

# Ueber die Nachgiebigkeit von Wellrohrexansionen

Autor(en): **Salzmann, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **127/128 (1946)**

Heft 11

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-83812>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### Ueber die Nachgiebigkeit von Wellrohrexansionen

Von Dr. F. SALZMANN, Obering. in der Forschungsabteilung der Escher Wyss Maschinenfabriken AG, Zürich

Beim Entwurf wärmetechnischer Anlagen ist stets die ungleiche Dehnung der Bauteile infolge von Temperaturunterschieden unter sich oder gegen die Umgebung oder ungleicher Dehnungen verschiedener Werkstoffe bei gleicher Erwärmung zu berücksichtigen. Ferner sind durch geeignete Massnahmen Zusatzbeanspruchungen oder Fixpunktdrücke durch verhinderte Temperaturdehnungen zu vermeiden. Probleme dieser Art stellen sich namentlich bei Anwendung hoher Temperaturen, wie sie beim Bau moderner Wärmekraftmaschinen angestrebt werden. Ein Mittel, Wärmedehnungen ohne grössere Reaktionskräfte aufzunehmen, bilden die oft verwendeten Wellrohrexansionen (Bild 1). Sie können auch sonst zur dichten Verbindung zweier sich gegenseitig verschiebender Teile verwendet werden.

Die Nachgiebigkeit solcher Körper wird oft unter Vernachlässigung der Ringspannungen berechnet, indem man sie als ebene Wellbleche betrachtet. Diese einfache Berechnungsart mag gelegentlich in guter Uebereinstimmung mit der Praxis stehen; in vielen Fällen aber versagt sie vollkommen; so erweist sich das Wellrohr in Wirklichkeit bedeutend steifer als nach dieser Berechnung, wenn die auftretenden Ringspannungen die Deformation wesentlich behindern.

Im folgenden wird die Nachgiebigkeit von Wellrohren unter dem Einfluss von Kräften untersucht, die in Richtung der Rohraxe wirken, wobei der Einfluss der Ringspannungen voll berücksichtigt werden soll. Es werden auch Wellenformen, die aus geraden und Kreisbogenstücken zusammengesetzt sind, betrachtet und bezüglich Nachgiebigkeit möglichst günstige Verhältnisse ermittelt. Im weiteren wird für einzelne Fälle der Verlauf der Biegebeanspruchung dargestellt.

#### a) Vereinfachte Berechnung ohne Berücksichtigung der Ringspannung

Die Berechnung werde für die eckige Welle nach Bild 2 und die durch Kreisbogen abgerundete Welle nach Bild 3 durchgeführt. Das Wellrohr, das unter der Wirkung einer axialen Zugkraft  $P$  steht, wird hier in der Umfangsrichtung abgewickelt und wie ein ebenes Wellblech von der Breite des mittleren Rohrumfanges  $2\pi R$  behandelt. Der Unterschied des Rohrumfanges am inneren und äusseren Wellenscheitel wird also in der Berechnung nicht berücksichtigt. Damit erhalten die nach innen und die nach aussen gehende Halbwellen gleiche Beanspruchung und Deformation. Die in Wirklichkeit auftretenden Unterschiede in der Deformation werden sich auf die gesamte Nachgiebigkeit einer oder mehrerer voller Wellen praktisch nicht auswirken, da sie sich gegenseitig kompensieren. Ferner werden bei dieser grundlegenden Betrachtung die besonderen Randbedingungen beim Beginn der ersten Welle und am Ende der letzten Welle, wo das gerade Rohr anschliesst, nicht berücksichtigt, sodass alle Wellen den gleichen Bedingungen unterworfen sind. Damit ist stets der Scheitel  $S$  ein Symmetriepunkt mit bei der Deformation unveränderter Tangentenrichtung, während im Wellenmittel  $C$  ein Wendepunkt mit reiner Schubbeanspruchung (Biegemoment = 0) auftritt. Die Ausdehnung einer Viertelwelle, d. h. die Verschiebung  $\delta$  des Angriffspunktes von  $P$  in Richtung von  $P$  wird am einfachsten durch partielles Differenzieren der Deformationsarbeit  $A$  nach der Kraft  $P$  berechnet:

$$\delta = \frac{\partial A}{\partial P} \dots \dots \dots (1)$$

Hierbei kann nach zumeist gebräuchlichem Vorgehen die Deformationsarbeit der Zug- oder Druckkräfte gegenüber jener der Biegemomente vernachlässigt werden. Diese wird in bekannter Weise für einen Stab durch die Formel

$$A = \frac{1}{2JE} \int M^2 dl \dots \dots \dots (2)$$

berechnet, wobei das Integral über die ganze Stablänge  $l$  zu erstrecken ist. Hierin bedeuten  $J$  das axiale Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in  $cm^4$ ,  $E$  der Elastizitätsmodul in  $kg/cm^2$  und  $M$  das Biegemoment in  $cmkg$ . In unserem Fall, wo der Stab aus einem breiten Blech besteht, ist wegen der verhinderten seitlichen Querkontraktion bei der Biegung an Stelle von  $JE$  der Ausdruck  $JE/(1-\nu^2)$  ( $\nu$  = Querkontraktionsbeiwert  $\approx 0,3$ ) zu setzen. Bei der Blechstärke  $s$  und der Blechbreite  $2\pi R$ , entsprechend dem mittleren Rohrumfang, ist:

$$J = \frac{2\pi R s^3}{12} \dots \dots \dots (3)$$

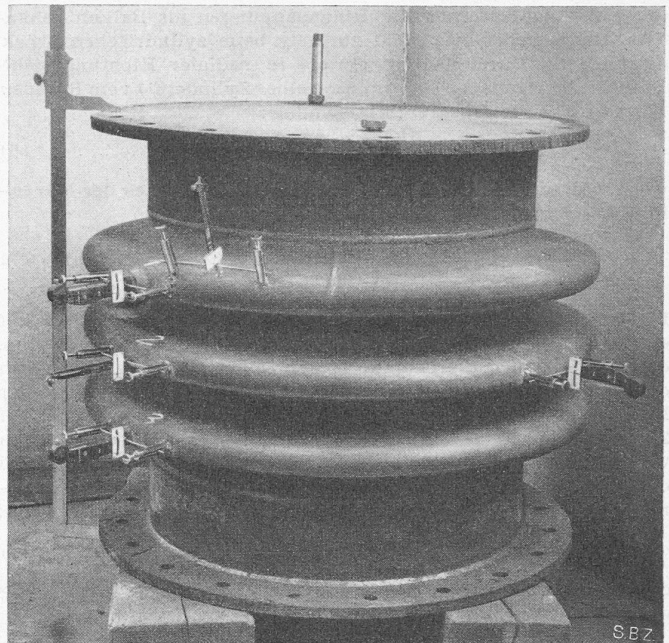


Bild 1. Wellrohrexansion

Als Resultat erhält man für die Verschiebungen  $\delta$  die folgenden Ausdrücke:

für die eckige Welle:

$$\delta_I = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{a}{h} \right\} = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \zeta_I \left( \frac{a}{h} \right) \quad (4)$$

und für die abgerundete Welle:

$$\delta_{II} = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{3} + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \left( \frac{a}{h} \right) + (3 - \pi) \left( \frac{a}{h} \right)^2 + \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{7}{3} \right) \left( \frac{a}{h} \right)^3 \right\} = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \zeta_{II} \left( \frac{a}{h} \right) \quad (5)$$

Die Klammerausdrücke der Gleichungen (4) und (5), die zur Abkürzung mit  $\zeta_I$  und  $\zeta_{II}$  bezeichnet werden, sind Funktionen des Verhältnisses der Breite zur Höhe der Welle; sie sind in Bild 4 aufgetragen. Verschwindende Breite ( $a = 0$ ) führt in beiden Fällen auf den Wert  $\zeta = 1/3$ , also auf den Beiwert für die Durchbiegung des einseitig eingespannten Balkens. Ist  $a > 0$ , so ist die eckige Form wesentlich nachgiebiger als die abgerundete. So ist z. B. für  $a = h$   $\zeta_I = 4/3$  und  $\zeta_{II} = \pi/4$ .

#### b) Berechnung der Nachgiebigkeit mit Berücksichtigung der Ringspannungen

Die Berechnung ist ohne weiteres möglich für den Fall der eckigen Welle. Hier besteht das Wellrohr aus abwechselungsweise aneinandergereihten ebenen Kreisringplatten und zylindrischen Rohrstücken, deren Deformation verhältnismässig einfach berechnet werden kann. Eine nähere Kontrolle zeigt, dass

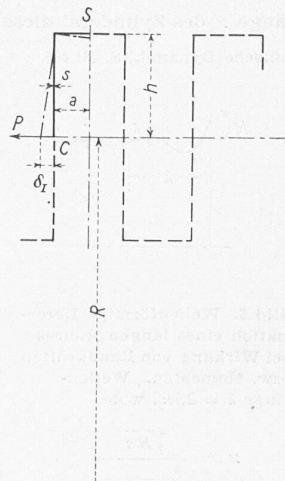


Bild 2. Eckige Welle

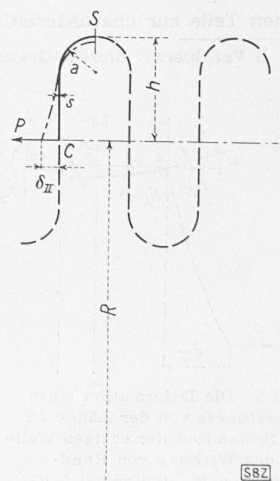


Bild 3. Mit Kreisbogen abgerundete Welle

es sich in diesem Falle kaum lohnt, auf die Ringplatte die Plattentheorie anzuwenden, und dass das Ergebnis kaum beeinflusst wird, wenn man die Platte radial aufschlitzt und sie unter Vernachlässigung der Ringspannungen als Balken behandelt. Dagegen ist dies nicht zulässig beim zylindrischen Stück, da hier die Durchbiegung gerade in radialer Richtung geht.

Für die elastische Deformation eines Zylinders<sup>1)</sup> vom Radius  $r$  (Bild 5) gilt die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4}{r^2} w = 0 \dots \dots \dots (6)$$

wenn mit  $w$  die radiale Verschiebung eines Punktes der Mantellinie bezeichnet wird. Dabei ist:

$$\kappa = \frac{\sqrt{rs}}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots \dots \dots (7)$$

Die Lösung der Differentialgleichung hat, bei Anwendung auf ein zylindrisches Stück der Welle, der Bedingung zu genügen, dass für  $x = \pm a$  die radiale Verschiebung  $w = 0$  sei, da durch die anschliessenden Ringplatten ein radiales Ausweichen der Randpunkte  $A$  und  $B$  verhindert wird, wobei von Platte auf Zylinder die radial wirkenden Kräfte  $N_A$  und  $N_B$  übertragen werden. Ausserdem wird von der Platte auf den Zylinder bei der Ausbiegung in  $A$  ein Biegemoment  $M_A$  übertragen, das gemäss der Biegetheorie für die Zylinderschale durch die Formel:

$$\frac{M_A}{2\pi r} = \frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}_{x=\pm a} \dots \dots \dots (8)$$

dargestellt wird. Diesen Bedingungen genügt die folgende Lösung der Differentialgleichung (7):

$$w = \frac{M_A/2\pi r}{E s^3/12(1-\nu^2)} \frac{1}{2} \left[ \text{sh}^2\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right) \right] \times \left\{ -\text{sh} \frac{\alpha}{\kappa} \sin \frac{\alpha}{\kappa} \text{ch} \frac{x}{\kappa} \cos \frac{x}{\kappa} + \text{ch} \frac{\alpha}{\kappa} \cos \frac{\alpha}{\kappa} \text{sh} \frac{x}{\kappa} \sin \frac{x}{\kappa} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

der Winkel  $\alpha$  wird:

$$\alpha = \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=-a} = \frac{M_A/2\pi r}{E s^3/12(1-\nu^2)} \frac{\kappa}{2} \frac{\text{sh}\left(\frac{2\alpha}{\kappa}\right) + \sin\left(\frac{2\alpha}{\kappa}\right)}{\text{ch}\left(\frac{2\alpha}{\kappa}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{\kappa}\right)} \dots \dots \dots (10)$$

Damit lässt sich die Auslenkung  $\delta_{III}$  am Ende des Wellenviertels berechnen. Es wird zweckmässig wieder der Umstand vernachlässigt, dass das innere und das äussere zylindrische Stück verschiedene Radien haben und für beide die Deformation gleich mit einem mittleren Radius berechnet, da sich bei Berechnung der Gesamtdeformation einer oder mehrerer Wellen diese Unterschiede im wesentlichen kompensieren. Die Kraft  $P$  ergibt, wenn die Platte näherungsweise radial aufgeschlitzt als Balken von der Länge  $h$  behandelt wird, bei  $A$  das Moment  $M_A = P \cdot h$ . Ferner ist  $E s^3/12(1-\nu^2) = JE/12(1-\nu^2) 2\pi R$ .

Die Auslenkung  $\delta_{III}$  wird somit:

$$\delta_{III} = \frac{P h^3}{3 JE/(1-\nu^2)} + \alpha h = \frac{P h^3}{JE/(1-\nu^2)} \times \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\kappa}{2h} \frac{\left[ \frac{\text{sh} \frac{2\alpha}{\kappa} + \sin \frac{2\alpha}{\kappa}}{\text{ch} \frac{2\alpha}{\kappa} + \cos \frac{2\alpha}{\kappa}} \right]}{\right\} = \frac{P h^3}{JE/(1-\nu^2)} \zeta_{III} \dots \dots \dots (11)$$

Der Wert  $\delta_{III}$  hängt also in wesentlichem Mass ab vom Verhältnis  $\frac{\alpha}{\kappa}$ , das heisst vom Verhältnis der Breite des zylindrischen Teils zur charakteristischen Länge  $\kappa$  des Zylinders; diese

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu: Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, S. 461/465.

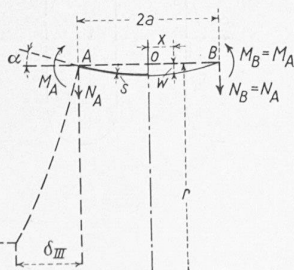


Bild 5. Die Deformation eines Rohrstückes von der Länge  $2a$  als Bestandteil der eckigen Welle bei der Wirkung von Randmomenten  $M_A$  und radial festgehaltenen Rändern

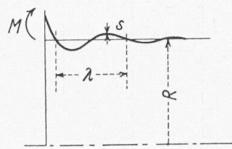


Bild 6. Wellenförmige Deformation eines langen Rohres bei Wirkung von Randkräften bzw. Momenten. Wellenlänge  $\lambda = 2\pi\kappa$ , wobei

$$\kappa = \frac{\sqrt{Rs}}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

ist ihrerseits zur Wellenlänge der deformierten Mantellinie eines zylindrischen Rohres bei Randbelastungen proportional, die sich

bekanntlich durch Funktionen der Form  $e^{-\frac{x}{\kappa}} \frac{x}{\kappa} \cos \frac{x}{\kappa}$  und  $e^{-\frac{x}{\kappa}} \sin \frac{x}{\kappa}$  darstellen lässt, Bild 6. In Bild 7 ist der Klammerausdruck der Gleichung (11) in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\frac{a}{h}$  mit  $\frac{h}{\kappa}$  als Parameter aufgetragen. Man sieht, dass bezüglich Nachgiebigkeit bei festen Werten von  $h, s$  und  $R$  ein günstigster Wert für die Breite  $a$  des zylindrischen Teiles besteht. Bei  $\frac{a}{h} = 1$  macht sich die versteifende Wirkung des zylindrischen Teils bei Werten  $\frac{h}{\kappa} = 1$  und darüber schon stark bemerkbar.

Das grösste auftretende Biegemoment ist hier stets  $M_{\max} = P \cdot h$ . Praktisch ist bei einer Expansion für eine gegebene zulässige Beanspruchung eine grösstmögliche Nachgiebigkeit erwünscht. Die Bestwerte von  $\frac{a}{h}$  aus Bild 7 sind also gleichzeitig auch jene für grösste Nachgiebigkeit bei gegebenem Biegemoment.

Diese aus ebenen Platten und zylindrischen Stücken zusammengesetzten Formen von Expansionsstücken werden zwar praktisch wenig verwendet. Ihre Berechnung ist aber noch verhältnismässig einfach durchzuführen; sie zeigt schon grundsätzlich den behindernden Einfluss der Ringspannungen und die hierfür massgebenden Grössen. Die vorstehenden Ableitungen dienen somit als Uebergang zu den folgenden komplizierteren und weniger übersichtlichen Berechnungen für die aus Kreisringflächen (Teilen eines Torus) und ebenen Platten zusammengesetzten Expansionsstücke, also mit aus Kreisbogen und Geraden bestehendem Meridianschnitt, wobei aber, im Gegensatz zu Abschnitt a, die Ringspannungen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Grundsätzlich liesse sich die Deformation unter Anwendung der Theorie der Kreisringfläche berechnen. Im folgenden wird aber einem vereinfachenden Näherungsverfahren der Vorzug gegeben: Es wird für die Biegunslinie des Kreisbogenteiles ein Ansatz mit trigonometrischen Funktionen gemacht, der den Randbedingungen genügt und noch einen oder mehrere Parameter enthält, die so bestimmt werden, dass die Deformationsarbeit minimal wird.

Für den kreisbogenförmigen Teil der Wellrohre ergibt sich mit den Bezeichnungen nach Bild 8 als Biegedeformationsarbeit eines Ringstreifens von der Breite  $a \, d\varphi$  und vom Umfang  $2\pi r$  der Ausdruck:

$$dA_B = \frac{\pi E s^3}{12(1-\nu^2)} \frac{r}{a} \times \left\{ \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 - 2\nu \left( \frac{\alpha}{r} \right) \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} \sin \varphi + \frac{\alpha^2}{r^2} \vartheta^2 \sin^2 \varphi \right\} d\varphi$$

Darin bezeichnen  $z$  die Verschiebung eines Punktes in Richtung normal zur Rohrxaxe und  $\vartheta$  die Neigungsänderung der Tangente. Bei kleinem Verhältnis  $\frac{\alpha}{r}$  können die beiden letzten Glieder der Klammer, die sich ohnehin auch teilweise gegenseitig aufheben, gegenüber dem ersten Glied vernachlässigt werden, und es bleibt noch:

$$dA_B = \frac{\pi E s^3}{12(1-\nu^2)} \frac{r}{a} \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \dots \dots \dots (12)$$

eine Beziehung, die identisch ist mit dem Ausdruck der Biegedeformationsarbeit eines Längenelementes  $ds$  eines geraden Stabes ( $ds = a \, d\varphi$ ) bei behinderter Querkontraktion.

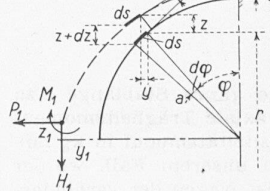


Bild 8. Bezeichnungen für die Deformation des kreisbogenförmigen Teiles der abgerundeten Welle

Bei Lösung von Biegeproblemen wird meist die Deformationsarbeit der Zug- oder Druckkräfte gegenüber jener der Biegung vernachlässigt. In diesem Sinne kann hier auch auf eine Berücksichtigung des Längszuges in Meridianrichtung verzichtet werden. Dagegen wirkt in unserem Falle die Ringspannung im Sinne einer Behinderung der Biegedeformation und muss, da ja gerade ihr Einfluss bestimmt werden soll, miterücksichtigt werden. Die Zugdeformationsarbeit des

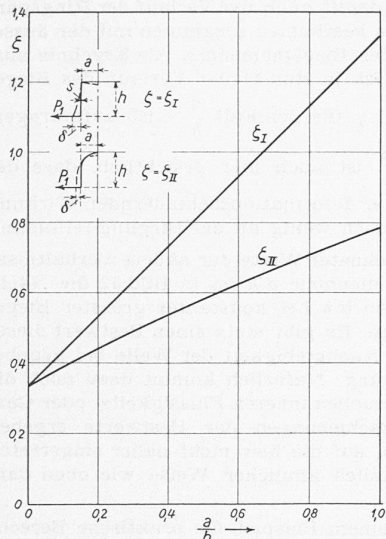


Bild 4. Deformation der ebenen eckigen und abgerundeten Welle bei Wirkung einer Axialkraft  $P_1$  in Funktion des Verhältnisses  $a/h$ .

Axiale Verbreiterung einer Viertelwelle:  

$$\delta = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \xi$$

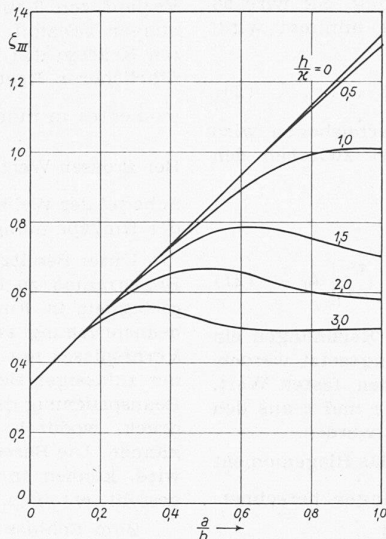


Bild 7. Deformation des eckigen Wellrohres bei Wirkung einer Axialkraft  $P_1$ , berechnet unter Berücksichtigung der Ringspannungen.

Axiale Verbreiterung der Viertelwelle:  

$$\delta = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \xi_{III}$$

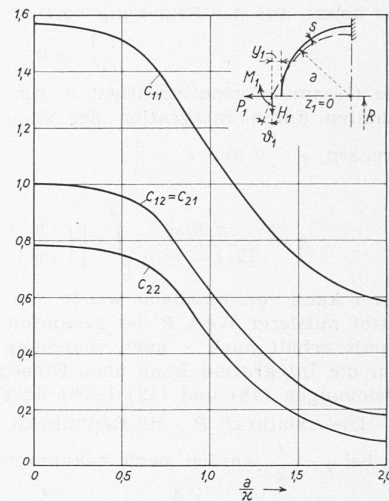


Bild 9. Mit Berücksichtigung der Ringspannungen durch Näherungsberechnung bestimmte Deformation des kreisbogenförmigen Teiles der abgerundeten Welle bei radial festgehaltenem Innenrand unter Mitwirkung von Moment  $M_1$  und Axialkraft  $P_1$ . Diese Deformationen sind:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{M_1 a}{JE/(1-\nu^2)} C_{11} + \frac{P_1 a^2}{JE/(1-\nu^2)} C_{12} \\ y_1 &= \frac{M_1 a^2}{JE/(1-\nu^2)} C_{21} + \frac{P_1 a^3}{JE/(1-\nu^2)} C_{22} \end{aligned} \quad \left| \quad \kappa = \frac{\sqrt{R}s}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right.$$

Ringstreifens vom Durchmesser  $2r$  infolge seiner Ausdehnung auf den Durchmesser  $2(r+z)$  beträgt:

$$dA_Z = \frac{\pi a E s}{r} z^2 d\varphi \quad \dots \quad (13)$$

Die Gesamtdeformationsarbeit wird somit:

$$dA = dA_B + dA_Z = \frac{\pi E s^3}{12(1-\nu^2)} \frac{r}{a} \left\{ \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 + 4 \left( \frac{z}{\kappa} \right)^4 \frac{z^2}{a^2} \right\} d\varphi \quad (14)$$

worin: 
$$\kappa = \frac{\sqrt{rs}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad \dots \quad (15)$$

Hier, wie stets bei den Elastizitätsproblemen rotationssymmetrischer Schalen, erscheint als Einflussgröße der charakteristische, nach Gleichung (15) definierte Wert  $\kappa$ , bzw. nun sein Verhältnis zum Abrundungsradius der Welle. Bei Vernachlässigung der Längsdehnung des Meridians gilt unmittelbar:

$$z = z_1 - a \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \cos \varphi d\varphi$$

sodass alle Größen durch  $\vartheta$  allein ausgedrückt werden können. In axialer Richtung wird die Verschiebung:

$$y = a \int_0^{\varphi} \vartheta \sin \varphi d\varphi \quad \dots \quad (17)$$

Die folgenden Berechnungsergebnisse werden erhalten auf Grund des Ansatzes:

$$\vartheta = c_1 \sin(\varphi) + c_2 \sin(2\varphi) + c_4 \sin(4\varphi)$$

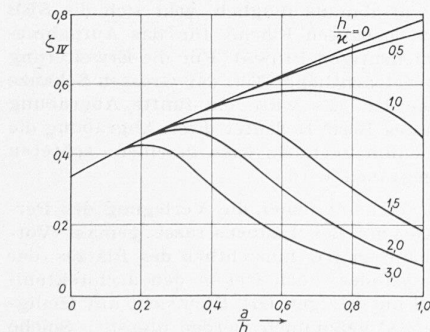


Bild 10. Deformation der durch Kreisbogen abgerundeten Welle bei Wirkung einer Axialkraft  $P_1$ , durch Näherungsberechnung mit Berücksichtigung der Ringspannungen bestimmt. Axiale Verbreiterung der Viertelwelle:

$$\delta = \frac{Ph^3}{JE/(1-\nu^2)} \xi_{IV}$$

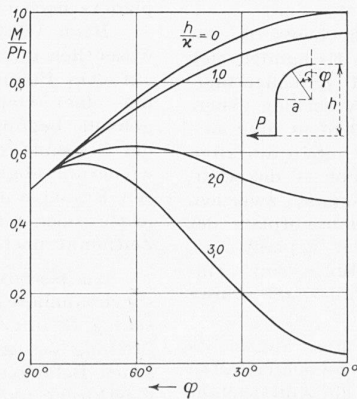


Bild 11. Verlauf des Biegemomentes im runden Teil der Welle berechnet für  $a/h = 0,5$  bei verschiedenen Werten von  $h/\kappa$ .  $h/\kappa = 0$  gibt den Grenzübergang auf die ebene Welle ( $R \rightarrow \infty$ )

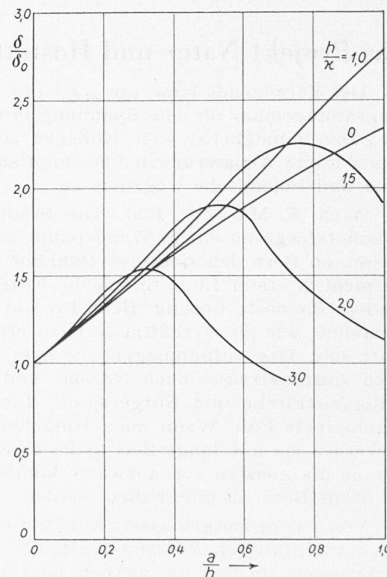


Bild 12. Nachgiebigkeit eines Wellrohres in Funktion von  $a/h$  bei konstanter grösster Biegespannung  
 $\delta$  = Deformation bei  $a > 0$   
 $\delta_0$  = Deformation bei Welle ohne Abrundung ( $a = 0$ )

der der Symmetriebedingung  $\vartheta = 0$  am Scheitel der Welle ( $\varphi = 0$ ) genügt. Werden die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  noch ausgedrückt durch die Endwerte  $\vartheta = \vartheta_1$  und  $y = y_1$  für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich:

$$\vartheta = \vartheta_1 \sin \varphi + \left\{ \left( \frac{3}{2} \frac{y_1}{a} - \frac{3\pi}{8} \vartheta_1 + \frac{2}{5} c_4 \right) \right\} \sin(2\varphi) + c_4 \sin(4\varphi) \quad (18)$$

und

$$z = a \left\{ \frac{z_1}{a} - \frac{\vartheta_1}{2} \cos^2 \varphi - \left[ \frac{3}{2} \frac{y_1}{a} - \frac{3\pi}{8} \vartheta_1 + \frac{2}{5} c_4 \right] \times \left[ \frac{1}{6} \cos(3\varphi) + \frac{1}{2} \cos \varphi \right] - c_4 \left[ \frac{1}{10} \cos(5\varphi) + \frac{1}{6} \cos(3\varphi) \right] \right\} \quad (19)$$

Die Konstante  $c_4$  steht noch frei zur Verfügung. Sie wird so gewählt, dass die gesamte Deformationsarbeit minimal wird, das heisst, aus der Beziehung bestimmt:

$$\frac{\partial A}{\partial c_4} = 0 \quad \dots \quad (20)$$

Die Gesamtdeformationsarbeit  $A$  für einen Viertelsbogen wird erhalten durch Integration der Gleichung (14) zwischen den Grenzen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :

$$A = \frac{\pi E s^3}{12(1-\nu^2)a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \left[ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right)^2 + 4 \left( \frac{a}{z} \right)^4 \frac{z^2}{a^2} \right] d\varphi \quad (21)$$

Für  $r$  kann vereinfachend wie in den früheren Rechnungen ein fester mittlerer Wert  $R$  der gesamten Welle eingesetzt werden. Damit erhält auch  $\kappa$  nach Gleichung (15) einen festen Wert, und die Integration kann nach Einsetzen von  $\vartheta$  und  $z$  aus den Gleichungen (18) und (19) leicht durchgeführt werden.

Die Axialkraft  $P_1$ , die Radialkraft  $H_1$  und das Biegemoment  $M_1$  bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  werden nach bekannten Beziehungen berechnet:

$$P_1 = \frac{\partial A}{\partial y_1}, \quad H_1 = \frac{\partial A}{\partial z_1}, \quad M_1 = \frac{\partial A}{\partial \vartheta_1} \quad \dots \quad (22)$$

Ohne auf die Durchführung der etwas umständlichen Rechnung im einzelnen einzugehen, sei das Ergebnis in Bild 9 wiedergegeben. Es bezieht sich auf die Deformation eines Viertelbogens unter der Wirkung eines Randmomentes  $M_1$  bzw. einer axialen Kraft  $P_1$  bei in radialer Richtung festgehaltenem Rand ( $z_1 = 0$ ), entsprechend dem Fall, wo sich auf der Innenseite des Bogens eine nach innen konvexe Viertelwelle, eventuell mit dazwischen liegendem geradem Stück anschliesst. Die Verminderung der Deformation durch die Wirkung der Ringspannungen macht sich bei Werten von  $\frac{a}{z}$  über 0,5 in stark steigendem Mass bemerkbar.

Die Einbeziehung der Wirkung eines Randmomentes  $M_1$  in die Betrachtung gestattet sofort auch die Berechnung einer Viertelwelle nach Bild 3, die also aus einem Kreisbogen und einem daran anschliessenden radialen geraden Stück besteht. Für das gerade Stück ist der Einfluss der Ringspannungen zu vernachlässigen. Man erhält:  $M_1 = P_1(h - a)$  und  $P_1 = P$ .

Die Nachgiebigkeit ist in Bild 10 in Funktion des Verhältnisses  $\frac{a}{h}$  aufgetragen. Der Verlauf ist ähnlich wie für die eckige Welle nach Bild 7, die Deformationen sind aber geringer. Bei verhältnismässig dünnwandigen Wellen ( $\kappa$  klein) liegt das Maximum der Nachgiebigkeit bei kleineren Bogenradien  $a$  und längerem geradem Stück.

Mit der durch die Minimumbedingung für die Deformationsarbeit nach Gleichung (20) festgelegten Konstanten  $c_4$  ist der

Verlauf von  $\vartheta$  und  $z$  und damit auch der Verlauf der Ringspannungen bekannt, und diese bestimmen zusammen mit den äusseren Kräften den Verlauf des Biegemomentes. Als Ergebnis ausführlicherer Rechnungen ist in Bild 11 der Verlauf des Biegemomentes in Funktion von  $\varphi$  für den Fall  $\frac{a}{h} = 0,5$  aufgetragen.

Bei grossen Werten von  $\frac{a}{z}$  ist auch hier ersichtlich, dass der Scheitel der Welle wegen der deformationsbehindernden Wirkung der Ringspannungen nur noch wenig an der Biegung teilnimmt.

Unter Benützung berechneter Werte für andere Verhältnisse Bogenradius zu halber Wellenhöhe  $a/h$  ist in Bild 12 die Nachgiebigkeit in Funktion von  $a/h$  bei konstanter grösster Biegebeanspruchung aufgetragen. Es gibt stets einen Bestwert dieses Verhältnisses mit grösster Nachgiebigkeit der Welle bei gegebener zulässiger Beanspruchung. Natürlich kommt dazu noch die Beanspruchung durch eventuellen inneren Flüssigkeits- oder Gasdruck, wodurch sich Verschiebungen der Bestwerte ergeben können. Die Berechnungen, auf die hier nicht näher eingetreten wird, können in grundsätzlich ähnlicher Weise wie oben dargestellt, erfolgen.

Zum Schluss sei an einem Beispiel die praktische Berechnungsweise erläutert. Es handle sich um eine Wellrohrexpanansion von drei Wellen mit Innendurchmesser  $d_i = 400$  mm, Aussendurchmesser  $d_a = 600$  mm, mittlerer Durchmesser  $2R = 500$  mm, also  $R = 250$  mm, halbe Wellenhöhe  $h = (d_a - d_i)/4 = 50$  mm, Abrundungsradius der Welle  $a = 25$  mm, Blechstärke  $s = 5$  mm, Material Eisen mit  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Nach Gl. (7) wird  $\kappa = 0,779$   $\sqrt{R} s = 27,6$  mm und  $a/\kappa = 1,81$ ,  $a/h = 0,5$ . Nach Bild 10 ist  $\zeta_{IV} = 0,42$ . Man erhält damit für die Ausdehnung einer Viertelwelle  $\delta_1 P = \zeta_{IV} \cdot 12 (1 - \nu^2) h^3/2\pi R E s^3 = 0,42 \cdot 12 \cdot 0,91 \cdot 5^3/2\pi \cdot 25 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,5^3 = 14 \cdot 10^{-6}$  cm/kg.

Für alle drei Wellen zusammen, also für 12 Viertelwellen ist das Verhältnis der Ausdehnung  $f = 12 \delta$  zur Axialkraft  $P$   $f/P = 12 \delta/P = 168 \cdot 10^{-6}$  cm/kg = 1,68 mm/t. Ohne Berücksichtigung der Ringspannungen würde sich  $\zeta = 0,58$  ergeben, also eine um fast 40% zu grosse Nachgiebigkeit.

Zusammenfassung

Die vorstehenden Rechnungen zeigen, dass bei Wellrohrexpanansionen die Steifigkeit wegen des Einflusses der Ringspannungen höher ist, als beim ebenen Wellblech. Massgebend für diesen Einfluss ist die aus der Theorie der Zylinderschalen

bekannt charakteristische Grösse  $\kappa = \sqrt{R s / \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$ . Mit Hilfe dieser Grösse und den in Kurvenform dargestellten Rechnungsergebnissen ist es möglich, die Deformation des Wellrohres sowohl bei eckiger wie auch bei abgerundeter Wellenform bei Wirkung einer axialen Zug- oder Druckkraft  $P$  zu bestimmen.

Das Projekt Nater und Hostettler für die Verlegung des Bahnhofes in Bern

(Schluss von Seite 125)

Der Vorsitzende kann am zweiten Abend um 21.30 Uhr programmgemäss die mit Spannung erwartete Diskussion eröffnen. Damit möglichst viele Kollegen zum Wort kommen, bittet er um kurze Aeusserungen und empfiehlt hiezu, alles Geschichtliche und Polemische wegzulassen.

Arch. F. Moser, Biel: Die Stadt Bern ist heute in der Bahnhoffrage an einem Wendepunkt angelangt. Es handelt sich darum, ob Bern den richtigen Bahnhof bekommt. Es sollen hierbei nicht in erster Linie finanzielle Fragen den Ausschlag geben, sondern die beste Lösung. Beim Projekt der SBB muss man sich vorstellen, wie die Verhältnisse nach erfolgtem Umbau am alten Platz sind. Das Aufnahmegebäude liegt heute schon an der wichtigen Ausfallstrasse nach Norden und am Engpass zwischen Heiliggeistkirche und Burgerspital: für einen Bahnhofplatz der ungünstigste Fall. Wenn auch Umgehungsstrassen geplant sind, so werden sie auf lange Zeit keine wesentliche Entlastung bringen, da die meisten von auswärts kommenden Fahrzeuge immer die Stadt Bern als Ziel haben werden.

Von einem zeitgemässen Aufnahmegebäude muss angesichts des mannigfaltigen Zubringerverkehrs mit den verschiedensten Verkehrsmitteln verlangt werden, dass nicht nur die Autobesitzer und Taxibenutzer, sondern auch die Insassen von Autobussen und Cars zu einer gedeckten Vorfahrt vor das Aufnahmegebäude gelangen. Parkplätze für Taxi und Personenwagen müssen vorhanden sein; Postfourgons müssen geeignete Zufahrt haben, die Tramhaltestellen sollen in möglichster Nähe sein. Ausserdem sollte für Festanlässe, für grosse Empfänge ein grosser, freier Platz auf Trottoirhöhe ausgespart werden, auf dem rd. 5000 Per-

sonen in gedrängter Aufstellung Platz haben. Hierfür sind aber die bestehenden Grössen-Verhältnisse auf dem alten Platz völlig unzureichend, auch wenn die Zollikofen-Bern-Bahn vom Bahnhofplatz verschwindet, was nach dem Votum des Herrn Stadtplaners noch recht lange auf sich warten lassen wird.

Beim Wettbewerb im Jahre 1929<sup>1)</sup> lagen die Verhältnisse wesentlich günstiger. Eine gute Lösung der Verkehrsverhältnisse auf dem Bahnhofplatz war damals möglich, weil sich die SBB mit einer viel kleineren bebauten Fläche für das Aufnahmegebäude begnügte, als im heutigen Projekt. Für die Erweiterung der Gleisanlagen soll ein beträchtlicher Teil der Grossen Schanze wiederum abgegraben werden. Es wäre die fünfte Abgrabung seit Bestehen des Bahnhofes Bern. Bedeutet diese Abgrabung die letzte, oder muss man damit rechnen, dass in einem späteren Zeitpunkt nochmals abgegraben wird?

Als bessere Lösung erscheint daher die Verlegung des Personenbahnhofes in die Gegend der Laupenstrasse gemäss Vorschlag N. und H. Dort ist man frei hinsichtlich des Platzes, der Stellung des Aufnahmegebäudes, auch frei in den architektonischen Belangen, während am jetzigen Ort Rücksicht auf Heiliggeistkirche und Burgerspital genommen werden müsste. Solche Bahnhofverlegungen sind schon viele gemacht worden, überall mit dem Erfolg, dass man sich nach wenigen Jahren vollständig in die neuen Verhältnisse hineingelegt hat. Die beabsichtigte Verlegung von rd. 500 m ist gering; sie mag für einige Ladeninhaber am alten Platz vielleicht Nachteile haben, für das Ge-

<sup>1)</sup> Siehe Veröffentlichung Wettbewerb Bebauungsplan Bahnhofplatz usw. SBZ, Bd. 93, S. 259<sup>a</sup> (25. Mai 1929).