Band 123 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 1

200 JAHRE EULER'SCHE KNICKFORMEL

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E. T. H., Zürich

1. In einem Anhang «Ueber die elastischen Kurven» zu seinem grundlegenden Werk über Isoperimeterprobleme [1]) hat *Leonhard Euler* vor 200 Jahren erstmals die seinen Namen tragende Knickformel veröffentlicht. Im ungeheuren Lebenswerk Eulers bedeutet die Entdeckung der Knickformel nur eine kleine Episode; für die Entwicklung der Festigkeitslehre und der Baustatik aber ist sie von so grosser Bedeutung, dass sich heute ein kurzer Rückblick auf ihre Entstehung rechtfertigt.

Für Euler ergibt sich die Möglichkeit, die Form der elastischen Kurven mit seiner Methode der Maxima und Minima zu bestimmen durch eine Mitteilung von *Daniel Bernoulli* vom Jahre 1742, wonach bei der Biegung eines ursprünglich geraden Stabes von konstantem Querschnitt die «Potentialkraft» (vis potentialis)

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

ein Minimum sein müsse.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y ist (mit unserer heutigen Schreibweise) die Länge des Kurvenelementes ds

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

und der Krümmungsradius

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Damit wird die «Potentialkraft», die zu einem Minimum werden soll

$$\int \frac{ds}{R^2} = \int \frac{y''^2\,dx}{(1 + y'^2)^{5/2}} = \min \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach der im Hauptwerk entwickelten Methodik wird nun daraus die Differentialgleichung der gesuchten elastischen Kurve bestimmt, die sich in der Form

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ergibt.

Um die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der schon früher von *Jakob Bernoulli* gefundenen Gleichung der elastischen Kurve nachzuweisen (und auch, um die Belastung und die Biegungssteifigkeit des Stabes einzuführen) leitet Euler diese Differentialgleichung nun auch noch direkt ab (Abb. 1): im Punkt x, y, des gebogenen Stabes muss Gleichgewicht zwischen der «Elastizität $E k^2 : R$» (vis elastica) und dem Moment $P(e + x)$ der an einem starren Hebel e wirkenden lotrechten Kraft P bestehen:

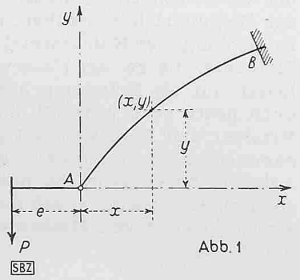

Abb. 1

$$P(e + x) = \frac{E k^2}{R} = -\frac{E k^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$E k^2$ bedeutet die «absolute Elastizität» (elasticitas absoluta) oder, wie wir heute sagen, die Steifigkeit EJ des Stabes. Durch Integration und Auflösung nach dy findet Euler die Gleichung

$$dy = \frac{-P\,dx\,(\tfrac{1}{2}x^2 + ex + f)}{\sqrt{E^2 k^4 - P^2(\tfrac{1}{2}x^2 + ex + f)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die in der Form mit Gleichung (2) übereinstimmt. Aus dem Vergleich der Gleichungen (2) und (4) ergibt sich nun die Grösse der angreifenden Last P zu

$$P = -\frac{2 E k^2 \gamma}{a^2} \quad . \quad . \quad (5)$$

während sich für den Hebelarm e und die Integrationskonstante f die Werte

$$e = \frac{\beta}{2\gamma} \quad \text{und} \quad f = \frac{\alpha}{2\gamma}$$

ergeben.

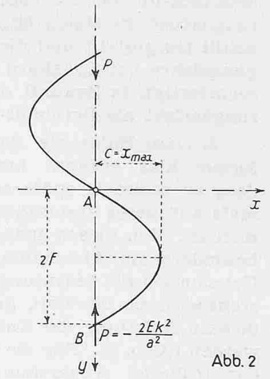

Abb. 2

Für $e = 0$ (Last im Koordinatenursprung) und $\gamma = 1$ und mit der Abkürzung $c^2 = a^2 - \alpha$ findet Euler für die Kurve der Abb. 2 die vereinfachte Gleichung

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nach der Diskussion der sich aus Gleichung (6) ergebenden Eigenschaften der elastischen Kurven geht Euler dazu über, die verschiedenen möglichen Kurvenformen aufzuzählen. Als erste dieser Formen ergibt sich für $a = \infty$ oder $P = 0$ die vom Koordinatenursprung (oder Wendepunkt) A aus sich nach beiden Seiten in Richtung der y-Axe ins Unendliche erstreckende Gerade, für die $x_{\max} = c = 0$ ist; diese Gerade stellt den natürlichen Zustand des elastischen Stabes dar.

Zu dieser ersten Art von elastischen Kurven sollen nun aber auch jene Fälle gerechnet werden, bei denen die grösste Ausbiegung $c = x_{\max}$ und damit auch x gegen a vernachlässigbar klein angenommen werden kann; für diesen Fall geht Gleichung (6) über in

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und ihre Lösung lautet

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung für die (beidseitig ins Unendliche verlängerte) Trochoide, die wir heute Sinuskurve nennen. Für $y = f$ wird $\frac{x}{c} = 1$ und $\arcsin \frac{x}{c} = \frac{\pi}{2}$, woraus

$$f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2f\sqrt{2}}{\pi}$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (5) (mit $\gamma = 1$) ein, so erhalten wir

$$P_{\text{kr.}} = \frac{2 E k^2}{a^2} = \frac{\pi^2 E k^2}{4 f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

d. h. diejenige Kraft, die erforderlich ist, um einen ursprünglich geraden (und beidseitig gelenkig gelagerten) Stab unendlich wenig auszubiegen; sie ist von endlicher Grösse.

Damit ist die Eulersche Knicklast gefunden. Euler selbst weist darauf hin, dass seine Formel dazu dienen könne, die Tragkraft von Säulen zu bestimmen. Er gibt anschliessend auch die Anleitung, die Steifigkeit $E k^2 = EJ$ durch Durchbiegungsmessungen zu ermitteln.

Wohl hatte der Holländer Musschenbroek schon 15 Jahre vorher auf Grund von Versuchen festgestellt, dass bei sonst gleichen Grössen die Tragfähigkeit gedrückter Stäbe umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Länge sei, aber diese Angabe allein löst das Problem nicht. Erst Euler hat uns den vollständigen Zusammenhang zwischen kritischer Belastung P, Stablänge $2f$ und Steifigkeit $EJ = E k^2$ gegeben.

2. An dieser ersten theoretischen Untersuchung eines Stabilitätsproblems ist für uns besonders bemerkenswert, dass sie auf dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit aufge-

[1]) *L. Euler*: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae & Genevae, MDCCXLIV. Additamentum I: De curvis elasticis.

Das Eulerbildnis nach dem Stich von Mechel in der «Lobrede auf Herrn Leonhard Euler» von N. Fuss, Basel 1786.