

# Theoretische Betrachtungen zum Geschiebetrieb

Autor(en): **Grossmann, K.H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **109/110 (1937)**

Heft 14

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-49127>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

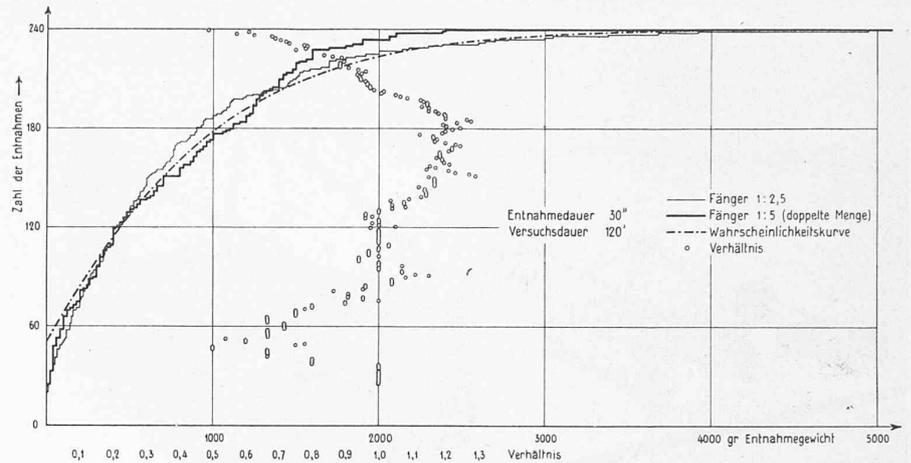
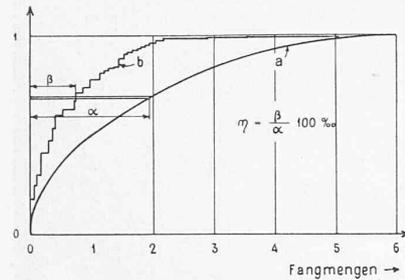
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eichung des im Rhein verwendeten Geschiebefängers

Abb. 56 (rechts). Dauerkurve der Fangmengen

Abb. 55 (unten). Wahrscheinlichkeit des  
Unterschreitens einer Fangmenge



möglichst richtig zu erhalten, mitteln wir die entsprechenden Wirkungsgrade jeweils desjenigen Fängers, der im Masstab mit dem Kies übereinstimmt. Eine einzige Ausnahme macht hierbei Versuch 8, bei dem wir trotz feinen Kornes den grossen Fänger nehmen müssen, da der kleine nicht richtig gearbeitet hat. Dieser Mittelwert ist 45% und somit etwas höher als der in der Versuchsreihe von 1935 ausgewiesene Wert von rd. 40%. Diese Zahl 45 ist nun also zur Bestimmung des mittleren Geschiebetriebes im Querschnitt brauchbar und gestattet damit, die Geschiebefunktion und die Geschiebefracht zu errechnen.

Ein wesentlicher Punkt bleibt zu klären. Er betrifft die Bemerkung in der Tabelle: «Fänger zu stark gefüllt». Zu seinem Verständnis müssen wir an die zweite, bisher nicht verwendete, allgemeine Haupteigenschaft statistischer Grössen anknüpfen. Nach dieser ist nicht nur der Mittelwert des Geschiebetriebes bei einem bestimmten Wasserabfluss in der Grenze (für sehr lange Beobachtungsdauer) ein Festwert, sondern auch die Häufigkeit einzelner Abweichungen von diesem Mittelwert folgt einem ganz bestimmten Gesetze. Abb. 55 soll dies schematisch erläutern. Kurve a gibt die Summenlinie dieser Häufigkeiten, d. h. sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Geschiebetrieb (in Fangmenge ausgedrückt) unterschritten wird. Tragen wir in dieses Diagramm die nach Grösse geordneten Messwerte einer Versuchsreihe auf (Kurve b), so können wir direkt für jeden momentanen Trieb auf derselben Horizontalen die zugehörige tatsächliche Füllung bestimmen und aus beiden den zu dieser Füllung gehörigen Wirkungsgrad rechnen. Tritt nun der Fall ein, dass von einer bestimmten Füllung an der Wirkungsgrad plötzlich systematisch sinkt, so ist nachgewiesen, dass dies die höchste zulässige Füllung ist, wenn wir die normalen Wirkungsgrade verwenden wollen.

Leider steht uns bei den Eichversuchen so wenig wie bei den Naturmessungen diese Kurve a zur Verfügung. Fangen wir aber mit dem grossen und kleinen Fänger abwechselungsweise in dem selben Versuch, dann ist die zu beiden Fängern gehörige Kurve a dieselbe. Ist der zulässige Füllungsgrad entsprechend auch gleich, so wird dieser beim kleinen Fänger schon bei einer viermal kleineren Füllung (bezogen auf den Meter Breite) eintreten als beim grossen und daher auch durch Vergleich dieser beiden Kurven sichtbar werden. Abb. 56 zeigt nun so eine Gegenüberstellung der beiden Fänger und das Verhältnis der jeweils auf einer Horizontalen liegenden Mengen ist auch eingezeichnet. Wir sehen deutlich, wie plötzlich bei einer Füllung von 600 gr der kleine Fänger zu wenig fängt und damit die Kurve der Verhältnisse nach links abbiegt. Diese Füllung von 600 gr oder rd. 330 cm<sup>3</sup>, oder 1/3 des 1000 cm<sup>3</sup> fassenden Fängers, wurde von uns als höchstzulässige angesehen.

Damit ist nun gezeigt, wie sich ein Geschiebefänger verhält, der auf der Sohle absolut ruhig liegt. Es ist nun noch zu prüfen, ob diese Bedingung bei den Messungen im Rhein auch tatsächlich erfüllt war. Die bezügliche Beobachtung in der Natur musste sich auf den Befestigungspunkt des Zugseils am Fährseil beschränken, da eine Beobachtung unter Wasser unmöglich war. Allerdings besitzt auch das Zugseil noch eine gewisse Elastizität und kann daher noch einen allerdings beschränkten Schürfeffekt hervorbringen. Vergleichsversuche mit verschiedenen dicken Zugseilen und ohne zusätzliche Verspannung ergaben in der Versuchsanstalt die Möglichkeit, durch Elastizität (Durchhang) des Zugseils allein den Wirkungsgrad bis auf 80% hinaufzudrücken. Es ist deshalb zu vermuten, dass eine, wenn auch geringe Schürfwirkung im Rhein auch jetzt noch vorhanden ist,

sodass wir also wahrscheinlich mit einem höheren Wirkungsgrad rechnen müssen, als das oben errechnete Mittel von 45%. Das Mass dieser restlichen Schürfwirkung könnte aber nur im Fluss selbst durch sehr langwierige Vergleichsversuche mit verschiedenen Zugseilen ermittelt werden. Auch die Resultate der im Rhein vorgenommenen Kontrollversuche mit verschiedener Fangdauer streuen so stark, dass z. B. eine 10prozentige Schürfwirkung aus ihnen nicht feststellbar ist.

Normalerweise wollen wir mit dem Geschiebefänger nur den einem Wasserabfluss zugehörigen mittleren Geschiebetrieb bestimmen. Wieviele Messungen sind pro Punkt nötig, und über welche Zeitdauer sind sie zu erstrecken? Stützte man sich bei den Messungen im Rhein in dieser Frage im wesentlichen auf den Gang der im Kapitel III erwähnten Schwingungen, was immerhin als eine ziemlich subjektive Beurteilung des Messenden bezeichnet werden muss, so sei hier auf ein anderes Kriterium hingewiesen. An anderer Stelle<sup>1)</sup> ist nachgewiesen worden, dass man mit guter Annäherung die Kurven der Abb. 56 als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, definiert durch zwei Grössen (Mittelwert und Streuung), auffassen kann. Es muss dies besonders betont werden, da es sich hier um einen periodischen Vorgang handelt. Nun brauchen wir nur zu kontrollieren, wie gut sich die Messungen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitskurve anpassen, um ein Mass für die Genauigkeit des Mittelwertes zu erhalten. In Abb. 56 ist diese gerechnete Wahrscheinlichkeitskurve auch gegeben (gerechnet als Ausgleich der Messresultate des grossen Fängers). Sind die Abweichungen der empirischen Kurve viel grösser als dort, so dürfen wir mit ziemlicher Berechtigung an der Genauigkeit des entsprechenden Mittelwertes zweifeln, sei es, dass der Fänger nicht richtig arbeitete, oder dass der Geschiebetrieb besonders ungünstig verlief.

Kurz zusammenfassend können wir also sagen, dass Messungen mit Geschiebefängern geeignet sind, uns über das Wesen und die Art des Geschiebetriebes im Flusse sehr wertvolle Einblicke zu verschaffen, besonders was den zeitlichen Verlauf des Triebes betrifft. Doch dürfen wir in bezug auf Genauigkeit der Messresultate keine zu grossen Forderungen stellen, da der Geschiebetrieb selbst ausserordentlich grossen Schwankungen ausgesetzt ist. Immerhin sollte es möglich sein, die Jahresgeschiebefracht in so einem günstigen Messquerschnitt wie Brugg so genau zu bestimmen, als es für die Beurteilung der zu erwartenden Sohlenänderungen notwendig ist. (Schluss folgt)

## Theoretische Betrachtungen zum Geschiebetrieb

Mit anderen Massenerscheinungen teilen die Kiesgewichte, die ein auf die Flusssohle gestellter Geschiebefänger jedesmal zutage fördert — siehe etwa Abb. 48, S. 167 der vorangehenden Abhandlung von Dr. Einstein —, den Charakter wilder Regellosigkeit. Um davor nicht den Mut zu verlieren, bedarf es einer Theorie: des Versuches, aus der verworrenen Menge von Einzelzufällen ein vom Zufall unabhängiges Gesetz abzuziehen und mit der Erfahrung zu vergleichen. Eine mit Vorstellungskraft und Scharfsinn entworfene Theorie ist in zwei kürzlich von der Eidg. Versuchsanstalt für Wasserbau herausgegebenen Studien zu finden<sup>1)</sup>: die eine, von Dr. H. A. Einstein, behandelt den Ge-

<sup>1)</sup> A. H. Einstein: Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem; G. Pólya: Zur Kinematik der Geschiebebewegung. Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich. Rascher & Co., Zürich 1937. Preis geh. 5 Fr.

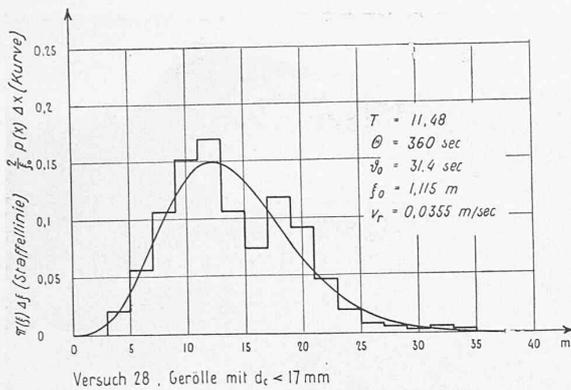


Abb. 1. Beispiel einer Wahrscheinlichkeits-Verteilung

Zur Statistik des Geschiebetriebes

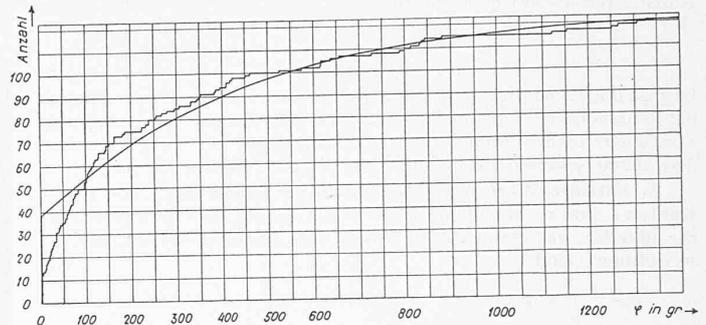


Abb. 3. Beispiel einer Summenlinie

schiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem; die anschliessende zweite, von Prof. Dr. G. Pólya, unterstellt ihn einer partiellen Differentialgleichung. Ein direkter Weg führt von der ersten zu der zweiten Auffassung, wie die folgende unvollständige, prinzipielle Skizze dieser Gedankengänge zeigen soll.

1. Zeit und Fang. Bei stationären hydraulischen Verhältnissen des Flusses oder Versuchskanals denke man sich mit einem Geschiebefänger die folgenden beiden Versuchsreihen ausgeführt:

a) Eintauchzeit  $t$  fest. Nach einer bestimmten Eintauchzeit  $t_0$  zieht man den Korb aus dem Wasser und wägt den gemachten Geschiebefang  $x$ . Nach einer grossen Anzahl  $n$  solcher Ziehungen kann man deren Ergebnisse ordnen, indem man, nach dem Muster der eine andere Versuchsreihe darstellenden, der Einstein'schen Arbeit entnommenen Abb. 1, über jedem Abschnitt der gleichmässig eingeteilten  $x$ -Axe ein Rechteck aufträgt, dessen Inhalt angibt, wie oft der Fang in den betreffenden Abschnitt gefallen ist. Bei genügend feiner Unterteilung der  $x$ -Axe und hinreichender Geduld wird — immer konstante Abflussverhältnisse vorausgesetzt — für  $x > 0$  der obere Rand der von den Rechtecken bedeckten Fläche, wie auf der Abbildung, aus einem anfänglich willkürlich gezackten in ein zusehends glätteres Profil übergehen: Dessen Ordinate stellt für beliebiges  $x$  die Anzahl der Ergebnisse. «Fang zwischen  $x$  und  $x + 1$  kg» dar, oder auch, in geeignetem Massstab, die «lineare Wahrscheinlichkeitsdichte»  $u(x, t_0)$ , definiert durch die «Grenzwert»-Gleichung<sup>2)</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Anzahl Fänge zwischen } x \text{ und } x + dx}{n} = u(x, t_0) dx \quad (x > 0)$$

Einer Serie von  $t_0$ -Versuchen mögen solche mit den Eintauchzeiten  $t_1, t_2, \dots$  folgen. Die so erhaltenen Kurvenblätter  $u(x, t_0), u(x, t_1), u(x, t_2), \dots$  ergeben schliesslich ein Bild von der Abhängigkeit der im folgenden als Fangpegel bezeichneten Funktion  $u(x, t)$  von ihren beiden Argumenten.

b) Fang  $x$  fest. Praktisch schwieriger auszuführen wäre die folgende Versuchsreihe: Jedesmal wenn nach Herablassen des Korbes sein Inhalt das Gewicht  $x_0$  erreicht hat, wird die verstrichene Eintauchzeit  $t$  notiert. Es ist zu erwarten, dass die Auftragung der relativen Häufigkeiten über der  $t$ -Axe wie soeben zu einem «Grenzwert» der linearen Wahrscheinlichkeitsdichte  $g(x_0, t)$  führen wird, definiert durch die Gleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Anzahl Zeiten zwischen } t \text{ und } t + dt}{n} = g(x_0, t) dt \quad (t > 0)$$

Eine Ergänzung dieser Versuchserie durch solche mit den Fängen  $x_1, x_2, \dots$  würde mit den Kurven  $g(x_1, t), g(x_2, t), \dots$  vollständigeren Aufschluss über den Zeitpegel  $g(x, t)$  in Funktion von  $x$  und  $t$  verschaffen.

2. Die Zustandslinie. Der «Zustand» des eingetauchten Korbes ist, soweit er uns interessiert, gekennzeichnet durch zwei Variable: die seit seiner Aufstellung verstrichene Zeit  $t$  und den in dieser Zeit gemachten Fang  $x$ , also durch einen Punkt in der  $x, t$ -Ebene. Mit wachsendem  $t$  bewegt sich dieser «Zustandspunkt» bei Wahl des rechtwinkligen Koordinatensystems der Abb. 2 offenbar, vom Nullpunkt ausgehend, gegen rechts unten, und zwar, nach Einstein's glücklich vereinfachender Anschauung des Füllvorgangs, in einer Treppenkurve, der «Zustandslinie», siehe Abb. 2: «Zeitphasen», in denen, bei unveränderter Fangmenge, nur die Zeit zunimmt (vertikale Strecken, Zeitfortschritt), wech-

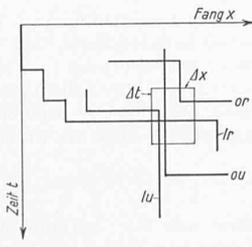


Abb. 2. Zustandslinien

seln ab mit «Füllphasen», in denen, bei unveränderter Zeit, durch plötzlichen Eintritt neuer Steine, nur die Fangmenge einen Zuwachs erfährt (waagrechte Strecken, Fangfortschritt).

3. Die Kontinuitätsgleichung. Um einen allgemein gültigen Zusammenhang zwischen dem Zeit- und dem Fangpegel zu gewinnen, betrachten wir an einer Stelle des  $x, t$ -Quadranten ein kleines Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta x$  und  $\Delta t$  (Abb. 2).  $n$  Beobachtungen des eingetauchten Korbes, jede eine gewisse Zeit lang fortgesetzt, liefern  $n$  Zustandslinien; solche darunter, die unser Rechteck durchsetzen, können dies, je nach der Ein- und der Austrittsseite, auf vier Arten tun, in Abb. 2 durch vier Treppenabschnitte verdeutlicht:  $or$  heisst z. B. Eintritt durch die obere, Austritt durch die rechte Seite;  $lu$ -Eintritt von links, Austritt unten.  $n_{or}, n_{ou}, n_{lr}, n_{lu}$  seien die Anzahlen der ins Auge gefassten Zustandslinien der vier Durchtritts-Typen. Nach unseren Definitionen wird angenähert:

$$n_{or} + n_{ou} = n \cdot u(x, t) \Delta x, \quad n_{lr} + n_{lu} = n \cdot g(x, t) \Delta t$$

$$n_{ou} + n_{lu} = n \cdot u(x, t + \Delta t) \Delta x, \quad n_{or} + n_{lr} = n \cdot g(x + \Delta x, t) \Delta t$$

Ermitteln wir den Ueberschuss  $m_1$  der das Rechteck durch die untere Seite verlassenden über die durch die Oberseite eindringenden Zustandslinien —  $m_1 = n [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] \Delta x$  —, oder jenen,  $m_2$ , der links ein- über die rechts austretenden Linien —  $m_2 = n [g(x, t) - g(x + \Delta x, t)] \Delta t$  —, so erhalten wir die selbe Anzahl  $n_{lu} - n_{or}$ . So ergeben sich, hinreichende Stetigkeit und Differenzierbarkeit vorausgesetzt, unmittelbar zwei Ausdrücke für die selbe Tatsache, dass in das Rechteck gleich viele Zustandslinien ein- wie austreten: Erstens die Kontinuitätsgleichung von Pólya

$$u_t = -g_x \tag{I}$$

zweitens die Gleichung

$$u_t \cdot \Delta t \cdot \Delta x = \frac{n_{lu}}{n} - \frac{n_{or}}{n} \tag{II}$$

Allen Linien des  $lu$ - und des  $or$ -Typus ist gemeinsam, dass sie, noch innerhalb des Rechtecks umknickend, nicht zwei gegenüber-, sondern zwei anliegende Seiten von der Länge  $\Delta x$  und  $\Delta t$  durchstossen. Setzen wir  $n_{or} = a^* \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ ,  $n_{lu} = z^* \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ , und nehmen wir an, dass die so definierten Grössen  $a^*$  und  $z^*$ , wo immer (innerhalb eines für uns in Betracht fallenden Quadranten-teils) das kleine Rechteck gelegen sei, bei unbegrenzt wachsender Beobachtungszahl  $n$  und gegen  $0$  konvergierenden Rechteckseiten nach Grenzwerten  $a$  und  $z$  streben, die nur von  $x$  und  $t$  abhängen. Dann gewinnt die Kontinuitätsgleichung (I) die gleichfalls von Pólya stammende Form  $u_t = z - a$ , (II) um deretwillen die «Flächenwahrscheinlichkeitsdichten»  $z(x, t)$  und  $a(x, t)$  als Zu-, bzw. Abnahmepegel bezeichnet seien.

4. Die Grundwahrscheinlichkeiten. Hat der Korb irgend einen Zustand  $x, t$  erreicht, so stellen sich zwei Fragen: 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Zustandslinie von nun an um ein bis zur nächsten Ecke zwischen  $x'$  und  $x' + dx$  liegendes Stück horizontal weiterschreiten? 2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie sich vertikal fortsetzen um einen bis zum nächsten Knick im Intervall  $[t', t' + dt']$  liegenden Betrag? Nennen wir die erste Wahrscheinlichkeit  $p(x') dx'$ , die zweite  $q(t') dt'$  in der Annahme, dass die elementare Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$  von nichts als  $x', q$  von nichts als  $t'$  abhängt. Sowohl  $p$  wie  $q$  werden mit wachsenden Argumentwerten abnehmen. Die Hypothese einer prozentual gleichbleibenden Abnahme pro kg, bzw. sec:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{dx'}{\sigma}, \quad -\frac{dq}{q} = \frac{dt'}{\tau} \quad (\sigma, \tau \text{ konstant})$$

führt zu den Funktionen  $p(x') = P e^{-\frac{x'}{\sigma}}$ ,  $q(t') = Q e^{-\frac{t'}{\tau}}$ . Dass der Fangfortschritt zwischen  $0$  und  $\infty$  liegen wird, ist gewiss; ebenso, dass der Zeitfortschritt in das selbe Intervall fällt.

<sup>2)</sup> Vergl. R. v. Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Julius Springer, Wien 1928.

Das heisst:  $\int_0^\infty p(x') dx' = \int_0^\infty q(t') dt' = 1$ , woraus sich die Konstanten  $P$  und  $Q$  bestimmen:

$$p(x') = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x'}{\sigma}}, \quad q(t') = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}}. \quad (III)$$

Das ist der Einstein'sche Ansatz für die elementaren Wahrscheinlichkeitsdichten. Dass deren Existenz und Gestalt die Erfüllung sämtlicher bisher gemachten Voraussetzungen bedingt, wird für den aufmerksamen Leser aus dem Folgenden mit hervorgehen.

**5. Mittlere Wartezeit und mittlerer Einzelfang.** Die Konstanten  $\sigma$  und  $\tau$  sind nichts anderes als die sog. Erwartungswerte  $E_{x'}$  und  $E_{t'}$ , des elementaren Fang- und Zeitfortschrittes, die ja so definiert sind:

$$E_{x'} = \int_0^\infty x' p(x') dx' = \sigma, \quad E_{t'} = \int_0^\infty t' q(t') dt' = \tau.$$

Eine grössere Anzahl beobachteter Zustandslinien enthalte insgesamt  $h$  horizontale und  $v$  vertikale Teilstücke: Aneinandergereiht, werden die horizontalen Fangfortschritte zusammen ungefähr den Betrag  $h \cdot \sigma$ , die vertikalen Zeitfortschritte etwa die Grösse  $v \cdot \tau$  ausmachen; die zwischen zwei sukzessiven Fangfortschritten liegende «mittlere Wartezeit» beträgt  $\tau$ , der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitfortschritten liegende «mittlere Einzelfang» beträgt  $\sigma$ .

**6. Bestimmung von  $z$  und  $a$ .** Die Einstein'sche Grundhypothese bestimmt die Abhängigkeit des Ab- und des Zunahmepegels von ihren Argumenten. Berechnen wir, um dies einzusehen, a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zustandslinie erstens von oben in unser Rechteck eintritt und es zweitens durch die rechte Seite verlässt; b) dafür, dass eine Linie erstens links ein- und zweitens unten austritt! Diese Wahrscheinlichkeiten sind ja nichts anderes als die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten.

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_{or}}{n} &= \frac{n_{or}}{n_{or} + n_{ou}} \cdot \frac{n_{or} + n_{ou}}{n} \approx \frac{n_{or}}{n_o} \cdot u(x, t) \cdot \Delta x, \\ \text{bzw. } \frac{n_{lu}}{n} &= \frac{n_{lu}}{n_{lu} + n_{lr}} \cdot \frac{n_{lu} + n_{lr}}{n} \approx \frac{n_{lu}}{n_l} \cdot g(x, t) \cdot \Delta t, \end{aligned} \right\} (2)$$

wenn wir mit  $n_o$  und  $n_l$  die Zahl der oben, bzw. links eintretenden Linien bezeichnen. Es ist

$$\frac{n_{or}}{n_o} = 1 - \frac{n_{ou}}{n_o} \quad \text{und} \quad \frac{n_{lu}}{n_l} = 1 - \frac{n_{lr}}{n_l},$$

worin  $n_{ou}/n_o$  angenähert die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine durch die Oberseite des Rechtecks eindringende Zustandslinie es durch die Unterseite verlässt,  $n_{lr}/n_l$  die Wahrscheinlichkeit für den geradlinigen Durchtritt einer von links eindringenden Zustandslinie (von Komplikationen höherer Ordnung abgesehen), also dafür, dass der nächste Knick der Zustandslinie erst nach Durchqueren des Rechtecks erfolgt, d. h. in einer zwischen  $\Delta t$  und  $\infty$ , bzw.  $\Delta x$  und  $\infty$  gelegenen Entfernung von dessen oberer, bzw. linker Kante. Nach der Summenregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird daher

$$\frac{n_{ou}}{n_o} = \int_0^\infty q(t') dt' = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}, \quad \frac{n_{lr}}{n_l} = \int_0^\infty p(x') dx' = e^{-\frac{\Delta x}{\sigma}},$$

$$\frac{n_{or}}{n_o} = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}, \quad \frac{n_{lu}}{n_l} = 1 - e^{-\frac{\Delta x}{\sigma}}$$

Da für  $\Delta t \rightarrow 0$  der erste Ausdruck nach  $\Delta t/\tau$ , der zweite für  $\Delta x \rightarrow 0$  nach  $\Delta x/\sigma$  strebt, so konvergieren die Häufigkeiten (2) nach den folgenden Werten:

$$\frac{n_{or}}{n} \rightarrow \frac{1}{\tau} \cdot u(x, t) \cdot \Delta t \cdot \Delta x, \quad \frac{n_{lu}}{n} \rightarrow \frac{1}{\sigma} \cdot g(x, t) \cdot \Delta x \cdot \Delta t,$$

womit die Existenz des Ab- und des Zunahmepegels erwiesen ist:

$$a = \frac{1}{\tau} \cdot u, \quad z = \frac{1}{\sigma} \cdot g \quad (IV)$$

Mit diesen von Pólya als Ausgangsbasis gewählten Proportionalitäten erhält die Kontinuitätsgleichung (II) die folgende Form:

$$u_t = \frac{1}{\sigma} \cdot g - \frac{1}{\tau} \cdot u \quad (V)$$

**7. Die Differentialgleichung des Fangproblems.** Die Elimination von  $g$ , bzw.  $u$  aus (I) und (V) liefert für  $u$  und  $g$  die selbe Differentialgleichung von Pólya:

$$u_{xt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_x + \frac{1}{\sigma} \cdot u_t = 0, \quad g_{xt} + \frac{1}{\tau} \cdot g_x + \frac{1}{\sigma} \cdot g_t = 0; (VI)$$

wir sind auf klassischem Boden angelangt.

**8. Eine Lösung derselben.** Da jede Zustandslinie mit einer Wartephase anhebt, ist  $u(x, 0) = 0$  (3) längs der ganzen positiven  $x$ -Axe. Wie auf dieser die Verteilung

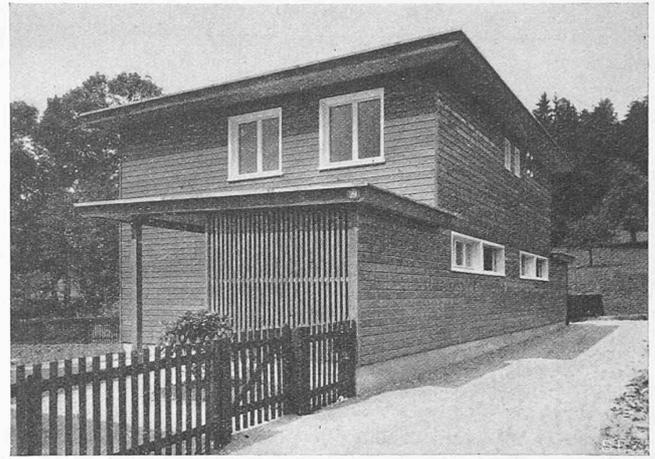


Abb. 2. Kleinhaus in Holzbauweise, Typ B, aus Nordost. Arch. O. SENN

des Fangpegels, ist auf der positiven  $t$ -Axe jene des Zeitpegels bekannt:

$$g(0, t) = \sigma \left\{ u_t(0, t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(0, t) \right\} = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4)$$

Um die den Randbedingungen (3) und (4) angepasste Lösung  $u(x, t)$ ,  $g(x, t)$  von (VI) und (V) zu finden, kann man sich entweder, dem Beispiel Einsteins folgend, an die Bedeutung dieser Funktionen als aus den elementaren Wahrscheinlichkeiten nach bekannten Regeln zusammengesetzter Wahrscheinlichkeiten halten, ohne die Differentialgleichungen zu benutzen, oder umgekehrt aus diesen die Lösung ohne Rücksicht auf die ihr erteilte Bedeutung nach der bei Pólya nachzulesenden Methode der Analysis entwickeln. Sie lautet:

$$g(x, t) = \frac{e^{-\frac{x}{\sigma} - \frac{t}{\tau}}}{\tau} \cdot \psi\left(\frac{x}{\sigma} \cdot \frac{t}{\tau}\right), \quad \text{worin } \psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! n!}$$

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{x}{\sigma} - \frac{t}{\tau}}}{\sigma} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma} \cdot \frac{t}{\tau}\right),$$

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!(n+1)!} = \psi'(z).$$

$\psi(z)$  und  $\varphi(z)$  sind wohlbekannte, tabellierte Funktionen (die Bessel'schen Funktionen  $J_0(2i\sqrt{z})$  und  $\frac{J_1(2i\sqrt{z})}{i\sqrt{z}}$ ).

Z. B. hat  $g(x, t)$  für gewisse Festwerte von  $\sigma$ ,  $\tau$  und  $x$ , über  $t$  aufgetragen, die Gestalt der in Abb. 1 eingezeichneten Kurve.

**9. Die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung.** Wir kennen nun für  $t \geq 0$  und  $x > 0$  die Wahrscheinlichkeit  $u(x, t) dx$ , und für  $x \geq 0$  und  $t > 0$  die Wahrscheinlichkeit  $g(x, t) dt$ ; zu bestimmen bleiben noch die beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten: 1. dafür, dass nach der Eintauchzeit  $t$  der Fang  $x=0$  gehoben wird; 2. dafür, dass der Fang  $x$  in der Zeit  $t=0$  gemacht wird. Die zweite Wahrscheinlichkeit ist natürlich  $= 0$ , die erste — die Wahrscheinlichkeit einer  $t$  übertreffenden erste Wartephase —  $= \int_0^\infty q(t') dt' = e^{-t/\tau}$ .

**10. Ermittlung von  $\sigma$  und  $\tau$ .** Wie für jede lineare Wahrscheinlichkeitsverteilung sind für jene des Fangpegels längs einer Horizontalen  $t = \text{constans}$  charakteristisch einmal der Erwartungs- oder Mittelwert, auch erstes Moment  $\mu_1$  genannt, sodann das zweite Moment  $\mu_2$ , das mit dem ersten zusammen Aufschluss über die Streuung um den Mittelwert gibt:

$$\mu_1 = \int_0^\infty x u(x, t) dx = \frac{\sigma t}{\tau}, \quad \mu_2 = \int_0^\infty x^2 u(x, t) dx = \sigma^2 \left\{ 2 \frac{t}{\tau} + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right\}$$

Eine mit der nötigen Ausdauer durchgeführte Reihe von  $t_0$ -Versuchen liefert mit der Verteilung  $u(x, t_0)$  deren erste beiden Momente und damit die für den Aufbau des Fang- und des Zeitpegels über dem  $x, t$ -Quadranten massgebenden Kenngrössen  $\sigma$  und  $\tau$ :

$$\tau = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1^2} - 1 \right) \frac{t_0}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} - \mu_1 \right).$$

**11. Die Summenlinie.** Dass der in der Zeit  $t$  gemachte Fang zwischen  $0$  und  $x$  liege, dass er also entweder  $= 0$  sei oder



Abb. 3. Kleinhaus in Holzbauweise, Typ B, aus Südost

einem der Intervalle  $[0, dx]$ ,  $[dx, 2 dx]$  ...  $[x - dx, x]$  angehöre — die Wahrscheinlichkeit  $s(x, t)$  hiefür ist die Summe der genannten Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$s(x, t) = e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x/\sigma)^k}{k!} \right) \frac{(t/\tau)^n}{n!} + \int_0^x u(\xi, t) d\xi = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma} - \frac{t}{\tau}}$$

Aus der sub 1 geschilderten Rechteck-Darstellung der experimentell ermittelten Verteilung  $u(x, t_0)$  erhält man offenbar eine Annäherung der «Summenlinie»  $s(x, t_0)$ , indem man alle links von der jeweiligen Abszisse  $x$  gelegenen Rechtecke übereinander-türmt. Wie gut diese Approximation Herrn Einstein gelungen ist, veranschaulicht beispielsweise die seiner Arbeit entnommene Summenlinie Abb. 3 (S. 171).

**12. Ein analoges Problem.** Die vorangehenden Ueberlegungen sind auf ein anderes Massenergebnis anwendbar: die Lage  $x$  eines Steines aus dem Geschiebe eines Flusses zur Zeit  $t$ . Jetzt bedeutet  $u(x, t)$  die Verteilung der Steine längs des Flusses im Zeitpunkt  $t$ , veranschaulicht durch den Verlauf des «Sohlenpegels»;  $g(x, t)$ , die relative Häufigkeit, mit der die Steine die Stelle  $x$  im Zeitintervall  $[t, t + 1]$  passieren, wird zum Geschiebetrieb. In einem 41 m langen Kanal der Versuchsanstalt hat Einstein bei ausgebildeter Sohle und stationären Abflussverhältnissen die raum-zeitliche Verteilung einer grösseren Anzahl rot gefärbter Steine verfolgt und eine in Anbetracht der unvermeidlichen Fehlerquellen bemerkenswerte Uebereinstimmung mit der Theorie festgestellt, vergl. z. B. die bereits erwähnte Kurve in Abb. 1, die zu einem bestimmten Zeitpunkt den Sohlenpegel  $u(x, t)$  wiedergibt, d. h. die Lösung von (VI) und (V) mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \quad \text{und} \quad g(0, t) = 0. \quad \tau \text{ hat auch hier die Bedeutung einer «mittleren Einzelwartezeit», } \sigma \text{ hingegen die des «mittleren Einzellaufwegs», der Quotient } \sigma/\tau \text{ einer «mittleren Reisegeschwindigkeit».$$

In welchem Masse die der skizzierten Theorie zugrunde liegenden Annahmen sich bewähren, kann natürlich in jedem Anwendungsfall nur die Erfahrung entscheiden. Ausser einem vorläufigen Einblick in die Abhängigkeit der beiden durch die

Theorie aus dem Wust der Beobachtungen herausgeschälten Kennwerte  $\sigma$  und  $\tau$  von den hydraulischen Bedingungen ist der — hier nicht näher zu erörternde — experimentelle Teil der Einstein'schen Arbeit diesem Vergleich der Hypothese mit der Wirklichkeit gewidmet.  
K. H. Grossmann.

**Kleinhaus in Holzbauweise**

Ergänzung zu den Ausführungen in Bd. 109, S. 158\* der «SBZ» (27. März 1937) Von OTTO SENN, Architekt, Basel

**Siedlerstelle.** Für die Untersuchung der Siedlungsmöglichkeiten kommen städtische Randgebiete und die ländliche Umgebung industrieller Niederlassungen in Frage. Es wird unterschieden, ob mit vollem Berufseinkommen der Siedler gerechnet werden kann, etwa der Stamarbeiter einer Industrie, oder nur mit unsicheren Verdienstmöglichkeiten. Für Familien mit voller Erwerbsmöglichkeit sind die Haustypen A, B, C, K (Typ K siehe Bd. 109, S. 158\*) berechnet. Auf das einzelne Haus entfällt ein Mindestaufwand an Bauland mit einer Gartenfläche von 200 bis 300 m<sup>2</sup>, die der Beschäftigung der Berufstätigen in der Freizeit genügt. Es sind ein kurzer Arbeitsweg und günstige Transportmöglichkeit vorauszusetzen und es ist mit entsprechend hohen Land- und Erschliessungskosten zu rechnen. Die Grösse des Baulandes wird auf das durch die Normen für die Bebauung bedingte Minimum festgesetzt. Vom eigentlichen Bauland ausgeschieden findet sich in der Nachbarschaft zusammenhängendes, für die Ueberbauung nicht zu erschliessendes Gelände, wo der Bedarf an Pachtland bei zeitweilig vermehrter gärtnerischer Betätigung gedeckt werden kann. Als bauliche Einheit kommt bei der vorgesehenen dichten Bebauung das Doppel- und das Viererhaus in Anwendung.

Die Siedlerstelle für Familien mit nur teilweisem Berufseinkommen, bei zeitweiser oder gänzlicher Arbeitslosigkeit des Mannes, ist im Rahmen der «Kleinsiedlung» nach Vorschlag von Prof. Bernhard untersucht. Bei einem Ausmass des Gartenlandes von 20 a ist es möglich, durch den Bodenertrag das Berufseinkommen wesentlich zu ergänzen. Derartige Vorhaben wollen typischen städtischen Verhältnissen gerecht werden, ihre Verwirklichung ist denkbar auf Gelände, dessen definitive Verwendung noch nicht festliegt, wie z. B. in die offene Landschaft vorgeschobenes Gebiet, dessen Einverleibung in den unmittelbaren Bereich der Stadt in absehbarer Zeit nicht zu erwarten ist. Oder auch Boden der öffentlichen Hand, dessen endgültige Zweckbestimmung durch die Aufteilung in Siedlerstellen, bei Abgabe der Parzellen mit Baurecht, nicht beeinflusst zu werden braucht. Bei der losen Bebauung, ausserhalb von bestehenden Baugebieten, können die städtischen Vorschriften über die Erschliessung gelockert werden. Ausschlaggebend für die Wahl des Siedlungsgeländes ist die gärtnerische Eignung des Bodens. Für die Ueberbauung ist das freistehende Einfamilienhaus und das Doppelhaus als flacher Erdgeschossbau vorgesehen (Haustypen D und F). Laube und Keller werden zu wichtigen Ergänzungen des eigentlichen Wohnbaues, deren Ausbau weitgehend topographischen Gegebenheiten und den Wünschen der einzelnen Bewohner Rechnung tragen soll.

Haustyp	Bauland m <sup>2</sup>	Baukubus m <sup>3</sup>	Schopf m <sup>3</sup>	Zimmer	Betten (normal)	Wohnfläche m <sup>2</sup>
A	299	236	30	4	6	61
B	317	263	30	4	6	68
C	283	197	30	3	5	51
K	240	232	—	3	5	59
D	2000	168	95	4	6	59

(mit Keller 238)

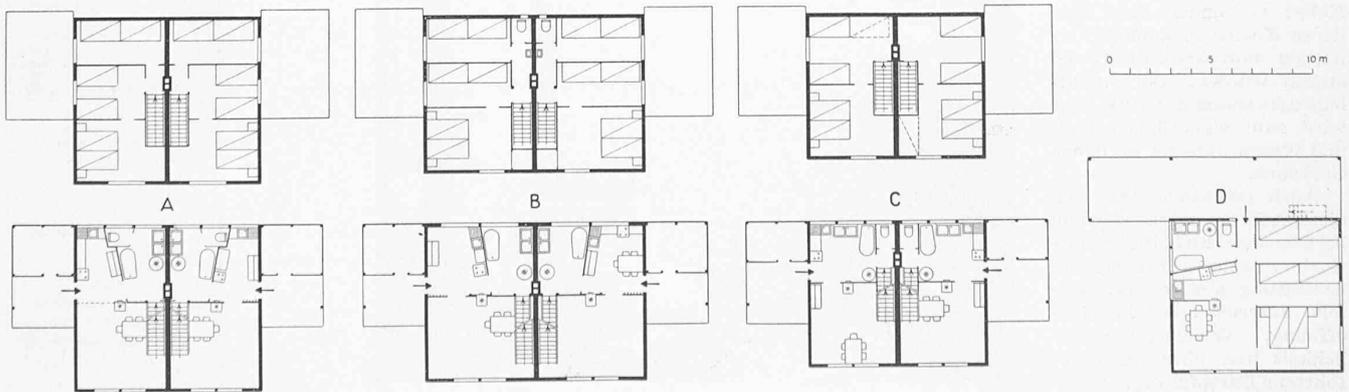


Abb. 1. Holzhaus-Typen A, B, C und D von Arch. OTTO SENN (Basel). Grundrisse vom Erdgeschoss und Obergeschoss. — Masstab 1 : 333

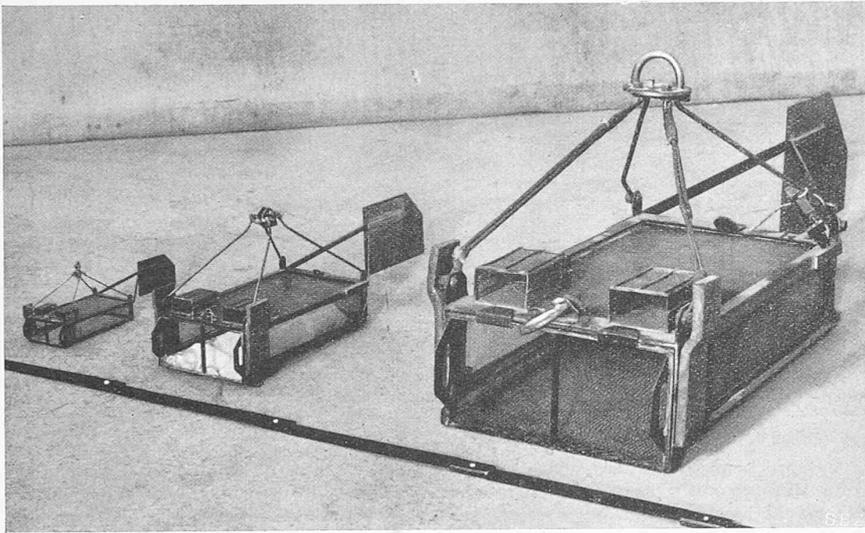


Abb. 51. Geschiebefänger-Modelle im Masstab 1 : 10 (links), 1 : 5 und 1 : 2,5 (rechts)

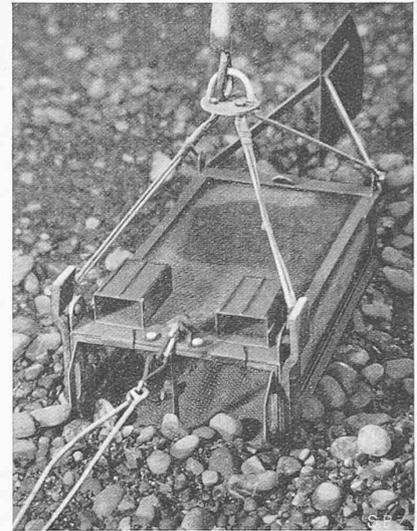


Abb. 52. Geschiebefänger-Modell 1 : 2,5

Beachten wir nun noch, dass die Versuche 4 und 8, bzw. 5, 6 und 7, bzw. 9, 10, 11 und 12 jeweils in Korn und Wassertiefe übereinstimmen, so konstatieren wir mit steigendem Trieb ein Ansteigen in der Gruppenordnung in der Art, dass bei kleinem Geschiebetrieb die Tendenz vorliegt, mehr grobe Geschiebe zu fangen und bei grossem Geschiebetrieb mehr feine. Wir können aber nicht angeben, bei welchem Geschiebetrieb z. B. eine Kurve der Gruppe 2 entsteht, da dieser wieder je nach Wassertiefe wechselt. Merkwürdig ist auch, dass alle Kurven mit Material  $0 \div 40$  mm auffallend gleichartig verlaufen.

Solange nicht mehr Versuche in dieser Richtung vorliegen, werden wir also darauf verzichten müssen, den Wirkungsgrad der angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Korn gefangen wird, für die einzelnen Korngrössen individuell anzugeben. Aus den stark wechselnden Formen dieser Kurven schliessen wir, dass die Analyse des gefangenen Materials gar nicht derjenigen des laufenden zu entsprechen braucht. Fängt man also z. B. am Rhein bei kleinen Mengen stets nur grobes Korn, während bei grösseren Mengen derselben Reihe auch die feinen Körner vertreten sind, so braucht das noch gar nicht zu heissen, dass im ersten Falle nur grobes Korn läuft. Vielmehr kann gerade bei kleinem Trieb entsprechend unseren Feststellungen eine Wirkungsgradkurve der Gruppe 1 vorliegen, die die groben Körner extrem bevorzugt, während wir dann bei grösserem Trieb in das Gebiet der Gruppe 2 oder sogar 3 geraten, wodurch die starke Häufung an feinem Material erklärlich würde.

Ein Vergleich der Versuche 9 und 10, die sich nur durch die Fangdauer unterscheiden, zeigt, dass diese auf den Wirkungsgrad keinen Einfluss hat. Wir müssen bei diesem Vergleich nur die grossen Fänger miteinander vergleichen, da die kleinen fehlerhaft sind, wie weiter unten noch nachgewiesen wird. Der

kleine Unterschied zwischen 46,8 und 49,3 % ist normale Schwankung und läuft zudem umgekehrt, als es einem Schürfen oder einer ähnlichen Anfangsfüllung entsprechen würde. — Interessant ist ferner, dass der Abflusszustand dieser beiden Versuche 9 und 10 (grosser Fänger), abgesehen von der gleichbleibenden Kanalbreite, dem des Versuches 7 (kleiner Fänger) ähnlich ist:

- Grosser Fänger : kleiner Fänger = 2 : 1
- Wassertiefe 9 und 10 : Wassertiefe 7 = 2 : 1
- Geschiebetrieb 9 und 10 : Geschiebetrieb 7 = 2,65 : 1, bzw. etwa  $2^{3/2} : 1$ . Somit gehören auch alle Kurven zu Gruppe 3.

Den früher angegebenen Wirkungsgraden der Versuche 9 und 10 steht bei Versuch 7 ein solcher von 39 % gegenüber. Besser stimmen die Versuche 5 und 11 überein, bei denen sich die Zahlen 45,6 und 45,3 % gegenüberstehen. Dafür stimmt aber in diesem Falle die Form der Kurven nicht, sodass wir also auch in der Uebertragung der Resultate von einem Masstab in den andern, insbesondere also in die Natur, gewisse Schwierigkeiten antreffen.

Um nun aber doch einen gewissen Begriff davon zu bekommen, welche der Eichversuche, insbesondere welche Gruppe in der Natur besonders wichtig ist, sind in dem Diagramm Abb. 54 die bei den verschiedenen Wassertiefen und Geschiebetrieben gefundenen Mittelwerte von  $n$  aufgetragen. Hierbei wurde der Geschiebetrieb und die Wassertiefe im Modellmasstab des jeweiligen Kornes aufgetragen. In diesem Diagramm sehen wir noch besser, wie bei gegebener Wassertiefe der Wirkungsgrad je nach Geschiebetrieb schwankt, sodass also bei Auswertung der Naturmessung innerhalb derselben Messung von Punkt zu Punkt ein anderer Wirkungsgrad wirksam wäre. Um diese Variation des Wirkungsgrades aber über den ganzen in Frage kommenden Bereich genügend genau zu erfassen, wäre eine Unzahl von Versuchen

nötig. Doch sind an den verschiedenen Stellen des Diagramms immer wieder ähnliche Zahlen zu treffen, sodass wir ohne prinzipiellen Fehler in dem ganzen Bereich mit einem mittleren Wirkungsgrad rechnen dürfen. Auf diese Weise erhalten wir wohl den Gesamtgeschiebetrieb genau (bei genügend langer Messdauer), die örtliche oder zeitliche Verteilung des Geschiebetriebes jedoch nur mit einer gewissen Annäherung. Um diesen mittleren Wirkungsgrad, der sich dann in Natur auf die Summe der Korngrössen von  $3,7 \div 100$  mm bezieht, also angibt, wieviel Prozent des laufenden Materials dieses Korngrössenbereiches gefangen werden,

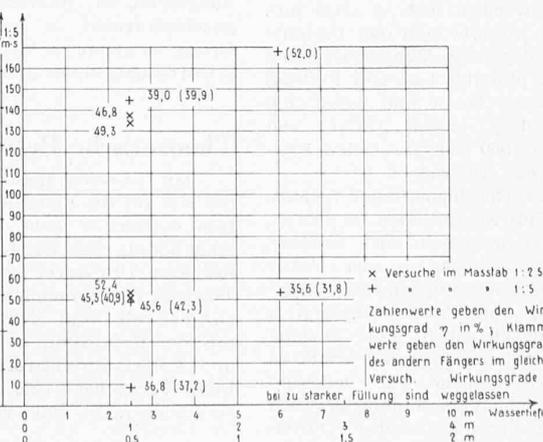
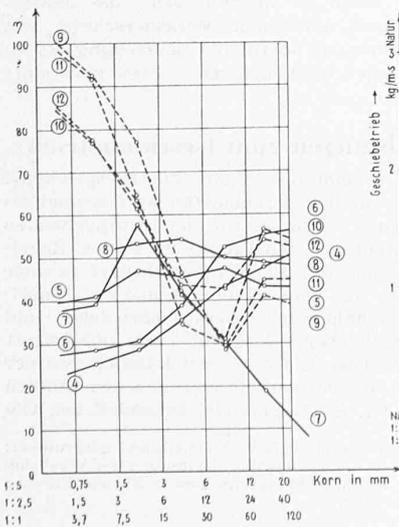


Abb. 54. Mittlere Wirkungsgrade des Fängers in Funktion der Wassertiefe und des Geschiebetriebes

Abb. 53 (links). Wirkungsgrade in Funktion der Korngrösse