Band 111 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 12

Vereinfachte Methoden zur Bestimmung der Festpunkte

Von Dipl. Ing. E. T. H. KARL SCHNEIDER, Sao Paulo, Brasilien.

I. Einleitung.

Allgemeines. Die Vorteile der graphischen Berechnungs-Methoden sind wohl jedem in der Praxis stehenden Ingenieur bekannt; sie geben ein anschauliches Bild des Kräfteverlaufs, sind leicht kontrollierbar und führen meist rascher zum Ziel, als analytische Berechnungen. Ausserdem wirken sie weniger ermüdend und bieten daher auch nach stundenlanger Arbeit grössere Gewähr für fehlerfreie Ergebnisse. Da zudem die Grenzwerte der Momente, Querkräfte usw. doch in den meisten Fällen graphisch aufgetragen werden, ist nicht einzusehen, weshalb die dazu nötigen Berechnungen nicht auch auf graphischem Wege gemacht werden dürfen.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der graphischen Statik bilden die Festpunkte. Wie weit ihre Anwendung reicht, geht aus dem Buch von Suter: «Die Methode der Festpunkte» hervor. Unsere Untersuchung soll sich auf eine von dem hier tätigen deutsch-russischen Ingenieur *Waldemar Tietz* gefundene Konstruktion, sowie auf eine Näherungsformel zur Bestimmung der Festpunktabstände beschränken. Die hier mit Ermächtigung von Ing. Tietz zum ersten Mal veröffentlichte Festpunktkonstruktion ist bedeutend rascher als die bisher bekannten und kann auch bei den kompliziertesten Systemen in gleich einfacher Weise angewandt werden. Die bei andern Konstruktionen vom bekannten Festpunkt bis zur «Verschobenen Auflagersenkrechten» beliebig gezogene Gerade wird hier unter einem festen Winkel bis zur Auflagersenkrechten geführt. Dadurch fällt die Bestimmung der «Verschobenen Auflagersenkrechten» weg, und die Konstruktion wird auch dort unverändert anwendbar, wo in einem Knotenpunkt mehrere Stäbe mit verschiedenen Trägheitsmomenten zusammentreffen.

Da wir in den meisten Fällen einen oder mehrere Festpunkte vorerst schätzungsweise annehmen müssen, um durch Konstruktion oder Rechnung die andern bestimmen zu können, bildet die in Abschnitt III behandelte Näherungsformel eine bequeme Ergänzung zum Tietzschen Verfahren. Wir können mit ihr die Festpunkte, von denen aus wir mit der Konstruktion beginnen wollen, so genau berechnen, dass schon für die nächsten Felder der richtige Festpunktabstand erhalten wird und wir die Rechnung nie, wie bei zu ungenauer Schätzung, zweimal machen müssen. Sie darf aber auch, wie die Genauigkeitsuntersuchung zeigen wird, in den meisten Fällen zur endgültigen Bestimmung aller Festpunkte benützt werden. Ganz besonders eignet sie sich dort, wo wir nur einzelne Stäbe eines Rahmensystems zur Untersuchung herausgreifen möchten, ohne die Rechnung über alle Stäbe machen zu müssen. Wir werden in Abschnitt III näher darauf eintreten. Sowohl Konstruktion wie Näherungsformel haben sich beim Gebrauch als bequem erwiesen, da sie durch Einfachheit und Zeitersparnis den Bedürfnissen der Praxis entsprechen, aus denen sie entstanden sind. Ich möchte mit ihrer Veröffentlichung den Anhängern der Festpunktmethode einige neue Anregungen bieten, vielleicht sogar den einen oder andern zu deren vermehrter Anwendung bewegen.

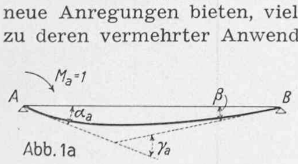

Abb. 1a

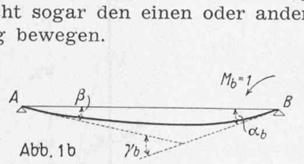

Abb. 1b

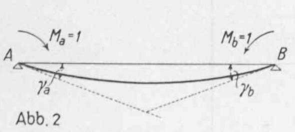

Abb. 2

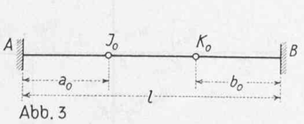

Abb. 3

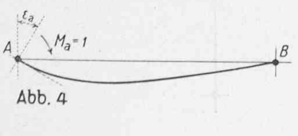

Abb. 4

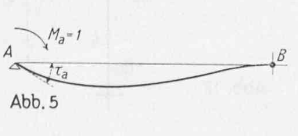

Abb. 5

Bezeichnungen. Für den *einfachen Balken* ergeben sie sich aus Abb. 1a, 1b und 2. Ferner führen wir ein:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_{a_1}+\beta_1} &= \frac{1}{\gamma_{a_1}} = R_{a_1}\\ \frac{1}{\alpha_{b_1}+\beta_1} &= \frac{1}{\gamma_{b_1}} = R_{b_1}\end{aligned}\right\} = \text{Steifigkeitswerte des Stabes 1}$$

Am *vollständig eingespannten* Balken ergeben sich die Bezeichnungen aus Abb. 3, am *elastisch eingespannten* Balken aus Abbildungen 4 und 5 (τ_{a_1} = Drehwinkel des gelenkig gedachten Auflagers auf Seite des Festpunktes J_1 infolge der Belastung $M_{a_1} = 1$). Ferner seien:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{a_1}} &= w_{a_1}\\ \frac{1}{\tau_{b_1}} &= w_{b_1}\end{aligned}\right\} = \text{Drehwiderstände des Stabes 1 an den betreffenden Auflagern.}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_{a_1}} &= W_{a_1}\\ \frac{1}{\varepsilon_{b_1}} &= W_{b_1}\end{aligned}\right\} = \text{Drehwiderstände der betreffenden Auflager.}$$

Elementare Konstruktionen. Wie wir sehen werden, brauchen wir für die Konstruktion von Tietz (wie auch für alle andern bekannten Verfahren) die Festpunkte der vollständigen Einspannung (Drittelslinien). Ihre Abstände können für die gebräuchlichsten Fälle aus von uns eigens aufgestellten Tabellen sofort erhalten werden, sodass sich ihre Konstruktion erübrigt. Hingegen ist es zur Erläuterung des Späteren doch notwendig, auf einige bekannte Beziehungen hinzuweisen.

Konstruktion der Festpunkte bei vollständiger Einspannung. Tragen wir die reziproken Werte der Auflagerdrehwinkel α_a und β des einfachen Balkens in den entsprechenden Auflagern senkrecht zur Stabaxe in entgegengesetzter Richtung ab und verbinden die Endpunkte der abgetragenen Strecken miteinander, so erhalten wir den Festpunkt J_0 als Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Stabaxe (Abb. 6).

Beweis:

$$\frac{\frac{1}{\alpha_a}}{\frac{1}{\beta}} = \frac{a_0}{l - a_0} \qquad a_0 = \frac{\beta}{\alpha_a+\beta}\, l$$

Auf die gleiche Art erhalten wir:

$$b_0 = \frac{\beta}{\alpha_b+\beta}\, l$$

Konstruktion der Festpunkte bei elastischer Einspannung. Tragen wir den Drehwiderstand W_a in seinem Auflager, die Steifigkeit R_a im Festpunkt J_0 der vollständigen Einspannung senkrecht zur Stabaxe in entgegengesetzten Richtungen ab, und verbinden die Endpunkte dieser Strecken miteinander, so schneidet die Verbindungsgerade die Stabaxe im Festpunkt J der elastischen Einspannung (Abb. 7).

Beweis:

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon_a}}{\frac{1}{\alpha_a+\beta}} = \frac{a}{a_0 - a} = \frac{a}{\frac{\beta}{\alpha_a+\beta}\, l - a}\,; \quad a = \frac{\beta}{\alpha_a+\beta+\varepsilon_a}\, l$$

Analog erhalten wir:

$$b = \frac{\beta}{\alpha_b+\beta+\varepsilon_b}\, l$$