Band 120 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 4

Contribution à l'étude des plaques obliques

Par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale

Les plaques sollicitées à la flexion et limitées par un cercle, une ellipse ou un rectangle ont été l'objet de nombreuses études théoriques. On rencontre cependant aussi, dans la pratique, des plaques dont le contour est un parallélogramme. Elles sont appelées «obliques» pour les distinguer de la forme rectangulaire.

Le problème de la flexion des plaques obliques n'a tenté, jusqu'ici, que de rares théoriciens [1]). Cela est certainement dû au fait que, si l'on utilise des coordonnées rectangulaires, les conditions aux limites sont moins simples à exprimer pour un parallélogramme que pour un rectangle.

Le but de ce mémoire est double.

Il est tout d'abord destiné à établir les principales équations régissant l'équilibre de la plaque limitée par un parallélogramme, en utilisant un système de *coordonnées cartésiennes obliques*, dont deux des axes sont parallèles aux côtés du parallélogramme et le troisième perpendiculaire à son plan. C'est le système le mieux adapté à la forme de plaque considérée. Il permet d'exprimer les conditions au contour avec la même commodité que les coordonnées rectangulaires le permettent dans le cas du rectangle, ce qui est un grand avantage pour les recherches théoriques.

En outre ce mémoire présente, comme application, une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie.

1. Rappel des principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes rectangulaires

Considérons une plaque d'épaisseur h, sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces et posée ou encastrée le long du pourtour [2]) (fig. 1). Choisissons un système cartésien rectangulaire fixe $Oxyz$, les axes x, y étant situés dans le plan équidistant des faces, avant la déformation. Soit $\zeta_0 = \overline{PP'}$ le déplacement, parallèle à z, d'un point $P(x, y)$ de ce plan. Le lieu des points $P'(x, y, \zeta_0)$ est la «surface élastique».

On démontre, dans la théorie des plaques, que les tensions $\sigma_x, \ldots \tau_{xy} \ldots$ en un point (xyz) sont liées aux déformations par les relations suivantes [3]):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2}\, z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2}\, z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu}\, z \,\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y}, \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

où E désigne le module d'élasticité et $\nu = \frac{1}{m}$ le coefficient de Poisson.

Les formules (1) permettent de calculer les tensions dès que l'on connaît $\zeta_0(x, y)$. Cette fonction doit 1°) satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre:

$$\Delta\Delta\zeta_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3}\, p, \quad (2)$$

$p(x, y)$ étant la charge par unité de surface; 2°) remplir les conditions au contour.

Le travail intérieur de déformation est donné par l'intégrale double suivante, étendue à la surface F de la plaque:

$$A = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{(F)} \left\{\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dF. \quad (3)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit, pour une déformation définie par une variation $\delta\zeta_0$ de ζ_0 qui satisfait aux conditions imposées au contour:

$$\iint_{(F)} p\, \delta\zeta_0\, dF - \delta A = 0. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

2. Principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes obliques

Pour établir ces équations, nous utiliserons les relations (1) à (4) et ferons un changement de coordonnées.

Soit x, y, z le système précédemment défini. Nous introduisons un second système u, v, z tel que les axes u, z coincident respectivement avec x, z, l'axe v étant situé dans le plan x, y et faisant l'angle α avec u (fig. 2).

Les formules de transformation sont (fig. 3):

$$x = u + v\cos\alpha, \qquad y = v \sin\alpha, \qquad z = z; \quad \ldots \quad (5)$$

d'où:

$$u = x - \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad v = \frac{y}{\sin\alpha}; \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Remarquons que ζ_0 peut être considéré comme fonction composée des variables indépendantes x, y:

$$\zeta_0 = \zeta_0\,[u(x, y),\, v(x, y)],$$

d'où les formules de transformation suivantes:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\, 1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\, 0,$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}. \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) = \left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial}{\partial u} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}. \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u\, \partial v}. \quad \ldots \quad (11)$$

[1]) Citons: *Brigatti, C. V.:* Applicazione del metodo di H. Marcus al calcolo della piastra parallelogrammica. Ric. Ingegn. 6, 1938.
Anzelius, A.: Ueber die elastische Deformation parallelogrammförmiger Platten. Bauingenieur 20, 1939.
Vogt, H.: Die Berechnung schiefwinkliger Platten und plattenartiger Brückensysteme. Dissertation der Technischen Hochschule Hannover, 1940.

[2]) Une plaque est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque, est relativement petite par rapport aux autres dimensions. Les bases de ce solide constituent les «faces» de la plaque. Comme l'épaisseur est petite, on assimile souvent les faces latérales à une ligne qui est le «pourtour» ou «contour» de la plaque.

[3]) Voir par exemple: *A.* et *L. Föppl,* Drang und Zwang. Oldenbourg, Munich et Berlin 1941, p. 126 et suiv.

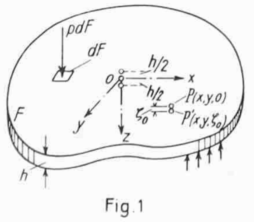

Fig. 1

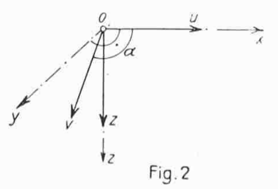

Fig. 2

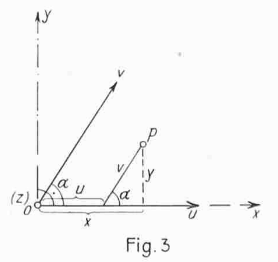

Fig. 3

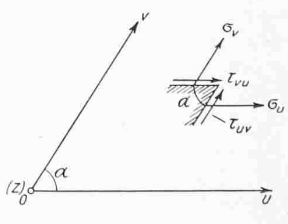

Fig. 4

SBZ