Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie

Autor(en): **Hawranek, Alfred**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **109/110 (1937)**

Heft 13

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-49122

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie. — Wettbewerb für eine Schulhausanlage im Marzilimoos in Bern. — Die Internationale Rheinregulierung von der Illmündung bis zum Bodensee. — Vom Rheindelta in der Fussacher Bucht. — Von der Weltkraftkonferenz. — Mitteilungen: Grossräumige Salzlagerhalle in Holz. Schweiz. Pumpen und Turbinen für Aegypten. Der Lauf der Drehgestellradsätze in der Geraden. Führerkurse des psychotechn. Institutes Zürich. Betoninstruktionskurs. Wirtschaftliches Autofahren. Ortsbewegliche Kirchen. Die Storström-Brücke. Die Graphische Sammlung der E. T. H. — Nekrologe: Franz Köppel. Carl Strasser. — Wettbewerbe: Neue Pfarrkirche in Littau (Luzern). — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 110
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.
Nr. 13

Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie

Von Dr. Ing. ALFRED HAWRANEK, o. Prof. der Deutschen Technischen Hochschule Brünn

Die Herstellung von Eisenbeton-Bogenbrücken mit Hohlquerschnitt führt aus praktischen Gründen und wie Ausführungen beweisen, zur Betonierung des Bogens in mehreren Abschnitten. Es wird vorerst die untere Platte 1 bis 2 (Abb. 1) betoniert, dann erfolgt die Ausführung der Wände *W*, und schliesslich der oberen Platte 3 bis 4. Manchmal wurden auch mit der unteren Platte Teile der Wände gleichzeitig betoniert. Der für diese Arbeit bei grossen Spannweiten nötige, beträchtliche Zeitaufwand ist abhängig von der täglichen Leistung beim Betonieren (die etwa mit 100 m³/ Tag angenommen werden kann), von der Brückenbreite und von der Stützweite. Selbst wenn man die beim Bau auftretenden Streuungen der Betongüte, die etwa 15 bis 20 % ausmachen können, berücksichtigt, ergeben sich doch wegen des verschiedenen Alters des Betons in der unteren, bezw. oberen Platte verschiedene Elastizitätsziffern, die im geschlossenen Bogen für die weiteren Belastungen, für das Schwinden und für die plastische Verformung Aenderungen der statisch unbestimmten Grössen und damit der Momente und Normalkräfte gegenüber einer Rechnung mit konstantem *E*-Wert bedingen. Deshalb sollen die bezüglichen Gleichungen für die statisch unbestimmten Grössen nach der Elastizitätstheorie abgeleitet werden. Diese Untersuchungen werden besonders dann notwendig werden, wenn man anlässlich der Ausrüstung des Bogens, behufs besserer Verteilung der Grösstwerte der Spannungen, mit hydraulischen Pressen arbeitet.

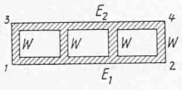


Abb. 1

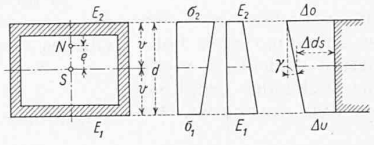


Abb. 2

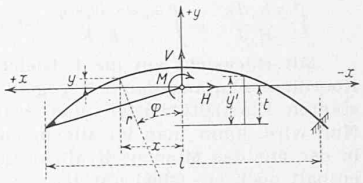


Abb. 3

I. Ableitung der allgemeinen Formeln

Allgemein soll angenommen werden, dass in irgend einem Bogenquerschnitt die untere Platte eine Elastizitätsziffer E_1, die obere E_2 besitzt. Dazwischen erfolge der Uebergang in den Wandteilen linear (Abb. 2). Sonst seien die E_1 und E_2 in den einzelnen Bogenquerschnitten beliebig angenommen, aber für symmetrisch gelegene Bogenpunkte in der gleichen Verteilung. σ_1 und σ_2 seien die Randspannungen und Δu, Δo die Faserverkürzungen durch die exzentrische Normalkraft N_x. Weiter wird angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben und im Bogen nur Druckspannungen, bezw. keine unzulässigen Zugspannungen im Beton auftreten. Eisenbetonbogen seien symmetrisch bewehrt. Dann sind die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x v}{J}, \quad \sigma_2 = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{J} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Verdrehung des Querschnittes sei $d\varphi$, wobei mit den Bezeichnungen der Abb. 2:

$$d\varphi = \frac{\Delta o - \Delta u}{2v} = \frac{ds}{2v}\left(\frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\sigma_1}{E_1}\right) =$$

$$= \frac{ds}{2v}\left[\frac{N_x}{F}\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right) + \frac{M_x v}{J}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\right] \quad . \quad (2)$$

Wir bezeichnen mit

$$k_1 = \frac{E_1}{E_2} + 1, \quad k_2 = \frac{E_1}{E_2} - 1, \quad k = \frac{k_2}{k_1} \quad . \quad . \quad (3)$$

dann ergibt sich

$$d\varphi = \frac{k_2\, ds}{2v E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{k J}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Verkürzung der Bogenaxe $\Delta ds = {}^1/_2\,(\Delta o + \Delta u)$ rechnet sich zu

$$\Delta ds = \frac{ds}{2}\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2}\right) = \frac{ds}{2E_1}\left[\frac{N_x}{F}\left(\frac{E_1}{E_2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{M_x v}{J}\left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right)\right] \text{ oder } \Delta ds = \frac{k_1\, ds}{2E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J}\right] \quad (5)$$

Ausserdem wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta dx &= \Delta ds \cos\varphi \\ \Delta dy &= \Delta ds \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir behandeln einen *symmetrischen, eingespannten Bogen.* Der Koordinatenanfangspunkt wird in den elastischen Schwerpunkt verlegt, die positiven Axrichtungen sind für x nach links, für y nach oben angenommen (Abb. 3).

Die Verschiebung Δl eines Elementes in der Richtung der x-Axe ist

$$\Delta l = y\, d\varphi - \Delta ds \cos\varphi + \alpha t\, ds \cos\varphi.$$

Für unverschiebliche Widerlager ist

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{y k_2\, ds}{2v E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{kJ}\right] - \\ &\quad - \int \frac{k_1\, ds \cos\varphi}{2E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J}\right] + \alpha t l = 0 \end{aligned}\right.$$

Die Verschiebung in der Richtung der y-Axe wird

$$\Delta v = -x\, d\varphi + \Delta ds \sin\varphi - \alpha t\, ds \sin\varphi, \text{ daraus}$$

$$\left.\begin{aligned} &2. \quad -\int \frac{x k_2\, ds}{2v E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{kJ}\right] + \\ &\quad + \int \frac{k_1\, ds \sin\varphi}{2E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J}\right] = 0 \end{aligned}\right. \quad (7)$$

die Verdrehung

$$\left.\begin{aligned} &3. \quad \int \frac{k_2\, ds}{2v E_1}\left[\frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{kJ}\right] = 0 \end{aligned}\right.$$

Alle Integrale sind über die ganze Bogenlänge auszudehnen.

Die drei im elastischen Schwerpunkt angreifenden statisch unbestimmten Grössen sind H, V, M. Das statisch bestimmte Grundsystem ist der nur im rechten Kämpfer eingespannte Freiträger.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Das Moment } M_x = \mathfrak{M}_x + M - Hy - Vx \\ &\text{Die Normalkraft } N_x = H\cos\varphi + Q_x \sin\varphi \\ &\text{wobei die lotrechte Querkraft } Q_x = V + \mathfrak{Q}_x = V - \sum_x^{\frac{l}{2}} G \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Mit diesen Werten erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &1.\ H\left[\int \frac{y^2 k_1\, ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v\, ds \cos\varphi}{E_1 J} - \int \frac{y k_2\, ds \cos\varphi}{v E_1 F} + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{k_1\, ds \cos^2\varphi}{E_1 F}\right] = \int \frac{\mathfrak{M}_x y k_1\, ds}{E_1 J} - \int \frac{\mathfrak{M}_x k_2 v\, ds \cos\varphi}{E_1 J} + \\ &\quad + \int \frac{\mathfrak{Q}_x y k_2\, ds \sin\varphi}{v E_1 F} - \int \frac{\mathfrak{Q}_x k_1\, ds \sin\varphi\cos\varphi}{E_1 F} + 2\alpha t l \\ &2.\ V\left[\int \frac{x^2 k_1\, ds}{E_1 J} + \int \frac{k_1\, ds \sin^2\varphi}{E_1 F}\right] = \int \frac{\mathfrak{M}_x x k_1\, ds}{E_1 J} - \\ &\quad - \int \frac{\mathfrak{M}_x k_2 v\, ds \sin\varphi}{E_1 J} + \int \frac{\mathfrak{Q}_x x k_2\, ds \sin\varphi}{v E_1 F} - \int \frac{\mathfrak{Q}_x k_1\, ds \sin^2\varphi}{E_1 F} \\ &3.\ M \int \frac{k_1\, ds}{E_1 J} = -\int \frac{\mathfrak{M}_x k_1\, ds}{E_1 J} + \\ &\quad + H\left[\int \frac{y k_1\, ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2\, ds \cos\varphi}{v E_1 F}\right] - \int \frac{\mathfrak{Q}_x k_2\, ds \sin\varphi}{v E_1 F} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

In diesen Gleichungen wurden schon mit Rücksicht auf das gewählte Koordinatensystem jene Glieder gestrichen, deren Faktoren Null sind, und zwar:

in Gl. 1 herrührend von M:

$$\int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J} = 0$$

in Gl. 1 herrührend von V:

$$-\int \frac{x y k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{x k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J} + \int \frac{y k_2 ds \sin\varphi}{v E_1 F} - \int \frac{k_1 ds \sin\varphi \cos\varphi}{E_1 F} = 0$$

in Gl. 2 herrührend von M:

$$-\int \frac{x k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_2 v ds \sin\varphi}{E_1 J} = 0$$

in Gl. 2 herrührend von H:

$$+\int \frac{x y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v ds \sin\varphi}{E_1 J} - \int \frac{x k_2 ds \cos\varphi}{v E_1 F} + \int \frac{k_1 ds \sin\varphi \cos\varphi}{E_1 F} = 0$$

in Gl. 3 herrührend von V:

$$-\int \frac{x k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_2 ds \sin\varphi}{v E_1 F} = 0$$

in Gl. 3 herrührend von H:

$$\int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos\varphi}{v E_1 F} \text{ ist nicht gleich Null.}$$

(10)

Mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (10) verschiebt sich der Koordinatenanfangspunkt O gegenüber der Annahme einer konstanten Elastizitätsziffer, und weil die letzte Gleichung nicht Null wird, kann man im allgemeinen keine Gleichung erhalten, in der nur das Moment M allein als Unbekannte vorkommt. Sie enthält noch ein Glied mit H.

Um die Lage des elastischen Schwerpunktes zu bestimmen, wird die erste Gleichung (10) herangezogen, die umgeformt wird.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 3 ergibt sich $y = y' - t$, sodass diese Gleichung in der Form erscheint

$$\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - t \int \frac{k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J} = 0$$

und daraus der Abstand t des elastischen Schwerpunktes von der Kämpfersehne:

$$t = \frac{\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}} \quad \ldots \quad (11)$$

Unter Beachtung der Gleichung (10) erhalten wir die drei Gleichungen zur Bestimmung der statisch unbestimmten Grössen

$$H = \frac{\int \frac{\mathfrak{M}x\, y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{\mathfrak{M}x\, k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J} + \int \frac{\mathfrak{Q}x\, y k_1 ds \sin\varphi}{v E_1 F} - \int \frac{\mathfrak{Q}x\, k_1 ds \sin\varphi \cos\varphi}{E_1 F} + 2\alpha t l}{\int \frac{y^2 k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v ds \cos\varphi}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 ds \cos\varphi}{v E_1 F} + \int \frac{k_1 ds \cos^2\varphi}{E_1 F}}$$

$$V = \frac{\int \frac{\mathfrak{M}x\, x k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{\mathfrak{M}x\, k_2 v ds \sin\varphi}{E_1 J} + \int \frac{\mathfrak{Q}x\, x k_2 ds \sin\varphi}{v E_1 F} - \int \frac{\mathfrak{Q}x\, k_1 ds \sin^2\varphi}{E_1 F}}{\int \frac{x^2 k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_1 ds \sin^2\varphi}{E_1 F}}$$

$$M = -\frac{\int \frac{\mathfrak{M}x\, k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{\mathfrak{Q}x\, k_2 ds \sin\varphi}{v E_1 F}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}} + H \frac{\int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos\varphi}{v E_1 F}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}}$$

(12)

Für eine symmetrische Form des Bogens und symmetrische Belastungen verschwindet der Zählerausdruck von V und damit wird $V = 0$.

In diesen Gleichungen wurden die Grössen E_1, k_1, k_2, v, J, F als in jedem Querschnitt veränderliche Werte unter dem Integralzeichen belassen; sie gelten sowohl für einen Voll-, als auch für einen Hohlquerschnitt des Bogens, und *ganz allgemein* sind sie auch für das *Schwinden* und mit einer Abänderung für eine *plastische Verformung* zu gebrauchen. Alle besonderen Fälle lassen sich aus den Formeln (12) ableiten.

Mit Rücksicht auf die Gesetzmässigkeit des Arbeitsfortschrittes bei kontinuierlich durchgeführter Betonierung der Hohlquerschnitte könnte man auch in den Bogenquerschnitten die Differenz $E_1 - E_2 = c =$ konstant annehmen, sodass $E_1 = c + E_2$ wird.

Dann sind

$$k_1 = \frac{c + 2E_2}{E_2}, \quad k_2 = \frac{c}{E_2}, \quad k = \frac{c}{c + 2E_2} \quad \ldots \quad (13)$$

E_2 kann dabei veränderlich bleiben.

Werden bei kurzer Arbeitszeit für die untere und die obere Schale über den ganzen Bogen geltende *konstante* Mittelwerte E_1 und E_2 angenommen, also $E_1 = c_1 E_2$, so sind

$$k_1 = c_1 + 1, \quad k_2 = c_1 - 1, \quad k = \frac{c_1 - 1}{c_1 + 1} \quad \ldots \quad (14)$$

durchweg konstant und

$$t = \frac{\int \frac{y' ds}{J} - k \int \frac{v ds \cos\varphi}{J}}{\int \frac{ds}{J}} \quad \ldots \quad (15)$$

Die bezüglichen Formeln werden durch Einsetzen von (13) bezw. (14) in Gleichung (12) ohne weiteres gewonnen. Für den speziellen Fall Gl. (14) sind die Endformeln bereits in einer Abhandlung des Verfassers angegeben[1]).

Nach den hier gegebenen allgemeinen Formeln (12) lässt sich auch jede *beliebige Reihenfolge der Betonierungsabschnitte* des Bogens berücksichtigen, die zur Herabsetzung der Schwindwirkung vorgesehen wird, ebenso lassen sich auch für die Schwindfugen, die zum Schluss ausbetoniert werden, ihre zu erwartenden E-Werte in Rechnung stellen. Kurz, es kann jeder beliebige systematische Arbeitsvorgang, der keine kontinuierliche Betonierung vorsieht, wie etwa der beim Bau der *Traneberg-Brücke*[2]) eingeschlagene, in Rechnung gezogen werden.

II. Wärmewirkung

In diesem Falle ist $\mathfrak{M}x = 0$, $\mathfrak{Q}x = 0$. Bezeichnet man den Nennerausdruck des H in Gl. 12 mit N_1 und jenen des zweiten Gliedes von M mit N_3, und dessen Zähler mit Z_3, so wird $V = 0$,

$$H_t = \pm \frac{2\alpha t l}{N_1}, \quad M_t = H \frac{Z_3}{N_3} \quad \ldots \quad (16)$$

Das Moment M_x wird dann

$$M_x = -H_t y + M_t = H_t \left(-y + \frac{Z_3}{N_3}\right) = -H_t y_1$$

Die H_t-Kraft greift demnach nicht im elastischen Schwerpunkt, sondern um das Mass $\frac{Z_3}{N_3}$ höher an. Der Abstand t_1 der H_t-Kraft von der Kämpfersehne ist also

$$t_1 = t + \frac{Z_3}{N_3} \quad \ldots \quad (17)$$

und unter Beachtung der ersten Gleichung in (10)

$$t_1 = \frac{\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos\varphi}{v E_1 F}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}} \quad \ldots \quad (18)$$

Mit diesem Abstand von H_t bleibt der Horizontalschub als einzige statisch unbestimmte Grösse übrig.

III. Schwinden und spannungsauslösende plastische Verformung

Es ist auch möglich bei einem Bogen, dessen Leibungen verschiedene Elastizitätsziffern E_1 und E_2 aufweisen, ein über den Querschnitt beliebig verteiltes Schwindmass und ein ebensolches Mass der plastischen Verformung zu berücksichtigen. Dabei kann auch dem Umstand Rechnung getragen werden, dass die plastische Verformung, soweit sie sich nicht *rein plastisch* auswirkt, von der jeweiligen Druckspannung in den Bogenpunkten abhängig ist.

In einer frühern Abhandlung[3]) hat der Verfasser auf Grund der Auswertung von Versuchen mit Eisenbetonsäulen bei Dauerbelastung nachgewiesen, dass die gemessenen Spannungen infolge der plastischen Verformung einem kleineren ideellen Formänderungswert E' des Betons gehorchen als dieser wirklich aufweist. Als Folge davon kann sich in einer Eisenbeton-Bogenbrücke die plastische Verformung nicht spannungslos äussern.

Es lässt sich die Rechnung für die plastische Verformung deshalb auf den tatsächlich vorhandenen Formänderungswert E_b des Betons beziehen, wenn man ein grösseres Verhältnis $m = \frac{E_e}{E'}$ einführt, das je nach dem Alter des Betons bis über 40 ansteigen kann.

Ist der Bogen nach der Stützlinie für das Eigengewicht geformt und nimmt man für ihn ein durchwegs konstantes E_b an, so wird man auch das plastische Verformungsmass ε_p über den ganzen Querschnitt gleichmässig annehmen können, sodass sich bei einer Bewehrung von $\mu\,\%$ die spezifische Verkürzung eines Bogenelementes zu $\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{1 + m\mu}$ ergibt, während für das Schwinden mit dem Schwindmass ε_s der Wert $\varepsilon = \frac{\varepsilon_s}{1 + n\mu}$ wird.

---

[1]) Dr. Ing. *A. Hawranek:* «Weitgespannte Eisenbeton-Bogenbrücken», Vorbericht des Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau IV b, Berlin 1936, S. 799, bezw. 822.

[2]) Siehe «SBZ», Bd. 102, S. 301* (16. Dez. 1933). Red.

[3]) *A. Hawranek:* Zur Frage des Baues weitgespannter Eisenbeton-Bogenbrücken mit besonderer Berücksichtigung der Plastizität des Betons. «Beton und Eisen» 1937, S. 29.

Im folgenden soll auch die plastische Formänderung als Funktion der vom Eigengewicht herrührenden, also vorhandenen Betonspannung σ eingeführt und zwar soll sie proportional dem σ angenommen werden, $\varepsilon_p = p\,\sigma$. Dieser Ansatz ist durch Versuche von Gehler und Amos[4]) begründet, bei denen für einen dreifachen Spannungswert die plastische Formänderungsziffer nahezu den dreifachen Formänderungswert ergab, und zwar ziemlich gleichbleibend für verschiedene Alter des Versuchskörpers (siehe Bild 12 der angegebenen Quelle).

Ist ein Bogen hinsichtlich der spannungsauslösenden plastischen Verformung zu untersuchen, so wird man am besten die Berechnung für eine bestimmte Zeit nach dem Bogenschluss mit den bezüglichen tatsächlichen Verformungsmassen durchführen. Deshalb unterbleibt hier die Einführung der Zeitfunktion, deren gesetzmässige Aenderung für ein Bauwerk schwer genau feststellbar ist und die ausserdem die Integrationen wesentlich erschwert.

Wir behandeln nun im folgenden die gemeinsame Wirkung des *Eigengewichtes, des Schwindens und der plastischen Verformung* und nehmen an, dass der Bogen für das Eigengewicht bereits berechnet ist und die Spannungen σ bekannt sind. Es bedeuten:

σ', σ'' die Betonspannungen am untern bezw. obern Rande eines Bogenquerschnittes für Eigengewicht;

σ_1, σ_2 die endgültigen Spannungen für Eigengewicht, Schwinden und plastische Verformung, unten bezw. oben;

ε_1, ε_2 die gesamten spezifischen Längenänderungen der Randfasern eines Querschnittes, unten bezw. oben;

p_1, p_2 die Proportionalbeiwerte der plastischen Formänderungsmasse (auf die Spannungseinheit reduzierte plastische Verformungsmasse);

ε_s', ε_s'' die Schwindmasse der untern bezw. obern Randfaser;

E_1, E_2 die bezüglichen tatsächlichen Elastizitätsziffern des Betons unten bezw. oben;

E_1', E_2' die bezüglichen ideellen Elastizitätsziffern des Betons, die für die Berechnung der Wirkung der plastischen Verformung massgebend sind;

E die Elastizitätsziffer des Stahls;

$$n_1 = \frac{E}{E_1}, \qquad n_2 = \frac{E}{E_2}$$
$$m_1 = \frac{E}{E_1'}, \qquad m_2 = \frac{E}{E_2'}$$

Alle Spannungen sind als Druck positiv bezeichnet.

Unter der Annahme der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes lässt sich bei symmetrischer Bewehrung für die Betonspannungen folgender Ansatz machen: In der untern Randfaser setzt sich die Betonspannung σ_1 für die gemeinsame Wirkung zusammen aus der Spannung σ' für Eigengewicht und den hinzukommenden Anteilen von Schwinden und der plastischen Verformung. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma' + \frac{\varepsilon_s'}{1 + n_1\mu}\,\mu E + \frac{p_1\,\sigma'}{1 + m_1\mu}\,\mu E \\ \text{in der obern Randfaser} \\ \sigma_2 &= \sigma'' + \frac{\varepsilon_s''}{1 + n_2\mu}\,\mu E + \frac{p_2\,\sigma''}{1 + m_2\mu}\,\mu E \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Die spezifischen Verkürzungen der Randfasern sind nach Division durch E_1 bezw. E_2

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma'}{E_1} + \frac{\varepsilon_s' n_1\mu}{1 + n_1\mu} + \frac{p_1\,\sigma' n_1\mu}{1 + m_1\mu} = \frac{\sigma'}{E_1} + a_1 + b_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma''}{E_2} + \frac{\varepsilon_s'' n_2\mu}{1 + n_2\mu} + \frac{p_2\,\sigma'' n_2\mu}{1 + m_2\mu} = \frac{\sigma''}{E_2} + a_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Dabei wurden die zweiten und dritten Glieder mit a und b mit entsprechenden Zeigern bezeichnet.

Bezeichnen für die Eigengewichtswirkung $\Delta ds'$, $\Delta u'$, $\Delta o'$ die Verkürzungen der Bogenelemente im Schwerpunkt, bezw. an der untern, bezw. obern Faser, und $d\varphi'$ die Winkeländerung, so werden die Gesamtverkürzungun Δu, Δo der untern bezw. obern Faser

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \varepsilon_1\,ds = \Delta u'\,ds + (a_1 + b_1)\,ds \\ \Delta o &= \varepsilon_2\,ds = \Delta o'\,ds + (a_2 + b_2)\,ds \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

und mit $\Delta ds''$, $d\varphi''$, der Bogenverkürzung in der Stabaxe, bezw. Winkeländerung infolge Schwindens und der plastischen Verformung, erhält man für die Gesamtwirkung

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= d\varphi' + d\varphi'' = \frac{\Delta o - \Delta u}{2v} = \\ &= \frac{ds}{2v}\left[(\Delta o' - \Delta u') + (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)\right] = d\varphi' + \frac{ds}{2v}\varepsilon' \\ \Delta ds &= \Delta ds' + \Delta ds'' = \frac{\Delta o + \Delta u}{2} = \\ &= \frac{ds}{2}\left[(\Delta o' + \Delta u') + (a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)\right] = \Delta ds' + \frac{ds}{2}\varepsilon' \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) \\ \varepsilon'' &= (a_2 + b_2) + (a_1 + b_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Einschliesslich der Eigengewichtswirkung erhält man die waagrechten Verschiebungen Δl

$$\Delta l = y\,(d\varphi' + d\varphi'') - (\Delta ds' + \Delta ds'')\cos\varphi$$

und weil bei symmetrischer Bauart des Bogens für den vorliegenden Fall der Gesamtwirkung $V' = 0$, aus den beiden Gleichungen

$$\int \Delta l = 0 \qquad \int (d\varphi' + d\varphi'') = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (24)$$

die beiden statisch unbestimmten Grössen

$$H' = H + H_\varepsilon \qquad M' = M + M_\varepsilon,$$

wobei H, M vom Eigengewicht, H_ε, M_ε vom Schwinden und der plastischen Verformung herrühren.

Der Rechnungsgang ist nun weiter der gleiche wie der eingangs gezeigte.

Man kann auch die Berechnung für das Schwinden und die plastische Verformung allein durchführen. Mit den schon gebrauchten Bezeichnungen N_1, Z_3, N_3 ergeben sich dann die drei statisch unbestimmten Grössen H_ε, V_ε, M_ε für das Schwinden und die plastische Verformung

$$\left.\begin{aligned} H_\varepsilon &= \frac{\int \frac{y\,\varepsilon'\,ds}{v} - \int \varepsilon''\,ds\cos\varphi}{N_1} \\ V_\varepsilon &= 0 \\ M_\varepsilon &= -\frac{\int \frac{\varepsilon'\,ds}{v}}{N_3} + H_\varepsilon\frac{Z_3}{N_3} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

und die Momente M_x

$$M_x = -H_\varepsilon\,y + M_\varepsilon = H_\varepsilon\left(-y + \frac{Z_3}{N_3}\right) - \frac{Z_\varepsilon}{N_3} \quad . \quad (26)$$

wobei

$$Z_\varepsilon = \int \frac{\varepsilon'\,ds}{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

oder umgeformt

$$M_x = \frac{1}{N_3}\left[H_\varepsilon\,(-\,y\,N_3 + Z_3) - Z_\varepsilon\right] \quad . \; . \; . \quad (26a)$$

Die Randformänderungsgrössen ε', ε'' sind für jeden Bogenquerschnitt verschieden und vorerst zu ermitteln. Nimmt man für das Schwinden und für die plastische Verformung für den ganzen Bogen konstante Werte an und ausserdem $E_1 = E_2$, so wird

$a_1 = a_2$, $a_2 - a_1 = 0$, $b_1 = b_2$, $b_2 - b_1 = 0$, und es wird $d\varphi'' = 0$, $\varepsilon' = 0$.

Auch die Integrale der Gl. (25), die ε' enthalten, werden Null, ebenso $M_\varepsilon = 0$, sodass dann

$$H_\varepsilon = -\frac{\varepsilon''\,l}{N_1},$$

wobei in N_1 die von den verschiedenen E-Werten herrührenden Glieder gestrichen werden können, da dann $k_2 = 0$, $k = 0$ ist und $k_1 = 2$.

Die Grössen a_1, a_2, b_1, b_2 müssen aus den bezüglichen Versuchswerten für den verwendeten Beton abgeleitet werden.

Bei der Bestimmung der Spannungen ist auf das Vorzeichen Rücksicht zu nehmen. Die Werte n_1, n_2 sind in den einzelnen Bogenquerschnitten aus den bezüglichen Elastizitätswerten des Betons zu errechnen, die der Bogen nach einer bestimmten Zeit nach der Fertigstellung des Bogens hat, wie dies unten im Beispiel gezeigt wird.

Die Grössen m_1, m_2 lassen sich für die verstrichene Zeit nach Ausschalung des Bogens aus Versuchen berechnen, wie dies in der Quelle (Fussnote 1) geschehen ist. Für den Bau grosser Bogenbrücken, an die hier vornehmlich gedacht ist, wird es zweckmässiger sein, die bezüglichen Werte aus besondern Versuchen zu ermitteln. Werden diese rechtzeitig vor Baubeginn eingeleitet, so kann man noch zeitgerecht die Ergebnisse heranziehen, wobei man neben den Elastizitätsziffern auch die wirklichen Werte für ε_s und p für die verwendete Betongattung ermitteln kann.

[4]) *W. Gehler* und *H. Amos:* Versuche über Elastizität, Plastizität und Schwinden von Beton. «Deutscher Ausschuss für Eisenbeton», Heft 78.

Um aber schon beim Entwurf mit den nötigen, aber angenäherten Zahlenwerten für die plastische Verformung rechnen zu können, liessen sich die Idealkurven von *Whitney* heranziehen; auch die Versuche von *Gehler* und *Amos* geben genügend Anhaltspunkte für eine Vorberechnung, die dann mit den wirklichen Werten kontrolliert werden kann.

Selbstverständlich lässt sich die Rechnung auch für die Höchstwerte des Schwindens und der plastischen Verformung in gleicher Weise durchführen.

IV. Beispiel

Als Beispiel wurde ein Bogen von 400 m Spannweite und 100 m Pfeilhöhe gewählt (Abb. 4), wie er in der Abhandlung lt. Fussnote 1 beschrieben worden ist. Der Bogen hat aus dort angeführten Gründen einen konstanten Querschnitt $F = 39{,}1$ m², $J = 175{,}5$ m⁴; seine Bogenaxe ist nach der Stützlinie für das Eigengewicht des Bogens geformt. Im weitern Verlaufe der Berechnung wurde das in Abb. 3 gegebene Axenkreuz belassen.

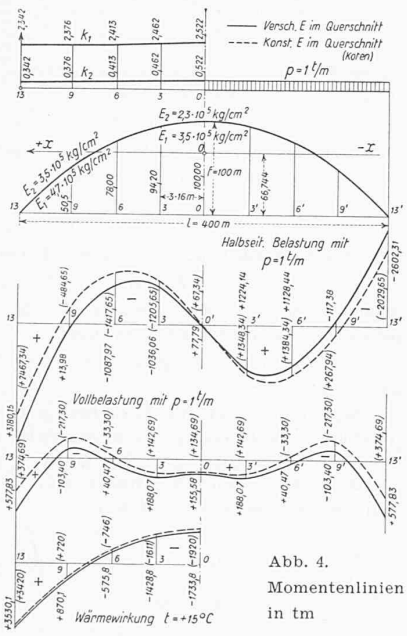


Abb. 4. Momentenlinien in tm

Entsprechend dem Arbeitsvorgang bei der Herstellung eines so grossen Bogens mit einem Hohlquerschnitt und dem erforderlichen Zeitaufwand wurde für die vorerst betonierte *untere* Platte im Kämpfer eine Elastizitätsziffer des Betons von $E_1 = 470\,000$ kg/m², im Scheitel von $E_1 = 350\,000$ kg/cm² angenommen und entsprechend der Fortsetzung der Betonierung für die *obere* Platte des Hohlquerschnittes im Kämpfer $E_2 = 350\,000$ kg/cm², im Scheitel $E_2 = 230\,000$ kg/cm². Dazwischen wurde in den 13 Teilbogenstücken einer Bogenhälfte die Elastizitätsziffer linear veränderlich angenommen. Diese Annahmen entsprechen den voraussichtlichen Elastizitätsziffern der einzelnen Teile des geschlossenen Bogens.

Dabei ergeben sich die in Abb. 4 eingetragenen veränderlichen Werte von k_1 und k_2 und nach Gl. (11) der Abstand t des elastischen Schwerpunktes von der Kämpfersehne $t = 66{,}744$ m, gegenüber $t = 64{,}548$ m für einen konstanten E-Wert. Er liegt also im vorliegenden Falle höher.

Um über die Grösse der Momente ein Urteil zu gewinnen, wurde der Bogen nach den hier abgeleiteten Formeln für eine *halbseitige Belastung* $p = 1$ t m in der rechten Bogenhälfte genau berechnet.

Die drei statisch unbestimmten Grössen ergeben sich zu
$H = +\ 102{,}111$ t (gegenüber 101,304 t für $E =$ konst.) $\Delta = +\ 1$ %
$V = +\ 35{,}544$ t (gegenüber 38,597 t für $E =$ konst.) $\Delta = -\ 7{,}9$ %
$M = +\ 3473{,}59$ tm (gegenüber 3707,34 tm für $E =$ konst.) $\Delta = -\ 6{,}3$ %

Die Momente M_x für veränderliche E und M_x' für ein durchwegs konstantes E ergeben sich aus nachstehender Tabelle:

Momentwerte für eine halbseitige Belastung mit $p = 1$ t/m

Punkt	M_x E veränderlich	M_x' E konstant	$M = M_x - M_x'$	Δ in %
13	+ 3180,15 tm	+ 2467,35 tm	+ 712,80 tm	+ 28,9
9	+ 13,99 „	— 484,65 „		
6	— 1087,87 „	— 1417,65 „	— 329,68 „	— 23,2
3	— 1036,07 „	— 1205,65 „	— 169,58 „	— 14,1
0	+ 77,79 „	+ 67,35 „	+ 10,44 „	+ 15,3
3′	+ 1224,14 „	+ 1348,35 „	— 124,21 „	— 9,2
6′	+ 1128,45 „	+ 1384,35 „	— 255,90 „	— 18,5
9′	— 117,39 „	+ 267,35 „		
13′	— 2602,31 „	— 2092,65 „	— 509,66 „	+ 24,4

Die M_x-Werte sind in der Abb. 4 eingetragen, wobei die M_x-Linie voll ausgezogen, die M_x'-Linie gestrichelt ist.

Die Unterschiede sind also ziemlich erheblich, besonders an den Einspannstellen, wobei die genaue Rechnung dort um 28,9 % bezw. 24,4 % *grössere* Werte für diesen Belastungsfall ergibt als für die übliche mit konstantem E. Auch im Scheitel erhält man nach der genauen Rechnung um 15 % grössere Momente M_x.

Deshalb ergeben sich auch bei *Vollbelastung* mit $p = 1$ t/m die Einspannungsmomente in den Kämpfern für die genaue Rechnung mit veränderlichem E grösser als für konstantes E. Es ist $M_x = 577{,}835$ tm gegenüber $M_x' = 374{,}696$ tm. Im ersten Fall ist also M_x um 54 % grösser, wenn auch die absoluten Werte nicht bedeutend sind.

Ebenso sind für das Eigengewicht des Bogens die Einspannungsmomente in den Kämpfern *grösser*, sodass es sich empfiehlt, bei einer Behandlung des Bogens behufs Ausgleiches der Momente durch Anwendung hydraulischer Pressen vor dem Bogenschluss auf die hier gegebene schärfere Berechnung Rücksicht zu nehmen, umsomehr als nach einem erfolgten Momentenausgleich immer in den Kämpfern noch die grössten Momentenwerte auftreten.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Momente im Bogen mit der Zeit ändern, wenn nach dem Bogenschluss die Elastizitätsziffern in allen Bogenteilen grösser werden.

Die Momente bleiben nur dann im weiteren Verlaufe der Zeit konstant (wenn wir die Schwindwirkung nicht berücksichtigen und nur die Belastung im Auge behalten), wenn sowohl E_1 als auch E_2 sich proportional ändern würden, sodass die neuen Werte $E_1' = \nu E_1$ und $E_2' = \nu E_2$ wären. Dies ergibt sich aus Gl. (3). Eine andere gesetzmässige Aenderung der E-Werte ändert die Momente. Es ist also dann eine neue Rechnung erforderlich.

Die *Wärmewirkung* wurde für eine Zunahme um $t = 15°$ C berechnet. Es ergab sich $H_t = \dfrac{2\,\alpha\,t\,l}{N_1} = 52{,}559$ t (gegen $H_t = 53{,}3$ t) $M_t = +\ 16{,}14$ tm.

Die Momente M_x lassen sich aus der Formel $M_x = -\ H_t\,y + M_t$ berechnen. Die Momente sind in der folgenden Tabelle angegeben und zwar M_x für veränderliche E, M_x' für ein konstantes E und der Unterschied ΔM in % (Abb. 4).

Momente infolge einer Wärmezunahme um 15° C

Punkt	M_x E veränderlich	M_x' E konstant	$\Delta\ M_x$ in %
13	+ 3530,14 tm	+ 3420 tm	+ 3,2
9	+ 870,14 „	+ 720 „	+ 20,9
6	— 575,86 „	— 746 „	— 22,8
3	— 1428,86 „	— 1611 „	— 11,3
0	— 1733,86 „	— 1920 „	— 9,7

Die Untersuchungen sind hier allgemeiner gehalten als die vom Verfasser anlässlich des Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau in Berlin, Oktober 1936, vorgetragenen.

Die zahlenmässige Ausrechnung hat mein Assistent Ing. Erich Haulena in dankenswerter Weise durchgeführt.

*

Als wesentliches **Ergebnis** der Untersuchungen, die vornehmlich für grosse Bogenbrücken gedacht sind, wäre die Erhöhung der Momente und der Spannungen in den Kämpfern hervorzuheben, die die schärfere, der Wirklichkeit näher kommende Berechnung ergibt, gegenüber der üblichen Berechnung mit einer konstanten Elastizitätsziffer des Betons. Die Unterschiede sind, wie das Beispiel gezeigt hat, nicht klein.

Bei dem Bestreben, die zulässigen Spannungen im Beton zu erhöhen und die Abmessungen geringer zu halten, gewinnen die Untersuchungen an Bedeutung.

Wettbewerb für eine Schulhausanlage im Marzilimoos in Bern

Ueber Lage und Konfiguration des Baugeländes geben die Modellphotos, sowie der Lageplan S. 157 Auskunft. Die Anordnung der Bauten hat einen etappenweisen Ausbau zu ermöglichen wie folgt. *1. Etappe:* Kindergartenabteilung (3 Räume und Spielplatz) und Seminarübungs-Schule (6 Zimmer und Pausenplatz) nebst einem Werkunterrichtsraum, Leiterinzimmer, Abwartwohnung und Heizung usw., sowie eine Turnhalle mit Rasensportplatz. *2. Etappe:* Seminar- und Fortbildungsabteilung mit zusammen 11 Unterrichtszimmern, 2 Sammlungsräumen, Singsaal, Zeichensaal, Schulküche mit ihren Nebenräumen, je ein Vorsteher-, Lehrer-, Lese-, Bibliothekzimmer, sowie verschiedene kleinere Räume und ein Schulgarten. Der von den Schulbauten nicht beanspruchte Teil des an die Flussbäder der Aare stossenden Geländes soll zu öffentlichen Spielwiesen gemacht werden.