frac{0{,}364}{0{,}931^2}\,\frac{1}{2}(1{,}570 - 1{,}263) = -0{,}0645$

14. $b_{21} = \mu\sin\beta\,[1/2\,(E_4 - E_2) - E_2] =$
$= 0{,}63 \cdot 0{,}364\,[1/2\,(1{,}570 - 1{,}263) - 1{,}263] = -0{,}2545$

15. $c_{21} = \nu\sin\beta\,[E_2 + \mathrm{tg}^2\beta\, 1/2\,(E_4 - E_2)] =$
$= 0{,}0153 \cdot 0{,}364\,[1{,}263 + 0{,}391^2 \cdot 1/2\,(1{,}570 - 1{,}263)] =$
$= 0{,}007'16$

16. $a_{02} = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}[E_3 - 1/2\,(E_4 - E_2)] =$
$= \frac{0{,}391}{0{,}931}[1{,}913 - 1/2\,(1{,}570 - 1{,}263)] = 0{,}739$

17. $b_{02} = -\mu\sin\beta\,[E_5 - 3E_3 - 1/2\,(E_4 - E_2) + E_2] =$
$= -0{,}63 \cdot 0{,}364\,[3{,}80 - 3 \cdot 1{,}913 -$
$- 1/2\,(1{,}570 - 1{,}263) + 1{,}263] = +0{,}1902$

18. $c_{02} = -\nu\sin\beta\left\{\cos\beta\,(E_3 - E_2) +\right.$
$\left. + \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta\left[E_5 - 2E_3 - \frac{1}{2}(E_4 - E_2)\right]\right\} =$
$= -0{,}0153 \cdot 0{,}364\left\{0{,}931\ (1{,}913 - 1{,}263) +\right.$
$\left. + 0{,}364 \cdot 0{,}391\left[3{,}80 - 2 \cdot 1{,}913 - \frac{1}{2}(1{,}570 - 1{,}263)\right]\right\}$
$= -0{,}003'23$

19. $a_{22} = \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^3}{6} - E_6\right) = \frac{0{,}391^2}{0{,}931}\left(\frac{2{,}094^3}{6} + 1.103\right) =$
$= +0{,}432$

20. $b_{22} = \frac{\mu\sin^2\beta}{\cos\beta}\left(\frac{\alpha_0^3}{6} + E_6 - E_4 + 2E_2\right) =$
$= \frac{0{,}63 \cdot 0{,}364^2}{0{,}931}\left(\frac{2{,}094^3}{6} - 1{,}103 - 1{,}57 + 2 \cdot 1{,}263\right) =$
$= 0{,}124$

21. $c_{22} = \frac{\nu}{\cos\beta}\left[\cos^2\beta\, E_2 + \sin^2\beta\,(E_4 - E_2) +\right.$
$\left. + \sin^2\beta\,\mathrm{tg}^2\beta\left(\frac{\alpha_0^3}{6} + E_6\right)\right] =$
$= \frac{0{,}0153}{0{,}931}\left[0{,}931^2 \cdot 1{,}263 + 0{,}364^2\,(1{,}570 - 1{,}263) +\right.$
$\left. + 0{,}364^2 \cdot 0{,}391^2\left(\frac{2{,}094^3}{6} - 1{,}103\right)\right] = 0{,}02009$

$D_1 = a_{01} + b_{01} + c_{01} = 0{,}0376 + 0{,}381 + 0{,}0014 = +0{,}4200$
$D_2 = a_{11} + b_{11} + c_{11} = 0{,}893 + 0{,}741 + 0{,}003 = +1{,}637$
$D_3 = a_{21} + b_{21} + c_{21} = -0{,}0645 - 0{,}2545 + 0{,}0072 = -0{,}3118$
$D_4 = a_{02} + b_{02} + c_{02} = 0{,}739 + 0{,}190 - 0{,}003 = +0{,}926$
$D_5 = a_{22} + b_{22} + c_{22} = 0{,}432 + 0{,}124 + 0{,}020 = +0{,}576$

Für die statisch unbestimmten Grössen erhalten wir:

$$M_s = qr^2\,\frac{D_1 \cdot D_5 + D_3 \cdot D_4}{D_2 \cdot D_5 - D_3^2} = qr^2\,\frac{0{,}420 \cdot 0{,}576 - 0{,}312 \cdot 0{,}926}{1{,}637 \cdot 0{,}576 - 0{,}312^2} =$$
$$= -qr^2 \cdot 0{,}0556 = -2{,}3 \cdot 1{,}93^2 \cdot 0{,}0556 = \underline{-0{,}477\ \text{mt}}$$

$$Y_s = -qr\,\frac{D_2 \cdot D_4 + D_1 \cdot D_3}{D_2 \cdot D_5 - D_3^2} =$$
$$= -qr\,\frac{1{,}637 \cdot 0{,}926 - 0{,}420 \cdot 0{,}312}{1{,}637 \cdot 0{,}576 - 0{,}312^2} =$$
$$= -qr \cdot 1{,}64 = -2{,}3 \cdot 1{,}93 \cdot 1{,}64 = \underline{-7{,}28\ \text{t}}$$

Mit den Gleichungen (1) bis (6) finden wir die Schnittmomente für beliebige Punkte der Treppenaxe. Die Resultate sind in Tabelle 1 und Bild 6 zusammengestellt. Von grossem Interesse wäre es, wenn die erhaltenen Werte mit Ergebnissen aus Versuchsmessungen verglichen werden könnten, um so den praktischen Anwendungs-Bereich feststellen zu können.

Tabelle 1. Momente in mt.

α	M_0	M^α	T_0	T^α	U_0	U^α
0^0	0	$-0{,}48$	0	0	0	0
30^0	$-1{,}15$	$-0{,}12$	$-0{,}19$	$-0{,}17$	$-0{,}07$	$-7{,}61$
60^0	$-4{,}28$	$+0{,}46$	$-1{,}44$	$-0{,}08$	$-0{,}56$	$-13{,}09$
90^0	$-8{,}57$	$+0{,}06$	$-4{,}55$	$+0{,}11$	$-1{,}78$	$-15{,}03$
120^0	$-12{,}85$	$-2{,}65$	$-9{,}80$	$-0{,}41$	$-3{,}83$	$-13{,}21$

Es können natürlich auch andere Grundrissformen und Lastfälle betrachtet werden; der Integrationsbereich wird in Lamellen eingeteilt und die Integrale werden als Summen berechnet. Weitere Untersuchungen werden den Einfluss von elastischer Einspannung sowie die Berechnung von Treppenpodesten behandeln. Deformationen der Einspannstellen sind nicht zu vernachlässigen; oft bewirken sie sogar einen Vorzeichenwechsel der Platten- und Torsionsmomente.

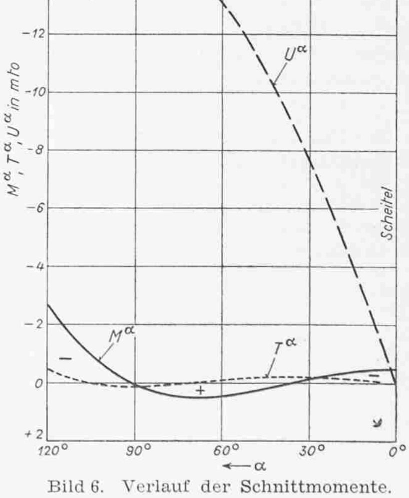

Bild 6. Verlauf der Schnittmomente. Plattenmoment M^α (— = Zug oben), Torsionsmoment T^α, Scheibenmoment U^α (— = Zug aussen)

Adresse des Verfassers: Dipl.Ing. Armin Hunziker, 14, Avenue de l'Eglise Anglaise, Lausanne