Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Kurbelwellen: dem Andenken von Ing. Carl Jegher gewidmet

Autor(en): **Nyffenegger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **127/128 (1946)**

Heft 1

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-83772

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

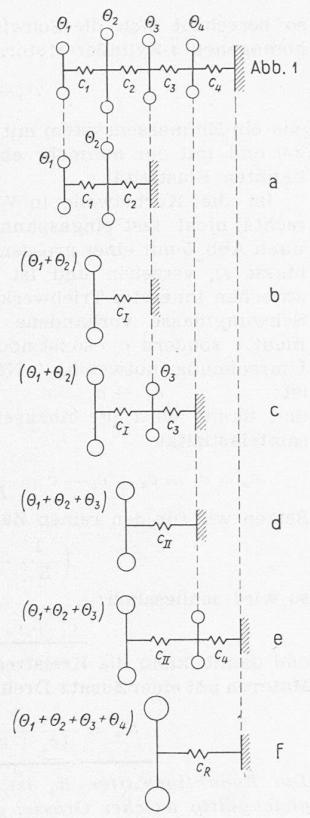
Band 127 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Nr. 1

Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Kurbelwellen

Dem Andenken von Ing. Carl Jegher gewidmet von H. NYFFENEGGER, Oberingenieur der SLM Winterthur

Einleitung

Zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen der Kurbelwellen von Kolbenmaschinen-Anlagen stehen ausser den klassischen Berechnungsverfahren, die einen grossen rechnerischen Aufwand erfordern, eine Reihe von andern Verfahren zur Verfügung, von denen das Grammelsche[1]) wohl das bekannteste und auch universalste sein dürfte. Grammel geht davon aus, dass die zu untersuchende Maschinenanlage aus einem vielzylindrigen Kolbenmotor mit durchwegs gleichen Triebwerken in elastisch gleichen Abständen (homogener Motor) und beliebig vielen Zusatz-Drehmassen zusammengesetzt ist, die beidseitig des Motors angeordnet sein können. Das Verfahren erlaubt sämtliche $(k-1)$ Eigenschwingungszahlen bei insgesamt k schwingenden Massen zu berechnen. Grammel benötigt aber ein umfangreiches Tabellenmaterial und muss auch die mit Hilfe dieser Tabellen berechneten Funktionen aufzeichnen, um die gesuchten Werte zu erhalten. Weniger allgemein gültige Verfahren, die den vielzylindrigen homogenen Motor auf irgendwelche Art auf *eine* Masse reduzieren und die eine oder zwei Zusatzmassen auf einer Motorseite einschliessen, stützen sich auf zum voraus berechnete Kurvenblätter und auf die Angaben von Zahlentafeln. Es liegt in der Natur dieser zuletzt genannten Verfahren, dass nur Schwingungen ersten und zweiten Grades mit Knotenpunkten ausserhalb des Kolbenmotors berechnet werden können, was aber in den meisten Fällen genügen dürfte.



Im folgenden wird gezeigt, wie die bei den eingeschränkten Verfahren immer notwendige Reduktion der vielen Kolben-Triebwerkmassen auf nur eine schwingende Masse in einfachster Weise ein für alle Mal durchgeführt werden kann und wie unter Benützung einer erweiterten Dreimassenformel einige wichtige Anwendungsfälle mit einfachen rechnerischen Mitteln behandelt werden können.

I. Das allgemeine Reduktionsverfahren

Das vorliegende Verfahren zur Berechnung der Eigen-Schwingungszahl ersten Grades einer vielzylindrigen, vorläufig inhomogen angenommenen Kolbenmaschine mit fester Einspannung am rechtseitigen Ende nach Abb. 1, gründet sich auf folgende Ueberlegungen: Wird von den Drehmassen mit den Massenträgheitsmomenten $\Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_3 \ldots \Theta_z$ zunächst die Drehmasse Θ_3 festgehalten, so schwingt das nach links freie, aus den beiden Drehmassen Θ_1 und Θ_2, sowie den beiden Federungen c_1 und c_2 bestehende Zweimassensystem nach Abb. 1a mit einer der beiden möglichen Kreisfrequenzen ε_I und ε'_I, die sich aus der bekannten Dreimassenformel

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_2}\right) + \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right)\right\} + \frac{1}{c_1 c_2}\left\{\frac{1}{\Theta_1 \Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1 \Theta_3}+\frac{1}{\Theta_2 \Theta_3}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

bestimmen lassen, wenn darin $\Theta_3 = \infty$ gesetzt wird. Gleichung 1 geht dann über in die Gleichung:

$$\varepsilon^4 c_1 c_2 \Theta_1 \Theta_2 - \varepsilon^2 \left\{(c_1+c_2)\Theta_1 + c_2 \Theta_2\right\} + 1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Hierin bedeuten c_1 und c_2 die Verdrehungen der Wellenstücke unter der Wirkung des Einheitsdrehmoments; für eine glatte Ersatzwelle mit dem polaren Trägheitsmoment J_p und mit der Länge l ist $c = l/G\,J_p$ (G = Schubelastizitätsmodul).

Das Quadrat der hier allein interessierenden Eigenschwingung ersten Grades mit nur einem Knotenpunkt in der Einspannstelle findet sich dann als Auflösung der biquadratischen Gleichung 2:

$$\varepsilon^2_I = \frac{(c_1+c_2)\Theta_1 + c_2\Theta_2}{2\,c_1 c_2 \Theta_1 \Theta_2} - \sqrt{\left\{\frac{(c_1+c_2)\Theta_1 + c_2\Theta_2}{2\,c_1 c_2 \Theta_1 \Theta_2}\right\}^2 - \frac{1}{c_1 c_2 \Theta_1 \Theta_2}} \quad \ldots \quad (3)$$

Dieses erste Zweimassensystem nach Abb. 1a kann durch ein dynamisch völlig gleichwertiges Einmassensystem gleicher Eigenfrequenz ε_I ersetzt werden, das nach Abb. 1b aus den vereinigten Massen $(\Theta_1+\Theta_2)$ besteht und dessen Ersatzelastizität sich aus der Elementarformel:

$$c_I = \frac{1}{\varepsilon^2_I\,(\Theta_1+\Theta_2)} \quad \ldots \quad (4)$$

bestimmt.

Nun wird das erste Einmassen-Ersatzsystem mit der nächsten Drehmasse Θ_3 zu einem zweiten Zweimassensystem nach Abb. 1c mit dem Festpunkt bei Θ_4 zusammengesetzt. Die Kreisfrequenz ersten Grades ε_{II} dieses Systems bestimmt sich nach dem Vorbild der Gleichung 3, wobei an Stelle von Θ_1 und Θ_2 die Werte $(\Theta_1+\Theta_2)$ und Θ_3, und an Stelle von c_1 und c_2 die Werte c_I und c_3 zu setzen sind.

Das zweite Zweimassensystem Abb. 1c wird nach Abb. 1d wiederum durch ein Einmassensystem ersetzt, dessen Masse gleich der Summe $(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)$ ist und dessen Ersatz-Elastizität sich aus der Gleichung:

$$c_{II} = \frac{1}{\varepsilon^2_{II}\,(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)} \quad \ldots \quad (5)$$

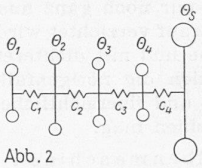
ergibt.

Dieser einfache Rechnungsgang wird, wie die Abb. 1e und 1f andeuten, nach rechtsschreitend fortgesetzt, bis die Kreisfrequenz ε_z des letzten Zweimassen- bzw. des letzten Einmassen-Ersatzsystems gefunden ist, womit dann auch die vielzylindrige inhomogene Kolbenmaschine auf ein Einmassen-System mit der Masse $(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots\Theta_z)$ und mit der Elastizität:

$$c_z = \frac{1}{\varepsilon^2_z\,(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots\Theta_z)} = \frac{1}{\varepsilon^2_z \sum_1^z \Theta} \quad \ldots \quad (6)$$

entsprechend Abb. 1f reduziert ist.

In Wirklichkeit ist die Kurbelwelle am rechtsseitigen Ende meist nicht fest eingespannt, sondern nach Abb. 2 mit mindestens einer grossen Schwungmasse Θ_s gekuppelt. Nach der altbekannten Zweimassenformel ergibt sich hierbei die Kreisfrequenz zu:



$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{c_z}\left\{\frac{1}{\sum_1^z \Theta} + \frac{1}{\Theta_s}\right\}} \quad \ldots \quad (7)$$

bzw. die sekundliche Schwingungszahl zu:

$$\nu = \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \ldots \quad (8)$$

Mit p als Ordnungszahl der Harmonischen des Drehkraft-Diagramms findet man die kritischen Drehzahlen der Welle zu:

$$n_{Kr} = \frac{30\,\varepsilon}{p\,\pi}\ \text{U/min} \quad \ldots \quad (9)$$

wobei für einfachwirkende Zweitakt-Motoren

$$p = 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad \ldots.$$

für einfachwirkende Viertakt-Motoren

$$p = {}^1/_2\quad 1\quad 1{}^1/_2\quad 2\quad 2{}^1/_2\quad 3\quad \ldots.$$

bzw. die zweifachen Werte für doppeltwirkende Maschinen zu setzen ist. Voraussetzungsgemäss kann dieser Rechnungsgang nur streng richtige Resultate geben, wenn der Schwingungsknotenpunkt ausserhalb der Kolbentriebwerksmassen in $c_4 = c_0$ liegt, d. h. also wenn:

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{c_0\,\Theta_s} \quad \ldots \quad (10)$$

Diese einfache Kontrolle empfiehlt sich vor allem dann, wenn die Zylinderzahl gross und das Schwungrad Θ_s verhältnismässig klein ist. Es wird sich im Verlaufe der weiteren Darlegungen noch mehrfach Gelegenheit bieten, auf Kontrollen und ihre strenge Erfüllung zurückzukommen.

II. Die Reduktion inhomogener Kolbenmaschinen mit Hilfe eines Diagramms

Das im vorangegangenen Abschnitt behandelte allgemeine Reduktionsverfahren kann auch mit Hilfe der Verhältniszahlen

[1]) *Grammel*, Ingenieur-Archiv II. Bd. 1932, III. Bd. 1932.

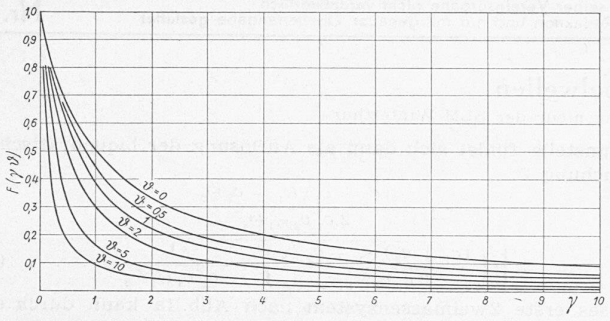


Abb. 3

$$\gamma_1 = \frac{c_2}{c_1} \qquad \text{und} \qquad \vartheta_1 = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

durchgeführt werden. Gleichung (3) geht dann über in die Gleichung:

$$\varepsilon^2_{\mathrm{I}} = \frac{1}{c_1 \Theta_1} f(\gamma_1 \vartheta_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wobei:

$$f(\gamma_1 \vartheta_1) = \frac{(1+\gamma_1+\gamma\,\vartheta_1)}{2\,\gamma_1\,\vartheta_1} - \sqrt{\left\{\frac{(1+\gamma_1+\gamma_1\,\vartheta_1)}{2\,\gamma_1\,\vartheta_1}\right\}^2 - \frac{1}{\gamma_1\,\vartheta_1}} \quad (13)$$

ein Ausdruck, der nur aus Verhältniszahlen aufgebaut ist. Für das erste Ersatz-Einmassensystem mit der Masse $\Theta_1 (1 + \vartheta_1)$ tritt an Stelle von Gleichung (4) die Ersatzelastizität:

$$c_{\mathrm{I}} = \frac{c_1}{(1+\vartheta_1)\, f(\gamma_1 \vartheta_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Für das folgende, aus $\Theta_1 (1 + \vartheta_1)$ und Θ_3, sowie aus c_{I} und c_3 aufgebaute Zweimassensystem werden die Verhältniszahlen:

$$\gamma_2 = \frac{c_3}{c_{\mathrm{I}}} \qquad \text{und} \qquad \vartheta_2 = \frac{\Theta_3}{\Theta_1 (1+\vartheta_1)}$$

gebildet und daraus der neue Wert $f(\gamma_2 \vartheta_2)$ bestimmt, sodass auch:

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = \frac{1}{c_{\mathrm{I}} (1+\vartheta_1)\, \Theta_1} f(\gamma_2 \vartheta_2) = \frac{1}{c_1 \Theta_1} f(\gamma_1 \vartheta_1)\, f(\gamma_2 \vartheta_2) \quad (15)$$

bekannt wird. Die Einmassen-Ersatzelastizität entsprechend der früheren Gleichung (5) wird dann:

$$c_{\mathrm{II}} = \frac{c_1}{(1+\vartheta_1)(1+\vartheta_2)\, f(\gamma_1 \vartheta_1)\, f(\gamma_2 \vartheta_2)} \quad . \quad . \quad (16)$$

usw. nach bereits erkennbarem Bildungsgesetz. Wie ersichtlich, treten die Faktoren $1/c_1 \Theta_1$ bzw. c_1 immer wieder auf, sie kennzeichnen das System in seiner absoluten Grösse.

Die Reduktion einer inhomogenen Kolbenmaschine, beispielsweise einer Mehrfachexpansions-Schiffsmaschine erfordert eine beachtliche Rechenarbeit. Diese wird erleichtert, wenn die schrittweise zu bestimmenden Werte $f(\gamma \vartheta)$ einem Diagramm, wie es Abb. 3 darstellt, entnommen werden können. Solche Berechnungen inhomogener Maschinen dürften aber heute nur noch ganz ausnahmsweise durchzuführen sein, weshalb darauf verzichtet wird, das $f(\gamma \vartheta)$-Diagramm in grösserem Masstabe und mit dichteren ϑ-Linien zu geben. Im übrigen gestaltet sich die nötigenfalls durchzuführende Zahlenrechnung einfacher und übersichtlicher als an Hand der formalen Rechnung erscheinen mag.

III. Die Reduktion homogener Kolbenmaschinen

Für homogene Motoren nach Abb. 4 mit z durchwegs gleichen Drehmassen Θ und ebensovielen durchwegs gleichen Elastizitäten c lässt sich die Kreisfrequenz ersten Grades mit Hilfe der fortlaufenden Verhältniszahlen γ und ϑ bzw. der daraus gebildeten Funktionswerte $f_h(\gamma \vartheta)$ ein für alle Mal zum voraus zahlenmässig berechnen, was den besonderen Wert des Verfahrens ausmachen dürfte. (Der Index h ist gesetzt, um den homogenen Motor zu kennzeichnen.) Nach dem Vorbild der Gleichung (15) wird, wenn man das allererste, aus Θ und c gebildete Einmassensystem ebenfalls anschreibt, die Reihe der fortlaufenden Eigenfrequenzen:

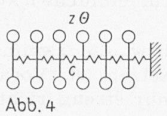


Abb. 4

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= \frac{1}{c\Theta} && = \frac{1}{c\Theta} F_1 = \frac{1}{1\,c\Theta} K_1 \\
\varepsilon_2^2 &= \frac{1}{c\Theta} f_h(\gamma_1 \vartheta_1) && = \frac{1}{c\Theta} F_2 = \frac{1}{2\,c\Theta} K_2 \\
\varepsilon_3^2 &= \frac{1}{c\Theta} f_h(\gamma_1 \vartheta_1)\, f_h(\gamma_2 \vartheta_2) && = \frac{1}{c\Theta} F_3 = \frac{1}{3\,c\Theta} K_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon^2_z &= \frac{1}{c\Theta} f_h(\gamma_1 \vartheta_1)\, f_h(\gamma_2 \vartheta_2)\, f_h(\gamma_3 \vartheta_3) \ldots f_h(\gamma_{z-1} \vartheta_{z-1}) = \\
&= \frac{1}{c\,\Theta} F_z = \frac{1}{z\,c\Theta} K_z
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

wobei also allgemein

$$F_z = f_h(\gamma_1 \vartheta_1)\, f_h(\gamma_2 \vartheta_2)\, f_h(\gamma_3 \vartheta_3) \ldots . f_h(\gamma_{z-1} \vartheta_{z-1}) \quad (18)$$

$$K_z = z\, F_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

F_z und K_z sind Zahlenwerte, die sich bei der Rechnung unmittelbar ergeben und die für alle homogenen Motoren gleicher Zylinderzahl gleich gross sind.

Führen wir noch den Wert ein:

$$c_z = \frac{c}{K_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

so berechnet sich die Schwingung des in Abb. 4 dargestellten homogenen z-Zylinder-Motors nach der Gleichung:

$$\varepsilon^2_z = \frac{1}{z\, c_z\, \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wie ein Einmassensystem mit der Masse $z\Theta$ und mit der nunmehr ebenfalls bekannten Elastizität c_z.

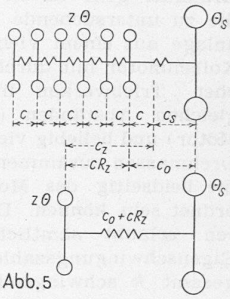


Abb. 5

Ist die Kurbelwelle in Wirklichkeit rechts nicht fest eingespannt, sondern nach Abb. 5 mit einer grossen Schwungmasse Θ_s versehen und ist ferner die zwischen innerster Triebwerkmasse und Schwungmasse vorhandene Elastizität nicht c sondern c_0, so ist noch folgende Umrechnung notwendig: Nach Abb. 5 ist: $c_s = c_0 - c$
und damit wird die einzusetzende Gesamtelastizität

$$c_z + c_s = c_z + c_0 - c = \frac{c}{K_z} + c_0 - c = c\left(\frac{1}{K_z} - 1\right) + c_0$$

Setzen wir für den reinen Zahlenfaktor:

$$\left(\frac{1}{K_z} - 1\right) = R_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

so wird schliesslich:

$$\underline{c_z + c_s = c_0 + c\,R_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und damit kann die Kreisfrequenz ε_z für homogene z-Zylinder-Motoren mit einer Zusatz-Drehmasse sofort angeschrieben werden:

$$\underline{\varepsilon^2_z = \frac{1}{(c_0 + c\,R_z)} \left\{\frac{1}{z\,\Theta} + \frac{1}{\Theta_s}\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Reduktionsziffer R_z ist der für alle homogenen Motoren, gleichgültig welcher Grösse, geltenden Tabelle 1 zu entnehmen.

Tabelle 1

Zylind. Zahl z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_z	0	0,309	0,707	1,128	1,550	1,987	2,458	2,923	3,399	3,883	4,368	4,838

Die Anwendbarkeit der Formel (24) kann nach dem Vorbild der Ungleichung (10) kontrolliert werden. Es muss sein:

$$\varepsilon^2_z \geqq \frac{1}{c_0\, \Theta_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Darüber hinaus lässt sich aber aus der Bedingung, dass im Grenzfall der Schwingungsknotenpunkt gerade in die innerste Triebwerkmasse fällt, die Gleichung aufstellen:

$$\frac{1}{c_0\, \Theta_s} = \frac{1}{(c + c\,R_{z-1})} \left\{\frac{1}{(z-1)\,\Theta}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

bzw.

$$\frac{\Theta_s}{\Theta} = (1 + R_{z-1})\,(z-1)\,\frac{c}{c_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

oder, da meist $\frac{c}{c_0} \leqq 1$, darf Formel (24) benützt werden, solange das Massenverhältnis

$$\frac{\Theta_s}{z\,\Theta} \geqq (1 + R_{z-1})\,\frac{(z-1)}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

mit R_{z-1} aus Tabelle 1. In Tabelle 2 sind nun die für homogene, mit einer Schwungmasse gekuppelten z-Zylinder-Motoren zum vornherein angebbaren Massenverhältniszahlen zusammengefasst. In praktischen Anwendungsfällen dürften diese Zahlenbedingungen wohl ausnahmslos erfüllt sein.

Tabelle 2

Zyl. Zahl z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{\Theta_s}{z\,\Theta}$ =	0,5	0,87	1,28	1,70	2,12	2,56	3,02	3,49	3,96	4,44	4,92

IV. Eigenschwingungen ersten und zweiten Grades einer einwelligen Maschinenanlage bestehend aus einem homogenen Motor und zwei auf der einen Motorseite angeordneten Zusatzdrehmassen (Schwungrad und Generator)

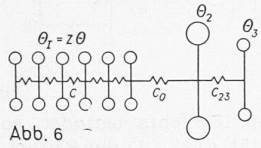


Abb. 6

Auf Grund der bisherigen Darlegungen lassen sich unter Benützung der altbekannten Dreimassenformel (1) die Schwingungen ersten und zweiten Grades der in Abb. 6 dargestellten Maschinengruppe leicht und rasch berechnen. Beachten wir, dass:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= z\,\Theta = \Theta_I \\ c_1 &= c_0 + c\,R_z = r_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

zu setzen sind bzw. gesetzt werden, so wird mit:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{r_1}\left[\frac{1}{\Theta_I}+\frac{1}{\Theta_2}\right]+\frac{1}{c_{23}}\left[\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right] \\ B &= \frac{1}{r_1\,c_{23}}\left[\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_3}+\frac{1}{\Theta_2\,\Theta_3}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

die Bestimmungsgleichung für ε:

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^2 A + B = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Die Auflösung dieser biquadratischen Gleichung ist bekanntlich:

$$\varepsilon_{1,2} = \sqrt{\frac{A}{2} \mp \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Der kleinere Wert ε_1 entspricht der Schwingung ersten Grades mit einem Knotenpunkt. Dieser liegt wohl fast ausnahmslos ausserhalb der Zylinder-Triebwerkmassen, sodass ε_1 streng richtig gefunden wird. ε_2 entspricht der Schwingung zweiten Grades mit zwei Knotenpunkten. Diese raschere Schwingung wird solange aus den Gleichungen (30), (31) und (32) ebenfalls streng richtig bestimmt, als folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\varepsilon^2{}_2 \leq \frac{1}{c\,(1+R_{z-1})}\left[\frac{1}{(z-1)\,\Theta}\right] \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Dies ist nun bei vielzylindrigen Motoren vielfach oder sogar meist nicht der Fall, da der zweite Knotenpunkt bis über die innerste oder sogar zweitinnerste Triebwerkmasse nach aussen rückt. Dennoch kann ε_2 als sehr guter Annäherungswert gelten und zwar einfach aus dem Grunde, weil die Triebwerkmassen, die sich in der Nähe des zweiten Knotenpunktes befinden, im Gegensatz zu der Mehrzahl der weiter aussen liegenden Triebwerkmassen, die Schwingung nur ganz wenig beeinflussen. Durchgerechnete Vergleichsbeispiele erhärten diese Aussage.

V. Die Berechnung der Eigenschwingungen eines verzweigten Drei-Massensystems mit Uebersetzungen

Für weitere praktische Anwendungsfälle ist es nützlich, die Eigenschwingungen des in Abb. 7 dargestellten verzweigten Drei-Massensystems mit Uebersetzungen zu kennen. Eine oder zwei der drei Massen können hierbei homogene Vielzylinder-Motoren sein. φ_1, φ_2, φ_3 bedeuten die Ausschläge der Drehmassen von der Ruhelage aus gemessen, ferner:

$$i_1 = \frac{n_1}{n_{13}}, \quad i_2 = \frac{n_{13}}{n_2}, \quad i_3 = \frac{n_3}{n_{13}}$$

die Uebersetzungsverhältnisse, die kleiner oder grösser als 1 sein können. Ohne nun die etwas lange, aber nichts besonderes bietende Ableitung an dieser Stelle vorzulegen, sei lediglich das Endresultat gegeben.

Mit $(\varphi_1 - i_1\,i_2\,\varphi_2) = \Delta\varphi_1$ und $(\varphi_3 - i_3\,i_2\,\varphi_2) = \Delta\varphi_3$ erhält man die sowohl für $\Delta\varphi_1$ als auch für $\Delta\varphi_2$ geltende Differentialgleichung:

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots M + N = 0 \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

und daraus die der Bestimmung der gesuchten Kreisfrequenzen ε_1 und ε_2 dienende charakteristische Gleichung:

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^2 M + N = 0 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

M und N haben folgende ausgeschriebenen Werte:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{k_1\,k_3 + i_2{}^2\,c_2\,(i_3{}^2\,k_1 + i_1{}^2\,k_3)} \times \\ &\times\left[k_3\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1{}^2\,i_2{}^2}{\Theta_2}\right)+i_2{}^2\,c_2\left(\frac{i_3{}^2}{\Theta_1}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_3}\right)+k_1\left(\frac{i_2{}^2\,i_3{}^2}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right)\right] \\ N &= \frac{1}{k_1\,k_3 + i_2{}^2\,c_2\,(i_3{}^2\,k_1 + i_1{}^2\,k_3)}\left[\frac{i_2{}^2\,i_3{}^2}{\Theta_1\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i_1{}^2\,i_2{}^2}{\Theta_2\,\Theta_3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= (c_1 + i_1{}^2\,c_{12}) \\ k_3 &= (c_3 + i_3{}^2\,c_{23}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Aus den Gleichungen (36) und (37) können sofort einige Spezialfälle abgeleitet werden, nämlich:

a) Für $i_2 = 1$ und starre Wellenstücke c_{12} und c_{23}, d. h. also für $c_{12} = c_{23} = 0$ entsteht bei rein bildlicher Umstellung das in Abb. 8 dargestellte System, wobei M_a und N_a folgende Werte annehmen:

$$\left.\begin{aligned} M_a &= \frac{1}{(c_1\,c_3 + c_1\,c_2\,i_3{}^2 + c_2\,i_3\,i_1{}^2)} \times \\ &\times\left[c_3\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_2}\right)+c_2\left(\frac{i_3{}^2}{\Theta_1}+\frac{i^2{}_1}{\Theta_3}\right)+c_1\left(\frac{i_3{}^2}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right)\right] \\ N_a &= \frac{1}{(c_1\,c_3 + c_1\,c_2\,i^2{}_3 + c_2\,c_3\,i^2{}_1)}\left[\frac{i_3{}^2}{\Theta_1\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_2\,\Theta_3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

b) Wird $i_2 = 1$ und $c_2 = 0$ gesetzt, so entsteht ein System nach Abb. 9 mit den Werten:

$$\left.\begin{aligned} M_b &= \frac{1}{(c_1 + i^2{}_1\,c_{12})}\left[\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_2}\right]+\frac{1}{(c_3 + i_3{}^2\,c_{23})}\left[\frac{i_3{}^2}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right] \\ N_b &= \frac{1}{(c_1 + i_1{}^2\,c_{12})\,(c_3 + i_3{}^2\,c_{23})}\left[\frac{i_3{}^2}{\Theta_1\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_2\,\Theta_3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

c) Setzen wir im voranstehenden Falle $i_3 = 1$ und $c_{12} = c_{23} = 0$, so rückt die Mittelmasse Θ_2 in das bisher immer masselos angenommene Zahnradgetriebe und zwar in das grosse Zahnrad der langsamer laufenden Welle. Die Masse des durch die Verzahnung starr gekuppelten Gegen-Zahnrades kann alsdann mit entsprechender Drehzahlumrechnung ebenfalls berücksichtigt werden. Abb. 10 zeigt das derart aufgebaute Drei-Massensystem. Die ausgeschriebenen Ausdrücke für M_c und N_c lauten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} M_c &= \frac{1}{c_1}\left[\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i^2}{\Theta_2}\right]+\frac{1}{c_3}\left[\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right] \\ N_c &= \frac{1}{c_1\,c_3}\left[\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i^2}{\Theta_2\,\Theta_3}\right] \\ \text{worin:}\quad \Theta_2 &= \Theta_2{}'' + i^2\,\Theta_2{}' \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Diese Formeln sind in etwas anderer Form in der «Hütte» ebenfalls zu finden. Es sei noch darauf hingewiesen, dass allfällig in die Zahnräder eingebaute Linear-Federungen auf entsprechende Wellenverdrehungen umgerechnet werden können und zu den jeweils benachbarten Wellenelastizitäten c hinzuzuzählen sind.

d) Wird in c) $i = 1$ gesetzt, so fallen Θ'_2 und Θ''_2 zu Θ_2 zusammen und es erscheint die altbekannte Drei-Massenformel, die wir schon in Abschnitt I gebraucht haben, mit dem Unterschied, dass c_2 in c_3 umgetauft ist. Es kann deshalb darauf verzichtet werden, die bekannten Werte M_d und N_d anzuschreiben.

e) Machen wir in Abb. 9 $\Theta_3 = \infty$, $c_3 = 0$ und $i_3 = 1$, so ergibt sich eine Anordnung nach Abb. 11 und das Gleichungspaar (39) geht über in das Paar

$$\left.\begin{aligned} M_e &= \frac{1}{(c_1 + i_1{}^2\,c_{12})}\left[\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1{}^2}{\Theta_2}\right]+\frac{1}{c_{23}}\left[\frac{1}{\Theta_2}\right] \\ N_e &= \frac{1}{(c_1 + i_1{}^2\,c_{12})\,c_{23}}\left[\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

auf das wir später zurückkommen werden. Wir erkennen übrigens, dass, wenn Gl. (41) in Gl. (35) eingesetzt und $i_1 = 1$ und $c_{12} = 0$ gemacht werden, die Ausgangsgleichung (2) unserer Betrachtungen in etwas anderer Gestalt erscheint.

f) Werden die unter a), b), c) und d) behandelten Systeme vollkommen symmetrisch ausgebildet, so ist eine vereinfachte Rechnung möglich. Ist beispielsweise in d)

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \Theta_3 = \Theta \\ c_1 &= c_3 = c \\ \Theta_2 &= \Theta_s \end{aligned}\right.$$

so wird mit:

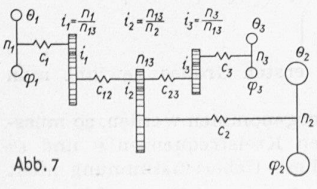


Abb. 7

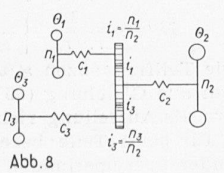


Abb. 8

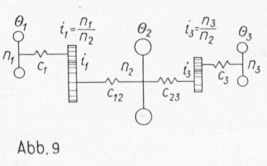


Abb. 9

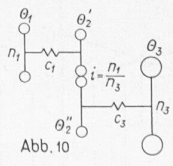


Abb. 10

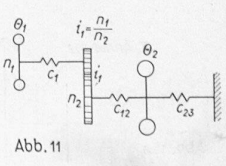


Abb. 11

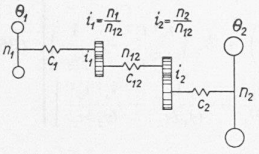


Abb. 12

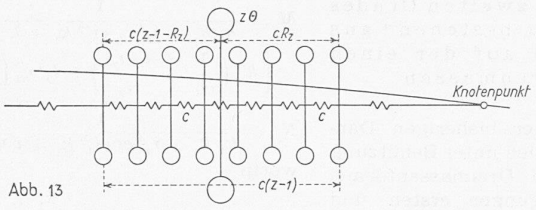


Abb. 13

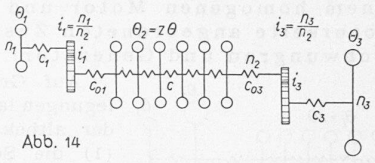


Abb. 14

$$\left.\begin{aligned} M_f &= \frac{2}{c}\left[\frac{1}{\Theta}+\frac{1}{\Theta_s}\right] \\ N_f &= \frac{1}{c^2\Theta}\left(\frac{1}{\Theta}+\frac{2}{\Theta_s}\right)=\left[\frac{1}{c\Theta}\right]\left[\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{\Theta}+\frac{2}{\Theta_s}\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Die Auflösung der zugehörigen Gleichung (35) ergibt dann die Kreisfrequenzen der beiden Teilschwingungen:

$$\varepsilon_1^2=\frac{1}{c\Theta} \qquad \varepsilon_1^2=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{\Theta}+\frac{2}{\Theta_s}\right]$$

Werte, die nicht nur ohne weiteres hätten angegeben werden können, sondern die wir auch in den eckigen Klammern von N_f wieder erkennen. Es gilt deshalb ganz allgemein in Symmetriefällen, wenn man N_f in N_S umtauft

$$N_S=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Demnach ist es gar nicht notwendig, bei dem durch die Symmetrie hervorgerufenen Zerfall eines Drei-Massensystems in zwei Zwei-Massensysteme zur Bestimmung der beiden Teil-Kreisfrequenzen ε_1 und ε_2 die vollständige Gleichung (35) anzuschreiben, vorausgesetzt, dass man überhaupt den entsprechenden unsymmetrischen Fall zum Ausgangspunkt der Rechnung machen will.

g) Wird Gleichung (35) mit M, N, k_1, k_3 vollständig angeschrieben, mit Θ_3 erweitert und darin alsdann $\Theta_3=0$ gesetzt, so erhält man die Kreisfrequenz des in Abb. 12 dargestellten übersetzten Zwei-Massensystems:

$$\varepsilon^2=\frac{1}{(c_1+i_1^2c_{12}+i_1^2i_2^2c_2)}\left[\frac{1}{\Theta_1}+\frac{(i_1i_2)^2}{\Theta_2}\right] \quad . \quad (44)$$

Mit $i_1=i_2=1$ und $c_{12}=c_2=0$ erscheint schliesslich die ganz elementare Zwei-Massenformel.

VI. Eigenschwingungen ersten Grades einer Maschinengruppe bestehend aus einem homogenen Motor mit beidseits angeordneten Zusatz-Drehmassen

Auf Grund der bisherigen Erklärungen ist es nun ohne weiteres möglich, jene Aufgaben zu lösen, bei denen sich ein oder zwei homogene Motoren in den äussern Zweigen eines Drei-Massensystems befinden und bei denen der Knotenpunkt der Schwingung ersten Grades ausserhalb des Motors bzw. der Motoren liegt. Es sei nun noch die Behandlung solcher Maschinengruppen aufgezeigt, bei denen sich ein homogener Motor zwischen zwei Zusatz-Drehmassen befindet, und bei denen nicht zum vornherein feststeht, auf welcher Seite des Motors der Knotenpunkt ersten Grades liegt, oder bei denen dieser sogar innerhalb des Motors zu erwarten ist.

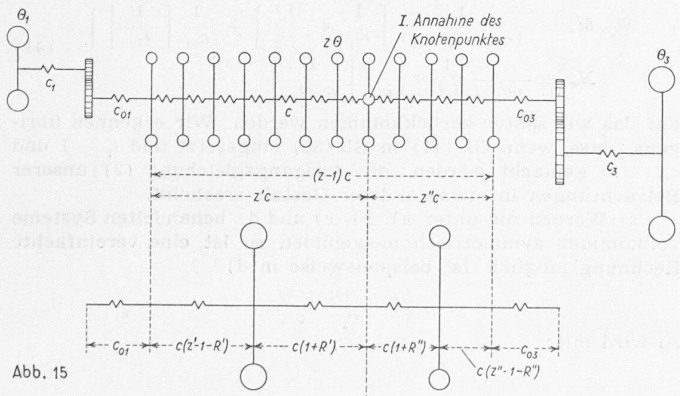


Abb. 15

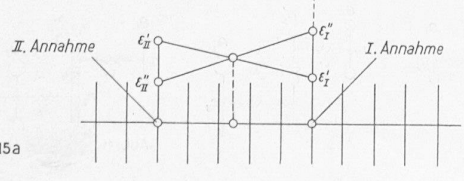


Abb. 15a

Wenn sich der Knotenpunkt in Abb. 13 rechts befindet, so ist die Unterteilung der Gesamtelastizität $c\,(z-1)$ der Kurbelwelle durch die Ersatzmasse $z\Theta$ gegeben durch die Werte:

$$c\,R_z \text{ und } c\,(z-1-R_z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

wie es ohne weiteres aus Abb. 13 abgelesen werden kann. Damit lassen sich aber auch die Elastizitäten der links- und rechtsseitig angeschlossenen Zusatz-Drehmassen anfügen.

Läge der Knotenpunkt auf der linken Seite des Motors, so wären einfach die beiden Teilelastizitäten (46) miteinander zu vertauschen.

a) Das Schwingungssystem nach Abb. 14 mit beidseits des homogenen Motors über Zahnradgetriebe angekuppelten Zusatz-Drehmassen hat den Grundaufbau nach Abb. 9. Es kann also mit Hilfe der Gleichungen (39) bzw. (35) untersucht werden, wobei $\Theta_2=z\Theta$ wird. Um die Reduktion des homogenen Motors aber richtig vorzunehmen, muss man sich über die Lage des Knotenpunktes der Schwingung ersten Grades zuerst Rechenschaft geben. Ist $i_1^2\Theta_1$ trotz der Uebersetzung gegenüber $z\Theta$ klein und Θ_3/i_3^2 trotz der Untersetzung gegenüber $z\Theta$ gross, so liegt der Knotenpunkt innerhalb c_3 oder c_{03}. Auf Grund der Gleichungen (46) können die in den Gleichungen (39) einzusetzenden Elastizitäten wie folgt angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} c_1+i_1^2c_{12}&=c_1+i_1^2[c_{01}+c\,(z-1-R_z)]=r_1 \\ c_3+i_3^2c_{23}&=c_3+i_3^2[c_{03}+c\,R_z]=r_3 \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Ist umgekehrt $i_1^2\Theta_1$ gegenüber $z\Theta$ gross und Θ_3/i_3^2 wegen der Untersetzung gegenüber $z\Theta$ klein, so liegt der Knotenpunkt in c_1 oder c_{01}. Alsdann sind in Gleichung (47) die Glieder mit R_z einfach miteinander zu vertauschen, wie bereits gesagt worden ist. Die Abb. 14 bzw. die Gleichungen (47) schliessen selbstredend auch die Fälle ein, bei denen i_1 oder i_3 oder auch beide miteinander $=1$ sind.

b) Wenn $i_1^2\Theta_1$ und Θ_3/i_3^2 ungefähr gleich gross sind, kann der erste Knotenpunkt innerhalb des Motors liegen. Die Rechnung geht nun so vor sich, dass man den Knotenpunkt zunächst willkürlich in einer der z-Motormassen annimmt, den linken und rechten Teil des so aufgeteilten homogenen Motors je für sich reduziert und so das ursprüngliche System in zwei getrennte Zwei-Massensysteme zerlegt. Die entstehenden reduzierten Zwei-Massensysteme haben denselben Aufbau wie Abb. 11 und sie können deshalb auch nach dem Vorbild der Gleichungen (41) berechnet werden. Wenn die Zahl der links bzw. rechts des angenommenen Knotenpunktes befindlichen Motormassen mit z' und z'' bezeichnet wird, so ist bei der Art der vorgenommenen Aufteilung der insgesamt z-Motormassen:

$$z=z'+1+z'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Die wirksamen Elastizitäten können in Abb. 15 sofort angeschrieben werden, wobei an Stelle von R_z die entsprechenden Reduktionsziffern R' und R'' treten, die wiederum der Tabelle 1 entnommen werden können.

Für das linke Teilsystem wird dann:

$$\left.\begin{aligned} c_1+i_1^2c_{12}&=c_1+i_1^2[c_{01}+c\,(z'-1-R')]=r_1' \\ c_{23}&=c\,(1+R') \qquad\qquad\quad =r_2' \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

und somit:

$$\left.\begin{aligned} M'&=\frac{1}{r_1'}\left[\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1^2}{z'\Theta}\right]+\frac{1}{r_2'}\left[\frac{1}{z'\Theta}\right] \\ N''&=\frac{1}{r_1'r_2'}\left[\frac{1}{\Theta_1 z'\Theta}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (50)$$

Für das Teilsystem rechts ist:

$$\left.\begin{aligned} r_1''&=c_3+i_3^2[c_{03}+c\,(z''-1-R'')] \\ r_2''&=c\,(1+R'') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (51)$$

sodass nun:

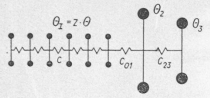
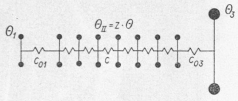
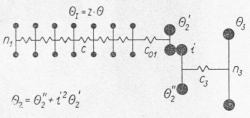
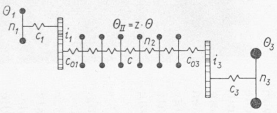
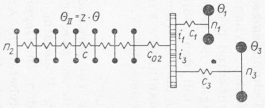
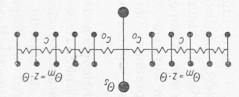
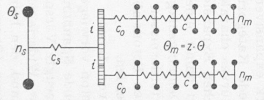
$$M''=\frac{1}{r_1''}\left[\frac{1}{\Theta_3}+\frac{i^2_3}{z''\Theta}\right]+\frac{1}{r_2''}\left[\frac{1}{z''\Theta}\right]$$

$$N''=\frac{1}{r_1''r_2''}\left[\frac{1}{\Theta_3 z''\Theta}\right]$$

wird. Die Teilfrequenzen ε' und ε'' ersten Grades gewinnt man wiederum aus Gleichung (35).

Wäre die Aufteilung richtig vorgenommen worden, so müssten die für beide Teile berechneten Kreisfrequenzen ε' und ε'' miteinander übereinstimmen. Ist diese Uebereinstimmung nicht

Tabelle 3

	Maschinen-Anlage	$i \lessgtr 1$	r	M	N bzw. N_s
1		—	$r_1 = c_{01} + c\,R_z$	$\frac{1}{r_1}\left\{\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_2}\right\}+\frac{1}{c_{23}}\left\{\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right\}$	$\frac{1}{r_1\,c_{23}}\left\{\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_3}+\frac{1}{\Theta_2\,\Theta_3}\right\}$
2		—	$r_1 = c_{01} + c(z-1-R_z)$ $r_3 = c_{03} + c\,R_z$	$\frac{1}{r_1}\left\{\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_{II}}\right\}+\frac{1}{r_3}\left\{\frac{1}{\Theta_{II}}+\frac{1}{\Theta_3}\right\}$	$\frac{1}{r_1\,r_3}\left\{\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_{II}}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{1}{\Theta_{II}\,\Theta_3}\right\}$
3		$i=\frac{n_1}{n_3}$	$r_1 = c_{01} + c\,R_z$	$\frac{1}{r_1}\left\{\frac{1}{\Theta_{II}}+\frac{i^2}{\Theta_2}\right\}+\frac{1}{c_3}\left\{\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right\}$	$\frac{1}{r_1\,c_3}\left\{\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_I\,\Theta_3}+\frac{i^2}{\Theta_2\,\Theta_3}\right\}$
4		$i_1=\frac{n_1}{n_2}$ $i_3=\frac{n_3}{n_2}$	$r_1 = c_1 + i_1^2\left\{c_{01}+c(z-1-R_z)\right\}$ $r_3 = c_3 + i_3^2\left\{c_{03}+c\,R_z\right\}$ $c(z-1-R_z)$ und cR_z eventl. miteinander vertauscht	$\frac{1}{r_1}\left\{\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1^2}{\Theta_{II}}\right\}+\frac{1}{r_3}\left\{\frac{1}{\Theta_{II}}+\frac{i_3^2}{\Theta_3}\right\}$	$\frac{1}{r_1\,r_3}\left\{\frac{i_3^2}{\Theta_1\,\Theta_{II}}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i_1^2}{\Theta_{II}\,\Theta_3}\right\}$
5		$i_1=\frac{n_1}{n_2}$ $i_3=\frac{n_3}{n_2}$	$r_2 = c_{02} + c\,R_z$	$\frac{\left\{c_3\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{i_1^2}{\Theta_{II}}\right)+r_2\left(\frac{i_3^2}{\Theta_1}+\frac{i_1^2}{\Theta_3}\right)+c_1\left(\frac{i_3^2}{\Theta_{II}}+\frac{1}{\Theta_3}\right)\right\}}{c_1\,c_3+r_2\,(c_1\,i_3^2+c_3\,i_1^2)}$	$\frac{1}{c_1\,c_3+r_2\,(c_1\,i_3^2+c_3\,i_1^2)}\left\{\frac{i_3^2}{\Theta_1\,\Theta_{II}}+\frac{1}{\Theta_1\,\Theta_3}+\frac{i_1^2}{\Theta_{II}\,\Theta_3}\right\}$
6		—	$r = c_0 + c\,R_z$		$N_s=\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2=$ $\left[\frac{1}{(c_0+c\,R_z)\,\Theta_m}\right]\left[\frac{1}{(c_0+c\,R_z)}\left\{\frac{1}{\Theta_m}+\frac{2}{\Theta_s}\right\}\right]$
7		$i=\frac{n_m}{n_s}$	$r = c_0 + c\,R_z$		$N_s=\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2=$ $\left[\frac{1}{(c_0+c\,R_z)\,\Theta_m}\right]\left[\frac{1}{(c_0+c\,R_z+2\,i^2\,c_s)}\left\{\frac{1}{\Theta_m}+\frac{2\,i^2}{\Theta_s}\right\}\right]$

z =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_z =	0	0,309	0,707	1,128	1,55	1,987	2,458	2,923	3,399	3,883	4,368	4,838

Für 1) ÷ 5) ε_1 und ε_2 aus $\varepsilon^4 - \varepsilon^2\,M + N = 0$
Für 5) eventl. Probierverfahren
Für 6) ÷ 7) $N_s = \varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2$

vorhanden, so muss die Rechnung für eine andere Annahme des Knotenpunktes innerhalb des homogenen Motors wiederholt werden. Die wahre Kreisfrequenz ε und der wahre Knotenpunkt ergeben sich dann durch lineare Interpolation nach Abb. 15 a mit grosser Annäherung.

Systeme mit beidseits eines homogenen Motors befindlichen Zusatz-Drehmassen lassen sich also nicht mehr ganz so einfach und schnell berechnen wie die früher behandelten Fälle. Die vorstehenden Untersuchungen unter a) und b), insbesondere unter b), sollen zeigen, dass man sich aber auch in weniger häufigen Ausnahmefällen helfen kann.

VII. Zusammenfassung

Auf Grund eines einfachen Gedankenganges wird zunächst eine inhomogene Kolbenmaschine (Dampfmaschine mit mehreren Zylindern verschiedener Grösse) stufenweise auf eine einzige, dynamisch gleichwertige Masse reduziert. Die zugehörigen Rechnungen können mit Hilfe des Diagrammes (Abb. 3), erleichtert werden. Homogene Kolbenmaschinen (Verbrennungsmotoren) mit bis zu zwölf Zylindern bzw. zwölf Kurbeln können indessen ohne ein solches Diagramm, mit Hilfe einer jeder Kurbelzahl z zugeordneten Reduktionsziffer R_z auf eine einzige Masse reduziert werden. Die Reduktionsziffer ist der Tabelle 1 zu entnehmen. Weiter werden für ein allgemeines Drei-Massensystem mit Zahnradgetrieben Gleichungen zur Bestimmung der Kreisfrequenzen ersten und zweiten Grades angegeben und daraus in Verbindung mit dem Reduktionsverfahren für homogene Motoren einige Anwendungen als Spezialfälle abgeleitet. Zur Erleichterung der Rechnung sind folgende Fälle in Tabelle 3 zusammengefasst:

1. Stationäre Maschinengruppe üblicher Bauart mit Schwungrad und Generator.
2. Maschinengruppe mit schwerem Schwungrad am einen und leichter Zusatz-Drehmasse am andern Ende der Kurbelwelle.
3. Schiffsmaschinengruppe mit schwerem Zahnradgetriebe und mit untersetztem Propeller; Fahrzeug-Antrieb.
4. Flugzeugmotor mit untersetztem Propellerantrieb am einen und mit übersetztem Laderantrieb am andern Ende der Kurbelwelle.
5. Flugzeugmotor mit untersetztem Propellerantrieb und mit übersetztem Laderantrieb am gleichen Wellenende.
6. Symmetrische Maschinengruppe mit zwei Motoren, die parallel auf einen zwischenliegenden Generator arbeiten.
7. Symmetrische Maschinengruppe mit zwei Motoren, die parallel über zugehörige Getriebe auf einen gemeinsamen Generator arbeiten.

In den Fällen 1 bis 3 können die gesuchten Kreisfrequenzen ε_1 und ε_2 der Schwingungen ersten und zweiten Grades mit Hilfe der in Tabelle 3 angegebenen M- und N-Werte aus der charakteristischen Gleichung:

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^2 M + N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

berechnet werden. Dabei wird in den meisten praktischen Anwendungsfällen ε_1 strengrichtig und ε_2 mit sehr guter Annäherung gefunden. Bedingungen für streng richtige Lösungen werden angegeben.

In den Fällen 6 und 7 lassen sich die Ausdrücke für die Kreisfrequenzen ε_1 und ε_2 unmittelbar aus der Gleichung ablesen:

$$N_S = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Fall 5 kann eventuell mit vertauschten Werten $c R_z$ und $c(z - 1 - R_z)$ wie die Fälle 1 bis 3 berechnet werden, doch ist nur ε_1 brauchbar. Gegebenenfalls ist das Probierverfahren nach Abschnitt VI unter b) anzuwenden.

Weitere Anwendungsfälle lassen sich auf Grund der vorliegenden Untersuchungen leicht lösen.

Der expansive Beton im Wiederaufbau Frankreichs

In Fortsetzung seiner Veröffentlichungen im Jahre 1944 [1]) gibt *Henri Lossier* in «Le Génie Civil» vom 15. Oktober und 1. November 1945 unter dem Titel: «L'Utilisation de Ciments expansifs pour la réparation et la reconstruction d'ouvrages d'art sinistrés» einen wertvollen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten des expansiven Betons auf dem Gebiete der Ausbesserungs- und Wiederinstandstellungsarbeiten von Bauwerken, die durch den Krieg beschädigt oder teilweise zerstört wurden. Die Ausführungen Lossiers sind bemerkenswert; sie zeigen vor allem, in welchem Umfange bereits der expansive Beton in Frankreich zu den verschiedensten konstruktiven Problemen, die vorerst notgedrungen mit dem Wiederaufbau zusammenhängen, herangezogen wird. Man gewinnt den Eindruck, dass Lossier sowohl die materialtechnischen, im besonderen die chemischen und «dynamischen» Grundlagen, als auch die konstruktiv-technische Seite seiner Erfindung soweit ausgebaut hat, dass er zahlreiche, gegenwärtig für Frankreich sehr dringende Bauaufgaben mannigfacher Art mit einfachen Mitteln zu lösen im Stande ist.

Der Mechanismus der Expansion kann reguliert werden. Knapp nach dem Abbinden des Betons wird der Expansionsprozess durch intensive Befeuchtung eingeleitet, deren Dauer (5 bis 15 Tage) entsprechend der gewünschten Intensität der Expansion bemessen und bei deren Aufhören der Expansionsprozess automatisch und endgültig gedrosselt wird. Damit ist die Hauptforderung an den expansiven Beton, nämlich die *quantitative Beherrschung der Expansion,* erfüllt. Lossier hat verschiedene Kategorien von expansivem Beton geschaffen, vom schwindfreien bis zum stark expansiven Beton mit einem Dehnungsmass von 15 mm/m. Jede Kategorie wird durch die sogen. «dynamische Expansionskurve» charakterisiert, die, experimentell bestimmt, den spezifischen Expansionsdruck in Abhängigkeit der Dehnung darstellt und damit eine gewisse Analogie mit dem üblichen Spannungs-Dehnungsdiagramm aufweist. Auf dieser Grundlage kann den Erfordernissen entsprechend der quantitative Einsatz des expansiven Betons abgestuft und der zu erzielenden Wirkung angepasst werden.

In den von Lossier beschriebenen Beispielen kommt der expansive Beton vorwiegend ohne Armierung zur Anwendung. Der entstehende Spannungszustand ist ein solcher zweiter Art, d. h. die erzeugte Vorspannung entsteht am Widerstand der Auflager bzw. Widerlager gegen die Expansion, im Gegensatz zum Widerstand, den beim armierten Expansivbeton die Armierungen erzeugen (Spannungszustand erster Art). Die Rolle, die Lossier hier dem expansiven Beton zuweist, ist die eines Spannungsregulators im Sinne einer Wiederherstellung des ursprünglichen, durch die Bombardierungsschäden gestörten Spannungs-Zustandes. Für die Gewölbe ist damit auf einfache Art und Weise ein von hydraulischen Pressen unabhängiges Gewölbeexpansions-Verfahren geschaffen, das bemerkenswerte technische und wirtschaftliche Vorzüge besitzt. Das Verfahren lässt sich sowohl auf Beton- und Eisenbeton- als auch auf Mauerwerkgewölbe ohne wesentliche Unterschiede gleich gut anwenden. Aehnlich kann ein an seiner Oberseite beschädigter Balken durch Behandlung mit expansivem Beton künstlich in einen günstigeren Spannungs-Zustand versetzt werden.

Lossier wählt fünf typische Beispiele aus: Die Wiederinstandstellung einer Bogenbrücke aus Mauerwerk mit elliptischen Gewölben, eines Mauerwerkviaduktes auf hohen Pfeilern, einer Balkenbrücke mit Kastenquerschnitt und veränderlichem Trägheitsmoment, eines rechteckförmigen Kranbahnträgers, sowie den Wiederaufbau einer fast vollständig zerstörten Bogenbrücke mittels vorgespannter Eisenbetongewölbe mit schwacher Armierung. Sämtliche Brücken sind zweigleisige Eisenbahnbrücken. Wir beschränken uns auf einige charakteristische Hinweise. Bei der Ausbesserung von Breschen in Gewölben wurde i. a. auf komplizierte Gerüstkonstruktionen verzichtet zu Gunsten des Einbaues von Hilfsbögen aus Eisenbeton, die sich im gesunden Mauerwerk abstützen. Auf dieser Unterlage wurden die zur Schliessung der Bresche bestimmten Gewölbeteile aus schwach expansivem Beton hergestellt, in deren Scheitelpartie ein «Zap-



Bild 2. Blick in den neuen Fischpass des Stauwehrs Kembs

[1]) Siehe diesbezgl. SBZ Bd. 124, S. 95 (1944).