# Allgemeine Berechnung von rechteckigen Eisenbeton-Querschnitten auf Biegung mit Axialkraft


Autor(en): **Frauenfelder, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **119/120 (1942)**

Heft 18

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-52353

Band 119 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 18


# Allgemeine Berechnung von rechteckigen Eisenbeton-Querschnitten auf Biegung mit Axialkraft

Von ERNST FRAUENFELDER, Dipl. Ing. E. T. H., Münchenstein-Basel

In der Schweizerischen Bauzeitung, Bd. 79, S. 263* und 307* (27. Mai und 24. Juni 1922) ist von Ing. P. Pasternak ein Verfahren «zur Berechnung von Eisenbeton-Querschnitten auf einheitlicher tabellarischer Grundlage» veröffentlicht worden, das meines Erachtens in der Praxis zu wenig Beachtung und Eingang gefunden hat. Es beruht auf zwei Nomogrammen, bzw. einer Koeffizienten-Tabelle, die zur Dimensionierung und Spannungsberechnung von beidseitig armierten, bzw. einseitig zugbewehrten Rechteckquerschnitten dienen und sowohl für reine Biegung, als auch für Biegung mit Axialdruck und -Zug gelten.

Abgesehen von den interessanten mathematischen Ableitungen zur Berechnung der erwähnten Nomogramme befasste ich mich mit der Vervollständigung jener Dimensionierungs-Tabelle für die einseitig zugbewehrten Rechteckquerschnitte, die ich seither wegen ihres einfachen Aufbaues, ihres grossen Geltungsbereiches und nicht zuletzt wegen ihrer vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten stets mit Vorteil gebraucht hatte.

Durch die Einführung der neuen Eidg. Vorschriften[1]) vom 14. Mai 1935 sind die von Ing. P. Pasternak aufgestellten Nomogramme und die Koeffizienten-Tabelle für $n = 20$ ungültig geworden, da bekanntlich der Verhältniswert für $n = E_e : E_b$ mit 10 in den Spannungsberechnungen zu berücksichtigen ist (Artikel 97). Angeregt durch die Vorteile dieses Dimensionierungs-Verfahrens, sowie durch die übersichtliche Ableitung der allgemeinen Bemessungsformeln, wie sie Prof. E. Mörsch in seinem Werk «Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung»[2]) gezeigt hat, bin ich dazu gekommen, die ursprünglich nur für einseitig zugbewehrte Eisenbeton-Querschnitte bestimmte Tabelle auf beidseitig armierte Querschnitte für $n = 10$ und $n = 15$ umzurechnen und zu erweitern.

Die nachstehenden Ableitungen folgen dem Gedankengang von Prof. Mörsch, sind aber mit den von Ing. Pasternak eingeführten Koeffizienten entwickelt worden, um den Zusammenhang mit der eingangs erwähnten Veröffentlichung zu wahren. Als neue Koeffizienten erscheinen der Wert $\alpha$, der das Verhältnis zwischen dem Abstand $h'$ der Eiseneinlagen vom Betonrand zur Nutzhöhe $h$ angibt, sowie der Koeffizient $K_3$, der im Zusammenhang mit den übrigen gegebenen Grössen (Querschnitt-Abmessungen und zulässige Spannungen) ohne weiteres die Berechnung der erforderlichen Druckarmierung $F'_e$ gestattet (siehe Gl. 11).

Es sei noch betont, dass die hier entwickelten Bemessungs-Formeln nur für diejenigen Fälle gelten, wo die Resultierende der Normalkräfte ausserhalb des Kerns des ideellen Querschnittes angreift, im allgemeinen für

$$\min c = \frac{M}{N} \geq \frac{d}{3}$$

### 1. Allgemeine Bezeichnungen und Ableitung der Formel für die Querschnitt-Bemessung

Ersatz des auf den Mittelpunkt $O$ des Betonquerschnittes (Stabaxe) bezogenen Biegungsmomentes $M$ und der daselbst angreifenden Normalkraft $N$ (Abb. 1) durch die im Abstand $c = \frac{M}{N}$ vom Mittelpunkt exzentrisch wirkende Kraft $N$ (Abb. 2). Im folgenden gilt, wenn vor der Kraft $N$ zwei Vorzeichen stehen, das obere für $N$ = Druckkraft, das untere für $N$ = Zugkraft. Bei gegebenen zulässigen Spannungen $\sigma_b$ und $\sigma_e$ ist das Spannungsbild nach Abb. 1 bekannt. Der Abstand der Nullinie vom gedrückten Rand berechnet sich wie bei einfacher Biegung zu

$$x = \frac{n\,\sigma_b}{n\,\sigma_b + \sigma_e}\,h = \xi\,h \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

worin

$$\xi = \frac{n}{n+\gamma} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$h - \frac{x}{3} = \varrho\,h = \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) h \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Spannung in den gedrückten Eisen

$$\sigma'_e = n\,\sigma_b\,\frac{x-h'}{x} = \sigma_e\,\frac{x-h'}{h-x} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Spannung in den gezogenen Eisen

$$\sigma_e = n\,\sigma_b\,\frac{h-x}{x} = \gamma\,\sigma_b \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Resultierende der Betonpressungen $D_b = \frac{b\,x}{2}\,\sigma_b$

Kraft in den Druckeisen $D_e = F'_e\,\sigma'_e$

Kraft in den Zugeisen $Z_e = F_e\,\sigma_e$

Wir führen nun ein neues Moment $M_e$ ein und zwar bedeutet dies allgemein das Moment der in Abb. 2 exzentrisch wirkenden Druckkraft (+), bzw. Zugkraft (—) auf die gezogene Eiseneinlage $F_e$:

$$M_e = N\,(c \pm e) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Mit $M_1$ bezeichnen wir das Biegungsmoment, das der einfach bewehrte Rechteckquerschnitt $b\,d$ ohne Axialkraft $N$ zur Erzeugung der Spannungen $\sigma_b$ und $\sigma_e$ aufnehmen könnte:

$$M_1 = \sigma_b\,\frac{b\,x}{2}\left(h - \frac{x}{3}\right) = K_1\,b\,h^2\,\sigma_b = K_2\,b\,h^2\,\sigma_e \quad \ldots \quad (7)$$

worin

$$K_1 = \frac{1}{2}\,\varrho\,\xi = \frac{1}{6}\,\frac{n\,(2n+3\gamma)}{(n+\gamma)^2} \quad \text{bzw.} \quad K_2 = \frac{K_1}{\gamma} \quad \ldots \quad (8)$$

Aus der Gleichheit zwischen den innern und äussern Kräften lassen sich in Bezug auf Abb. 2 folgende Beziehungen aufstellen:

a) $M_e = N\,(c \pm e) = F'_e\,\sigma'_e\,(h - h') + \sigma_b\,\frac{b\,x}{2}\left(h - \frac{x}{3}\right)$

b) $Z_e = D_b + D_e \mp N$

Aus der Momentengleichung a) folgt mit Hilfe von (7)

$$F'_e = \frac{M_e - M_1}{\sigma'_e\,(h - h')}$$

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$b' = \frac{M_e}{K_1\,\sigma_b\,h^2} = \frac{N\,(c \pm e)}{K_2\,\sigma_e\,h^2} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{h'}{h} = \frac{d - 2e}{d + 2e} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$e = \frac{d}{2}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

und mit Hilfe der Gleichungen (4) und (2) ergibt sich

$$F'_e = \frac{K_1\,\sigma_b\,h^2\,(b' - b)\,(h - x)}{\sigma_e\,(x - h')\,(h - h')} = \frac{K_1}{\gamma}\,\frac{h-x}{x-h'}\,\frac{b'-b}{h-h'}\,h^2 = \frac{K_1}{\gamma}\,\frac{1-\xi}{\xi-\alpha}\,\frac{b'-b}{1-\alpha}\,h$$

woraus der *Querschnitt der Druckeiseneinlagen*

$$F'_e = K_3\,\frac{b'-b}{1-\alpha}\,h \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$K_3 = \frac{K_1}{\gamma}\,\frac{1-\xi}{\xi-\alpha} = \frac{K_1}{n - \alpha\,(n+\gamma)} \quad (12)$$

Aus der Kräftegleichung b) folgt:

$$F_e = \frac{D_b + D_e \mp N}{\sigma_e} = \frac{b\,x}{2}\,\frac{\sigma_b}{\sigma_e} + F'_e\,\frac{\sigma'_e}{\sigma_e} \mp \frac{N}{\sigma_e}$$

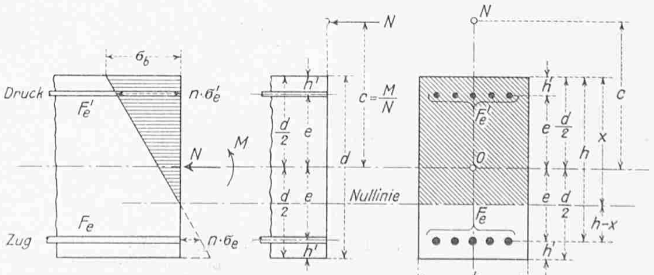


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3

---

[1]) Siehe SBZ, Bd. 106, S. 59 (10. August 1935) und Bd. 107, S. 46 (1. Februar 1936).

[2]) 6. Aufl., I. Band, 1. Hälfte, S. 417 (Konrad Wittwer, Stuttgart 1923).

Ferner lässt sich aus (4) und (5) die Beziehung ableiten

$$\frac{\sigma'_e}{\sigma_e} = \frac{x - h'}{h - x} = \frac{\xi - \alpha}{1 - \xi} = \frac{K_1}{\gamma K_3} = \frac{K_2}{K_3}$$

sodass
$$F_e = \frac{b h \xi}{2 \gamma} + F'_e \frac{K_2}{K_3} \mp \frac{N}{\sigma_e}$$

woraus der *Querschnitt der Zugeiseneinlagen*

$$F_e = \mu \frac{b h}{100} + K_2 \frac{b' - b}{1 - \alpha} h \mp \frac{N}{\sigma_e} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

$$\mu = 50 \frac{\xi}{\gamma} = \frac{50 n}{\gamma (n + \gamma)} = \frac{100 K_2}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

In Gleichung (13) bedeutet das *erste Glied* die Eiseneinlage im einfach bewehrten und nur auf Biegung allein beanspruchten Rechteckquerschnitt, dessen Armierung nach den sonst üblichen Bezeichnungen

$$h = r \sqrt{\frac{M}{b}} \quad \text{und} \quad F_e = t \sqrt{M b}$$

sich berechnet zu $F_{e_1} = t \sqrt{M_1 b} = \frac{t}{r} b h$

oder nach den Bezeichnungen von Prof. Dr. M. Ritter in seinen «Tabellen zur Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen» [3])

$$F_{e_1} = \frac{c_4}{c_3} b h = \mu b h \quad (\mu \text{ in } {}^0/_0)$$

Das *zweite Glied* stellt die Zugarmierung dar, die erforderlich ist, um dem Moment der Druckarmierung inbezug auf die Nullinie das Gleichgewicht zu halten, denn setzt man zur Abkürzung

$$F_{e_2} = F'_e \frac{K_2}{K_3}$$

so ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Gl. (12)

$$F_{e_2} (1 - \xi) = F'_e (\xi - \alpha) \quad \text{oder} \quad F_{e_2} (h - x) = F'_e (x - h')$$

Wie leicht einzusehen ist, bedeutet das *dritte Glied* den Einfluss der in den Zugeisen direkt wirkenden Normalkraft (— für Druckkraft, + für Zugkraft).

*Die Dimensionierungstabellen*[4]) für $n = 10$ und $n = 15$ gehen vom Verhältniswert $\gamma = \sigma_e : \sigma_b$ der zulässigen Eisen- und Beton-Spannungen und nicht von bestimmten Spannungswerten für $\sigma_e$ und $\sigma_b$ aus, wodurch ihnen eine vielseitigere und ausgedehntere Anwendungsmöglichkeit gegeben wird, was bei den in ziemlich weiten Grenzen schwankenden Spannungswerten für Eisen und Beton nach den schweizerischen Vorschriften von 1935 und den deutschen Bestimmungen von 1932, sowie den seither durch die Kriegswirtschaft bedingten Aenderungen als Vorteil zu betrachten ist. Grundsätzlich haben die Tabellen gegenüber 1922 ihren Aufbau beibehalten: sie enthalten neben der Eingangs-Kolonne für $\gamma = \sigma_e / \sigma_b$ die Werte $\xi$, $\varrho$, $K_1$, $K_2$ und $\mu$. Neu hinzugekommen sind die Werte $K_3$, die bei der Dimensionierung der Druckarmierung gebraucht werden, und zwar für sechs verschiedene Verhältnisse $\alpha = h'/h$, je nachdem die Druckeisen $F'_e$ im Vergleich zur Nutzhöhe $h$ näher oder weniger nahe am gedrückten Betonrand liegen. Die Tabellen I und II könnten beliebig unterteilt, bzw. erweitert werden. Die Praxis hat jedoch gezeigt, dass dies im allgemeinen wegen der Zuschläge, die bei der Dimensionierung von Eisenbeton-Querschnitten gemacht werden, nicht notwendig ist und bei Zwischenwerten eine geradlinige Interpolation genügt. Für allenfalls vorkommende Fälle, die eine Extrapolation der Tabellenwerte erfordern, können diese mit Hilfe der in folgender Zusammenstellung angegebenen Formeln nachgeprüft werden.

*Berechnung der Tabellenwerte:*

$$\alpha = \frac{h'}{h}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{50 \xi}{\mu}$$

$$\xi = \frac{n}{n + \gamma} = \frac{n \sigma_b}{n \sigma_b + \sigma_e}$$

$$\varrho = 1 - \frac{\xi}{3} = \frac{2n + 3\gamma}{3 (n + \gamma)}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \varrho \xi = \frac{1}{6} \frac{n (2n + 3\gamma)}{(n + \gamma)^2}$$

$$K_2 = \frac{K_1}{\gamma} = \frac{\mu \varrho}{100}$$

$$K_3 = \frac{K_1}{n - \alpha (n + \gamma)}$$

$$\mu = 50 \frac{\xi}{\gamma} = \frac{50 n}{\gamma (n + \gamma)}$$

[3]) Zürich 1935, siehe SBZ, Bd. 106, S. 70 (10. August 1935).

[4]) Abzüge der Tabelle I oder II im Normalformat, sowie ein durchgerechnetes Beispiel zu Abschnitt 1 für n = 10 können zum Preise von 2 Fr. pro Stück plus Porto vom Verfasser (Schmidholzstrasse 57) bezogen werden.

Tabelle I. Koeffizienten zur Berechnung von rechteckigen, beidseitig armierten Eisenbeton-Querschnitten für Biegung mit Axialkraft; n = 10

| $\gamma$ | $\xi$ | $\varrho$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ wenn $\alpha = h'/h =$ | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | |
| 10 | 0,5000 | 0,8333 | 0,2083 | 0,02083 | 0,02264 | 0,02367 | 0,02480 | 0,02604 | 0,02741 | 0,02894 | 2,500 |
| 11 | 4762 | 8413 | 2003 | 1821 | 2187 | 2292 | 2407 | 2535 | 2678 | 2837 | 2,165 |
| 12 | 4545 | 8485 | 1928 | 1607 | 2114 | 2222 | 2340 | 2471 | 2620 | 2787 | 1,894 |
| 13 | 4348 | 8551 | 1859 | 1430 | 2047 | 2156 | 2278 | 2414 | 2567 | 2742 | 1,672 |
| 14 | 4167 | 8611 | 1794 | 1281 | 1984 | 2096 | 2220 | 2360 | 2520 | 2702 | 1,488 |
| 15 | 0,4000 | 0,8667 | 0,1733 | 0,01156 | 0,01926 | 0,02039 | 0,02167 | 0,02311 | 0,02476 | 0,02667 | 1,333 |
| 16 | 3846 | 8718 | 1677 | 1048 | 1871 | 1986 | 2117 | 2266 | 2437 | 2636 | 1,202 |
| 17 | 3704 | 8765 | 1623 | 0,009548 | 1820 | 1937 | 2070 | 2224 | 2401 | 2610 | $1{,}089_3$ |
| 18 | 3571 | 8810 | 1573 | 8740 | 1772 | 1891 | 2027 | 2185 | 2369 | 2587 | 0,9921 |
| 19 | 3448 | 8851 | 1526 | 8031 | 1726 | 1847 | 1987 | 2149 | 2340 | 2569 | 0,9074 |
| 20 | 0,3333 | 0,8889 | 0,1481 | 0,007407 | 0,01684 | 0,01807 | 0,01949 | 0,02116 | 0,02315 | 0,02554 | 0,8333 |
| 21 | 3226 | 8925 | 1439 | 6855 | 1643 | 1768 | 1914 | 2086 | 2292 | 2543 | 7680 |
| 22 | 3125 | 8958 | 1400 | 6362 | 1605 | 1732 | 1881 | 2058 | 2272 | 2536 | 7102 |
| 23 | 3030 | 8990 | 1362 | 5922 | 1569 | 1698 | 1851 | 2033 | 2255 | 2532 | 6588 |
| 24 | 2941 | 9020 | 1326 | 5527 | 1535 | 1666 | 1822 | 2010 | 2241 | 2531 | 6127 |
| 25 | 0,2857 | 0,9048 | 0,1293 | 0,005170 | 0,01503 | 0,01636 | 0,01795 | 0,01988 | 0,02228 | 0,02534 | 0,5714 |
| 26 | 2778 | 9074 | 1260 | 4847 | 1472 | 1608 | 1770 | 1969 | 2219 | 2541 | 5342 |
| 27 | 2703 | 9099 | 1230 | 4554 | 1443 | 1580 | 1747 | 1952 | 2212 | 2551 | 5005 |
| 28 | 2632 | 9123 | 1200 | 4287 | 1416 | 1555 | 1725 | 1936 | 2207 | 2565 | 4699 |
| 29 | 2564 | 9145 | 1172 | 4043 | 1389 | 1531 | 1704 | 1922 | 2204 | 2582 | 4421 |
| 30 | 0,2500 | 0,9167 | 0,1146 | 0,003819 | 0,01364 | 0,01508 | 0,01685 | 0,01910 | 0,02203 | 0,02604 | 0,4167 |
| 31 | 2439 | 9187 | 1120 | 3614 | 1340 | 1486 | 1667 | 1899 | 2205 | 2630 | 3934 |
| 32 | 2381 | 9206 | 1096 | 3425 | 1317 | 1465 | 1651 | 1890 | 2210 | 2660 | 3720 |
| 33 | 2326 | 9225 | 1073 | 3250 | 1296 | 1446 | 1635 | 1882 | 2216 | 2695 | 3524 |
| 34 | 2273 | 9242 | 1050 | 3089 | 1275 | 1427 | 1621 | 1876 | 2225 | 2735 | 3342 |
| 35 | 0,2222 | 0,9259 | 0,1029 | 0,002939 | 0,01255 | 0,01409 | 0,01608 | 0,01871 | 0,02237 | 0,02781 | 0,3175 |
| 36 | 2174 | 9275 | $1008_2$ | 2801 | 1236 | 1393 | 1595 | 1867 | 2250 | 2832 | 3019 |
| 37 | 2128 | 9291 | 0,09884 | 2671 | 1217 | 1377 | 1584 | 1865 | 2267 | 2890 | 2875 |
| 38 | 2083 | 9306 | 9693 | 2551 | 1200 | 1361 | 1574 | 1864 | 2286 | 2955 | 2741 |
| 39 | 2041 | 9320 | 9510 | 2438 | 1183 | 1347 | 1564 | 1865 | 2308 | 3029 | 2616 |
| 40 | 0,2000 | 0,9333 | 0,09333 | 0,002333 | 0,01167 | 0,01333 | 0,01556 | 0,01867 | 0,02333 | 0,03111 | 0,2500 |
| 41 | 1961 | 9346 | 9163 | 2235 | 1151 | 1320 | 1548 | 1870 | 2362 | 3204 | 2391 |
| 42 | 1923 | 9359 | 8999 | 2143 | 1136 | 1308 | 1541 | 1875 | 2393 | 3308 | 2289 |
| 43 | 1887 | 9371 | 8841 | 2056 | 1122 | 1296 | 1535 | 1881 | 2429 | 3427 | 2194 |
| 44 | 1852 | 9383 | 8688 | 1974 | 1108 | 1285 | 1530 | 1889 | 2468 | 3561 | 2104 |
| 45 | 0,1818 | 0,9394 | 0,08540 | 0,001898 | 0,01095 | 0,01275 | 0,01525 | 0,01898 | 0,02512 | 0,03713 | 0,2020 |
| 46 | 1786 | 9405 | 8397 | 1825 | 1082 | 1265 | 1521 | 1908 | 2560 | 3888 | 1941 |
| 47 | 1754 | 9415 | 8259 | 1757 | 1070 | 1255 | 1518 | 1921 | 2614 | 4089 | 1866 |
| 48 | 1724 | 9425 | 8125 | 1693 | 1058 | 1246 | 1516 | 1935 | 2673 | 4322 | 1796 |
| 49 | 1695 | 9435 | 7996 | 1632 | 1047 | 1238 | 1514 | 1950 | 2738 | 4595 | 1730 |
| 50 | 0,1667 | 0,9444 | 0,07870 | 0,001574 | 0,01036 | 0,01230 | 0,01514 | 0,01968 | 0,02811 | 0,04919 | 0,1667 |

Bei der Verwendung der Koeffizienten-Tabellen I und II ist darauf zu achten, dass die Dimensionen einheitlich in *cm* und kg (bzw. $cm^2$, $kg/cm^2$ und cmkg) in die Formeln einzuführen sind.

In den folgenden Abschnitten sind die Dimensionierungsformeln für einige Spezialfälle, die jedoch in der Praxis häufig vorkommen, zusammengestellt. Sie sind aus den allgemeinen Formeln des ersten Abschnittes abgeleitet und bedürfen weiter keiner besonderen Erläuterungen.

**2. Dimensionierungsformeln für Biegung mit Axialdruck (und -zug) und einseitiger Bewehrung**

a) Gegeben: $M_e = N (c \pm e)$, $N$, $b$, $\sigma_e$ und $\sigma_b$

Gesucht: $h$, $F_e$ (event. $x$)

Lösung: Mit $\gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$ folgen aus der Tabelle $K_1$ (oder $K_2$), $\mu$ und $\xi$

$$h = \sqrt{\frac{M_e}{K_1 b \sigma_b}} = \sqrt{\frac{M_e}{K_2 b \sigma_e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$F_e = \mu \frac{b h}{100} \pm \frac{N}{\sigma_e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$x = \xi h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Anmerkung: Ist $h$ gegeben und $b$ gesucht, so gelten (1), (16) und

$$b = \frac{M_e}{K_1 \sigma_b h^2} = \frac{M_e}{K_2 \sigma_e h^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

b) Gegeben: $M_e = N (c \pm e)$, $N$, $b$, $h$, $\sigma_e$

Gesucht: $\sigma_b$, $F_e$ (event. $x$)

Lösung: $K_2 = \frac{M_e}{\sigma_e b h^2}$ ; aus der Tabelle folgen $\gamma$, $\mu$ und $\xi$

$$F_e = \mu \frac{b h}{100} \mp \frac{N}{\sigma_e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{\gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad x = \xi h \quad . \; . \; . \; . \quad (5) \text{ und } (1)$$

Auch hier gilt wie im Abschnitt 1 das obere Vorzeichen, wenn $N$ eine Druckkraft, bzw. das untere Vorzeichen, wenn $N$ eine Zugkraft ist.

Tabelle II. Koeffizienten zur Berechnung von rechteckigen, beidseitig armierten Eisenbeton-Querschnitten für Biegung mit Axialkraft, n = 15

| $\gamma$ | $\xi$ | $\varrho$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ wenn $\alpha = h'/h =$ | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | |
| 10 | 0,6000 | 0,8000 | 0,2400 | 0,02400 | 0,01714 | 0,01778 | 0,01846 | 0,01920 | 0,02000 | 0,02087 | 3,000 |
| 11 | 5769 | 8077 | 2330 | 2118 | 1669 | 1734 | 1803 | 1879 | 1961 | 2051 | 2,622 |
| 12 | 5556 | 8148 | 2263 | 1886 | 1626 | 1692 | 1763 | 1840 | 1925 | 2017 | 2,315 |
| 13 | 5357 | 8214 | 2200 | 1693 | 1585 | 1652 | 1724 | 1803 | 1890 | 1986 | 2,060 |
| 14 | 5172 | 8276 | 2140 | 1529 | 1546 | 1614 | 1688 | 1769 | 1858 | 1956 | 1,847 |
| 15 | 0,5000 | 0,8333 | 0,2083 | 0,01389 | 0,01510 | 0,01578 | 0,01653 | 0,01736 | 0,01827 | 0,01929 | 1,667 |
| 16 | 4839 | 8387 | 2029 | 1268 | 1475 | 1544 | 1621 | 1705 | 1799 | 1904 | 1,512 |
| 17 | 4688 | 8438 | 1978 | 1163 | 1441 | 1512 | 1590 | 1676 | 1772 | 1880 | 1,379 |
| 18 | 4545 | 8485 | 1928 | $1071_3$ | 1410 | 1481 | 1560 | 1648 | 1747 | 1858 | 1,263 |
| 19 | 4412 | 8529 | 1881 | 0,009903 | 1379 | 1452 | 1532 | 1622 | 1723 | 1837 | 1,161 |
| 20 | 0,4286 | 0,8571 | 0,1837 | 0,009184 | 0,01351 | 0,01424 | 0,01506 | 0,01597 | 0,01701 | 0,01819 | $1,071_4$ |
| 21 | 4167 | 8611 | 1794 | 8543 | 1323 | 1397 | 1480 | 1574 | 1680 | 1801 | 0,9921 |
| 22 | 4054 | 8649 | 1753 | 7969 | 1297 | 1372 | 1456 | 1551 | 1660 | 1785 | 9214 |
| 23 | 3947 | 8684 | 1714 | 7452 | 1272 | 1347 | 1433 | 1530 | 1642 | 1771 | 8581 |
| 24 | 3846 | 8718 | 1677 | 6986 | 1247 | 1324 | 1411 | 1510 | 1625 | 1757 | 8013 |
| 25 | 0,3750 | 0,8750 | 0,1641 | 0,006562 | 0,01224 | 0,01302 | 0,01390 | 0,01491 | 0,01608 | 0,01745 | 0,7500 |
| 26 | 3659 | 8780 | 1606 | 6178 | 1202 | 1281 | 1370 | 1473 | 1593 | 1735 | 7036 |
| 27 | 3571 | 8810 | 1573 | 5826 | 1181 | 1261 | 1351 | 1457 | 1579 | 1725 | 6614 |
| 28 | 3488 | 8837 | 1541 | 5505 | 1161 | 1241 | 1333 | 1441 | 1566 | 1716 | 6229 |
| 29 | 3409 | 8864 | 1511 | 5210 | 1141 | 1222 | 1316 | 1425 | 1554 | 1709 | 5878 |
| 30 | 0,3333 | 0,8889 | 0,1481 | 0,004938 | 0,01122 | 0,01204 | 0,01300 | 0,01411 | 0,01543 | 0,01703 | 0,5556 |
| 31 | 3261 | 8913 | 1453 | 4688 | 1104 | 1187 | 1284 | 1397 | 1533 | 1698 | 5259 |
| 32 | 3191 | 8936 | 1426 | 4456 | 1087 | 1171 | 1269 | 1384 | 1523 | 1694 | 4987 |
| 33 | 3125 | 8958 | 1400 | 4242 | 1070 | 1155 | 1254 | 1372 | 1515 | 1691 | 4735 |
| 34 | 3061 | 8980 | 1374 | 4042 | 1054 | 1140 | 1240 | 1361 | 1507 | 1688 | 4502 |
| 35 | 0,3000 | 0,9000 | 0,1350 | 0,003857 | 0,01038 | 0,01125 | 0,01227 | 0,01350 | 0,01500 | 0,01688 | 0,4286 |
| 36 | 2941 | 9020 | 1326 | 3684 | 1023 | 1111 | 1215 | 1340 | 1494 | 1688 | 4085 |
| 37 | 2885 | 9038 | 1304 | 3523 | 1009 | 1097 | 1203 | 1330 | 1488 | 1689 | 3898 |
| 38 | 2830 | 9057 | 1282 | 3373 | 0,00995 | 1084 | 1191 | 1321 | 1483 | 1691 | 3724 |
| 39 | 2778 | 9074 | 1260 | 3232 | 982 | 1072 | 1180 | 1313 | 1479 | 1694 | 3561 |
| 40 | 0,2727 | 0,9091 | 0,1240 | 0,003099 | 0,00968 | 0,01060 | 0,01169 | 0,01305 | 0,01476 | 0,01698 | 0,3409 |
| 41 | 2679 | 9107 | 1220 | 2975 | 956 | 1048 | 1159 | 1298 | 1473 | 1704 | 3267 |
| 42 | 2632 | 9123 | 1200 | 2858 | 944 | 1037 | 1150 | 1291 | 1471 | 1710 | 3133 |
| 43 | 2586 | 9138 | 1182 | 2748 | 932 | 1026 | 1141 | 1284 | 1470 | 1717 | 3007 |
| 44 | 2542 | 9153 | 1163 | 2644 | 920 | 1015 | 1132 | 1279 | 1469 | 1726 | 2889 |
| 45 | 0,2500 | 0,9167 | 0,1146 | 0,002546 | 0,00909 | 0,01005 | 0,01123 | 0,01273 | 0,01469 | 0,01736 | 0,2778 |
| 46 | 2459 | 9180 | 1129 | 2454 | 899 | 0,00995 | 1115 | 1268 | 1470 | 1747 | 2673 |
| 47 | 2419 | 9194 | 1112 | 2366 | 888 | 986 | 1108 | 1264 | 1471 | 1760 | 2574 |
| 48 | 2381 | 9206 | 1096 | 2283 | 878 | 977 | 1100 | 1260 | 1473 | 1773 | 2480 |
| 49 | 2344 | 9219 | 1080 | 2205 | 868 | 968 | 1093 | 1256 | 1476 | 1789 | 2392 |
| 50 | 0,2308 | 0,9231 | 0,1065 | 0,002130 | 0,00859 | 0,00960 | 0,01087 | 0,01253 | 0,01479 | 0,01805 | 0,2308 |

### 3. Dimensionierungsformeln für reine Biegung mit Armierung in der Zug- und Druckzone[5])

a) Gegeben: $M$, $b$, $h$, $h'$, $\sigma_e$, $\sigma_b$ und $\alpha = \dfrac{h'}{h}$

Gesucht: $F_e$ und $F_e'$ (event. $x$)

Lösung: Mit $\gamma = \dfrac{\sigma_e}{\sigma_b}$ folgen aus der Tabelle $K_1$, $K_2$, $K_3$, $\mu$ und $\xi$

$$b' = \frac{M}{K_1 \sigma_b h^2} = \frac{M}{K_2 \sigma_e h^2} > b \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

= erforderliche Balkenbreite für einseitige Zugarmierung, also ohne $F_e'$ (nach Gl. 17). Siehe auch die Bemerkungen zu Gl. (21).

$$F_e' = K_3 \frac{b' - b}{1 - \alpha} h \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$F_e = \mu \frac{b\,h}{100} + F_e' \frac{K_2}{K_3} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Lage der Nullinie: $x = \xi h$ . . . . . . . . . . . . (1)

Hebelarm der innern Kräfte: $z = \dfrac{b'}{\dfrac{b}{\varrho} + \dfrac{b' - b}{1 - \alpha}} h$ . . . (20)

b) Für symmetrische Armierung gilt die Beziehung:

$$\mu \frac{b\,h}{100} (1 - \alpha) = \left(\frac{M}{K_2 \sigma_e h} - bh\right) (K_3 - K_2)$$

Gegeben: $M$, $h$, $h'$, $\sigma_e$, $\sigma_b$, $\alpha = \dfrac{h'}{h}$

Gesucht: $b$, $F_e = F_e'$ und $x = \xi h$

Lösung: Bestimme zu $\gamma = \dfrac{\sigma_e}{\sigma_b}$ die Tabellenwerte $K_1, K_2, K_3, \mu$ und $\xi$

$$b = \frac{M}{K_2 \sigma_e h^2 \left(1 + \frac{\mu}{100} \frac{1 - \alpha}{K_3 - K_2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

$$F_e = F_e' = \frac{\mu\, b\, h}{100} \frac{K_3}{K_3 - K_2} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

[5]) Vgl. hierzu: «Bemessung doppelt bewehrter Rechteckquerschnitte» von Ing. J. Blazek, Prag, in «Beton und Eisen», 29. Jahrgang, Heft 19 vom 5. Oktober 1930, S. 350 bis 351.

Tabelle III. Verhältnis $\beta = b' : b$, damit symmetrische Armierung $F_e' = F_e$ erforderlich wird

| | $n = 10$ | | | $n = 15$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 0,06 | 0,10 | 0,14 | 0,06 | 0,10 | 0,14 |
| $\gamma = 15$ | 2,42 | 2,04 | 1,76 | 9,30 | 5,32 | 3,65 |
| 20 | 1,735 | 1,545 | 1,395 | 2,99 | 2,42 | 2,02 |
| 25 | 1,480 | 1,350 | 1,244 | 2,09 | 1,808 | 1,591 |
| 30 | 1,348 | 1,245 | 1,161 | 1,736 | 1,545 | 1,396 |
| 40 | 1,214 | 1,138 | 1,075 | 1,427 | 1,308 | 1,212 |
| 50 | 1,146 | 1,083 | 1,030 | 1,290 | 1,200 | 1,125 |

Aus Gl. (21) können wir eine Beziehung ableiten, die uns besagt, wievielmal grösser die erforderliche Balkenbreite $b'$ für einseitige Zugarmierung nach Gl. (18) sein darf, damit die Druckarmierung nicht grösser wird als die Zugarmierung.

Darnach ist

$$\beta = \frac{b'}{b} = 1 + \frac{\mu}{100} \frac{1 - \alpha}{K_3 - K_2} \quad \ldots \quad (23)$$

Aus Tabelle III ist ersichtlich, welche Grössenordnung dieses Verhältnis für verschiedene Werte von $\gamma$ annehmen kann.

### 4. Dimensionierungsformeln für reine Biegung, mit nur einseitiger Zugarmierung

*a) Bemessungsfall 1.* Gegeben: $M$, $b$, $\sigma_e$, $\sigma_b$
Gesucht: $F_e$, $h$ und event. $x = \xi h$

$$h = \sqrt{\frac{M}{K_1 b \sigma_b}} = \sqrt{\frac{M}{K_2 b \sigma_e}} \quad \ldots \quad (24)$$

$$F_e = \mu \frac{b\,h}{100} = \frac{n}{\gamma (n + \gamma)} \frac{b\,h}{2} \quad \ldots \quad (25)$$

*b) Bemessungsfall 1a.* Gegeben: $M$, $h$, $\sigma_e$, $\sigma_b$
Gesucht: $F_e$, $b$ und event. $x = \xi h$

$$b = \frac{M}{K_1 \sigma_b h^2} = \frac{M}{K_2 \sigma_e h^2} \quad \ldots \quad (26)$$

$F_e$ folgt aus Gl. (25)

*c) Bemessungsfall 2.* Gegeben: $M$, $b$, $h$, $\sigma_e$
Gesucht: $F_e$ und $\sigma_b$

$$K_2 = \frac{M}{\sigma_e b h^2} \quad \ldots \quad (27)$$

$$\sigma_b = \sigma_e / \gamma \quad \ldots \quad (5)$$

$$F_e = \mu \frac{b\,h}{100} = \frac{K_2}{\varrho} b\,h \quad \ldots \quad (28)$$

Anmerkung: Bei schwacher Armierung ist angenähert:

$$\xi \leq 0{,}15, \quad \varrho \geq 0{,}95$$

$$\mu \leq \frac{100 K_2}{0{,}95} = 105{,}3 K_2 \quad \ldots \quad (29)$$

$$F_e = \mu \frac{b\,h}{100} \leq \frac{M}{\sigma_e 0{,}95 h} \quad \ldots \quad (30)$$

*d) Bemessungsfall 2a.* Gegeben: $M$, $b$, $h$, $\sigma_b$
Gesucht: $F_e$ und $\sigma_e$

$$K_1 = \frac{M}{\sigma_b b h^2} \quad \ldots \quad (31)$$

$$\sigma_e = \gamma \sigma_b \quad \ldots \quad (5)$$

$$F_e = \mu \frac{bh}{100} = \frac{K_1}{\varrho \gamma} b\,h \quad \ldots \quad (28)$$

*e) Bemessungsfall 3.* Gegeben: $M$, $b$, $F_e$, $\sigma_e$
Gesucht: $h$ und $\sigma_b$

Berechne durch Probieren

mit der Tabelle: $\mu = \dfrac{\sigma_e F_e^2}{M b} 100 \varrho$ . . . . . . . . . (32)

(in erster Annäherung: $\varrho = 0{,}88 \div 0{,}90$)

$K_2$ und $\gamma$ aus Tabelle,

dann ist: $h = \sqrt{\dfrac{M}{K_2 b \sigma_e}}$ . . . . . . . . (24)

oder $h = \dfrac{100 F_e}{\mu b}$ . . . . . . . aus (28)

und $\sigma_b = \dfrac{\sigma_e}{\gamma}$ . . . . . . . . . . . (5)

Es sei noch erwähnt, dass sich die vorstehenden Unterlagen (Ableitungen und Tabellen I und II) auch für die Spannungsberechnung von rechteckigen Eisenbetonquerschnitten eignen. Mit den Tabellen kann auch sehr rasch der minimale Bewehrungssatz ($F_e + F_e'$) minimum bestimmt werden. Bekanntlich tritt dieser nicht bei $\sigma_{e\,max}$ auf, sondern meist bei einer wesentlich niedrigeren Eisenzugspannung. Einige wenige Berechnungen mit verschiedenen $\sigma_e$ bei gleichen $\sigma_b$, also Variation von $\gamma$, ermöglichen die Bestimmung dieses Minimums.