Zur Berechnung der Fliehkraftarbeit beim Problem der Scheibenschwingungen

Autor(en): **Malkin, I.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **107/108 (1936)**

Heft 7

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48247

Band 107 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 7

Zur Berechnung der Fliehkraftarbeit beim Problem der Scheibenschwingungen.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, Philadelphia, Pa.

1. *Einleitung.* Bei der Berechnung des Einflusses, den die Fliehkräfte auf die Eigenfrequenzen der Querschwingungen der rotierenden Scheibe ausüben, hat sich in der Literatur eine eigenartige Schwierigkeit ergeben, die hier geklärt werden soll. An sich sind nämlich für die Ermittlung der Fliehkraftarbeit zwei Wege denkbar; bei dem einen bilden die Fliehkräfte selbst den Ausgangspunkt, beim andern dagegen die Spannungen, die jene in der Scheibe hervorrufen. Die beiden Wege sind in der Tat auch beschritten worden. Es hat sich aber gezeigt, und wir werden es auch gleich sehen, dass man dabei zu verschiedenen Ergebnissen gelangt. Eine befriedigende Erklärung dieses Widerspruches wurde bis jetzt wohl nicht gegeben.

Andererseits werden wir nachstehend auch die Genauigkeitsgrenzen beurteilen können, innerhalb derer die beiden Berechnungsarten in der Praxis als gleichwertig angesehen werden dürfen, und darauf die Wahl des für die Anwendung bequemeren Verfahrens gründen.

2. *Die Formeln für die Fliehkraftarbeit.* Bekanntlich ist die Schwingungsfrequenz unabhängig davon, ob die Knotenfigur im Raume oder aber der Scheibe gegenüber ruht. Denken wir uns eine Schwingungsform der zweiten Art etwa durch die Formel

$$w = f(r) \sin k\Theta \cos \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

gegeben, worin w die Durchbiegung eines Punktes der Mittelebene der Scheibe ist, r den Radius, Θ den von einem materiellen Scheibendurchmesser aus gerechneten Azimutwinkel und t die Zeit bedeuten, während k die Anzahl der Knotendurchmesser, λ die Schwingungsfrequenz und $f(r)$ die Durchbiegungsform der Winkelhalbierenden zwischen zwei benachbarten Knotenradien sind, so lässt sich die Fliehkraftarbeit von den Spannungskomponenten ausgehend wie folgt berechnen. Ein Element $r dr d\Theta$ der deformierten Mittelfläche weist gegen die undeformierte Lage des Radius r und die zugehörige Kreistangente Neigungswinkel auf, deren Cosinus entsprechend gleich sind

$$1 - {}^1/_2 \left(\frac{\delta w}{\delta r}\right)^2, \qquad 1 - {}^1/_2 \left(\frac{\delta w}{r\,\delta\Theta}\right)^2.$$

Bezeichnet man mit σ_r und σ_t die Radial- bezw. Tangential-Komponente der durch die Fliehkräfte hervorgerufenen Spannung, so ist die Arbeit der Fliehkräfte, vom Zeitfaktor $\cos \lambda t$ abgesehen, gleich

$$V_{f1} = \int_{r_0}^{a}\int_{0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\delta w}{\delta r}\right)^2 \sigma_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta w}{\delta \Theta}\right)^2 \sigma_t\right] z r dr d\Theta \underset{(\cos^2 \lambda t = 1)}{=}$$

$$\pi \int_{r_0}^{a}\left[\left(\frac{df}{dr}\right)^2 \sigma_r + k^2\left(\frac{f}{r}\right)^2 \sigma_t\right] z r dr \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn man mit $2z$ die Scheibendicke, mit $2a$ und $2r_0$ den äusseren bezw. den inneren Scheibendurchmesser bezeichnet.

Rechnet man aber mit den Fliehkräften selbst statt mit den Spannungen, so kommt man in ganz analoger Weise zum Ergebnis [1])

$$V_{f2} = 2\pi\varrho\omega^2 \int_{r_0}^{a} z r^2 \xi \, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worin ϱ die Massendichte ist, ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet und

$$\xi = {}^1/_2 \int_{r_0}^{r}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr$$

Dass die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich sind, geht aus 4. hervor. Der Grund für die Ungleichheit ist folgender:

[1]) S. hierzu *A. Stodola:* „Dampf- und Gas-Turbinen", 1922, S. 908.

3. *Grund für die Ungleichheit der Beträge (1) und (2).* Der natürliche Weg zur Berechnung der Fliehkraftenergie ist derjenige, bei dem von den Spannungskomponenten ausgegangen wird, von den Wirkungen also, die die betreffende äussere Kraft in der Scheibe selbst auslöst, denn es handelt sich ja doch schliesslich um eine Energie, die in der Scheibe ihren Sitz hat. Wenn man diese Energie auf dem Umwege über die äussere Kraft berechnen will, so muss man sich auf ein Gesetz berufen können, das diese Zurückführung vermittelt. Wir wissen, dass die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten σ_r und σ_t anderseits unabhängig von der Schwingungsbewegung miteinander ein Gleichgewichtssystem bilden. Daher leisten die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten anderseits gleiche Arbeit bei jeder *virtuellen* Verrückung des von ihnen gebildeten Gleichgewichtssystems. Dass die Arbeiten (1) und (2) einander nicht gleich sind, liegt eben daran, dass die in Frage stehenden speziellen Verschiebungen nicht zu den virtuellen Verrückungen des Systems gehören. Die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den Fliehkräften und den Spannungskomponenten der rotierenden Scheibe werden ja für die *Scheibenebene* aufgestellt, folglich sind die virtuellen Verrückungen des betrachteten Systems auf diese Ebene beschränkt. Verrückungen quer dazu kommen hier gar nicht in Frage. Auf diesem Wege kommen wir zum Schluss, dass das Prinzip der virtuellen Arbeiten im betrachteten Falle nicht herangezogen werden kann und die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich zu sein brauchen.

4. *Vergleich der Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander.* Für das Folgende ist es von praktischem Interesse, die Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander zu vergleichen. Auf Grund der bekannten Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{d}{dr}(rz\sigma_r) - z\sigma_t + \varrho\omega^2 r^2 z = 0$$

ist der Arbeitsbetrag (2) gleich

$$V_{f2} = -2\pi r z \sigma_r \xi \Big|_{r_0}^{a} + 2\pi \int_{r_0}^{a} r z \sigma_r \frac{d\xi}{dr} dr + 2\pi \int_{r_0}^{a} z\sigma_t \xi dr$$

Hierin ist der erste Summand immer klein, falls, wie wir hier annehmen wollen, $\sigma_r = 0$ an der Stelle $r = a$; denn am Innenrande $r = r_0$ sind r und ξ klein, und mit gewisser Einschränkung gilt dies bei der Betriebsgeschwindigkeit auch von σ_r; bei der Vollscheibe ist der betrachtete Betrag an der unteren Grenze genau gleich Null. Aus diesen Gründen wollen wir in der folgenden Näherungsbetrachtung mit

$$V_{f2} = \pi \int_{r_0}^{a} r z \sigma_r \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr + \pi \int_{r_0}^{a} z\sigma_t \left[\int_{r_0}^{r}\left(\frac{af}{dr}\right)^2 dr\right] dr$$

rechnen. Zieht man diesen Betrag vom Betrage (1) ab, so folgt

$$V_{f1} - V_{f2} = \pi \int_{r_0}^{a}\left[k^2\left(\frac{f}{r}\right)^2 r - \int_{r_0}^{r}\left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2 d\varrho\right] z\sigma_t dr \quad . \quad (3)$$

Um diese Differenz bequem abschätzen zu können, beziehen wir uns hier, wie auch in der Folge, auf die in der Dampfturbinenpraxis üblichen Berechnungsverfahren [2]) für die Schwingungsfrequenzen der Scheibe, wonach für $f(r)$ nach dem Vorgehen von Stodola die Funktion r^s angesetzt wird. Hierin ist s ein im Rahmen des bekannten Rayleighschen Minimalprinzips der Schwingungslehre (siehe Abschnitt 5) zu bestimmender konstanter Parameter. Mit diesem Ansatz, der durch die bekannten exakten Lösungen gerechtfertigt wird und sich bei der Berechnung von Schei-

[2]) Siehe *A. Stodola:* „Dampf- und Gas-Turbinen", 1922, Seite 903, sowie den Nachtrag dazu.

benschwingungen mit hinreichend kurzen Schaufeln in jahrzehntelanger reichhaltiger Erfahrung auch sehr gut bewährt hat, geht die Differenz (3), wenn man beim Innen-Integral die untere Grenze näherungsweise gleich Null setzt, über in

$$V_{f1} - V_{f2} \cong \pi\left(k^2 - \frac{s^2}{2s-1}\right)\int_{r_0}^{a} z r^{2s-1}\sigma_t\,dr$$

Bei der Anwendung des Rayleigh-schen Verfahrens auf Scheiben gleicher Dicke gelangt man zu s-Werten, die unterhalb der entsprechenden k-Werte liegen. Die profilierten Scheiben ergeben s-Werte, die den entsprechenden k-Werten etwas näher gelegen sind[3]), aber der konstante Faktor vor dem letzten Integral bleibt positiv[4]). Man kommt zu einer praktisch befriedigenden Abschätzung, wenn man in der letzten Gleichung $s \cong k$ setzt. Es wird dann klar, dass der Ausdruck (2) die Arbeit der Tangentialspannungen σ_t in mangelhafter Weise zum Ausdruck bringt. Setzt man anderseits $f(r) = r^s$ in (1) ein und bedenkt, dass, abgesehen von mehr oder weniger schmalen Gebieten, die Spannungskomponenten σ_r und σ_t roh gesprochen von der gleichen Grössenordnung sind, so kommt man zum Ergebnis, dass der Betrag (2) rund halb so gross ist wie der Betrag (1).

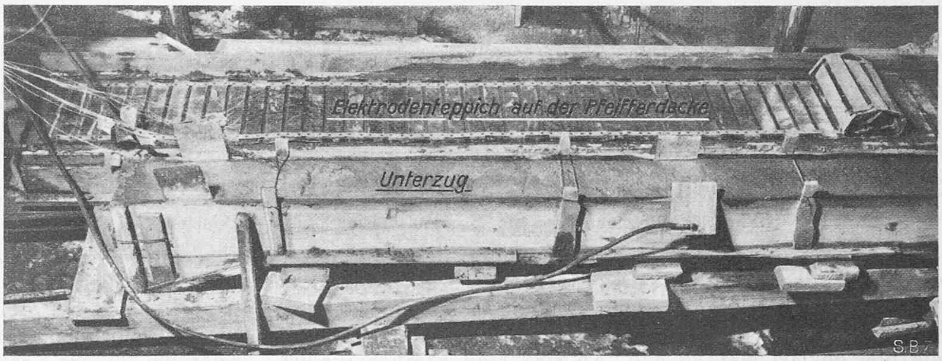

Abb. 6. Elektrische Betonerwärmung zweier Versuchstücke: hinten Pfeifferdecke mit Elektrodenteppich, davor Unterzug mit Seitenblechen, deren Sekundärkabel deutlich sichtbar sind. Die dünnen Kabel dienen für elektrische Temperaturmessung.

5. *Berechnung der Fliehkraftenergie vom Standpunkt der Praxis.* Trotz der grossen Ungenauigkeit, die der Berechnung der Fliehkraftenergie mit Hilfe des Ausdruckes (2) anhaftet, ist damit die berührte Frage vom Standpunkt der praktischen Anwendung aus beurteilt, noch nicht erledigt.

Die durch die Formel (1) verlangten Rechnungen sind von erheblicher Kompliziertheit, da die analytischen Ausdrücke für die Spannungskomponenten σ_r und σ_t für die darin enthaltenen Integrationen meistens nicht einfach genug sind. Ausserdem muss man auch bedenken, dass diese Spannungskomponenten in der Regel für eine bestimmte Uebergeschwindigkeit berechnet werden, während sich die Schwingungsberechnungen auf die Betriebsgeschwindigkeit beziehen; damit wird für die Ermittlung der Eigenfrequenzen eine Neuberechnung der Spannungsverteilung erforderlich. Die Schwingungsberechnungen sind aber an sich bereits sehr langwierig.

Nun weiss man aber aus Erfahrung, dass der Einfluss der Fliehkräfte auf die Eigenschwingungszahlen nicht gerade als gross bezeichnet werden kann. Es handelt sich da um Frequenzerhöhungen, die sich in der Regel, wiederum überschläglich gesprochen, innerhalb der Grenzen von etwa 10 % bewegen. Da es sich beim Rayleighschen Verfahren um eine Näherungsrechnung handelt, kann durch Benutzung der Formel (2) statt der Formel (1) ein erheblicher Fehler nicht verursacht werden. Ja, es ist sogar möglich und wahrscheinlich, dass man unter Benutzung von (2) zu Ergebnissen gelangt, die dem richtigen Wert näher liegen, als die mit der Formel (1) errechneten Resultate. Dies erklärt sich wie folgt.

Es hat sich gezeigt, dass die Schwingungsformen der Dampfturbinenscheiben in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle solche mit Knotendurchmessern und ohne Knotenkreise sind. Bei einer gegebenen Anzahl k von Knotendurchmessern ergeben solche Schwingungsformen die tiefsten Schwingungszahlen. Bei den tiefsten Schwingungszahlen handelt es sich aber nach Rayleigh um ein *Minimal*-Prinzip, während sonst (d. h. beim Hinzutreten von Knotenkreisen) allgemein nur von einem *Extrem*[5]) die Rede sein kann. Bei Schwingungen mit Knotendurchmessern allein kommen wir also beim geschilderten Verfahren auf Frequenzen, die etwas zu hoch liegen müssen. Da die Fliehkraft im Sinne einer Erhöhung der Frequenz wirkt, so werden mit dem geringeren Betrage (2) der Fliehkraftenergie möglicherweise bessere Näherungswerte der Eigenfrequenzen erreicht, als mit der Formel (1). Jedenfalls hat sich die Berechnungsart mit (2), wie bereits erwähnt, in der Praxis sehr gut bewährt, sofern die Schaufellänge ein gewisses Mass nicht überschreitet. In diesem Zusammenhang sei hier noch daran erinnert, dass bei der Ausdehnung der Integrationen auf die Schaufeln diese ja schon sowieso nur einer Radial- und keiner Tangentialbelastung zu unterwerfen sind.

Was nun aber die Rechnungen mit der Formel (2) an sich betrifft, so sind diese sehr einfach. Man hat sich nur zu erinnern, dass die kinetische Energie T der Schwingungsbewegung, die beim Rayleigh-Verfahren ja berechnet werden muss, unter Zugrundelegung der Schwingungsformel (A) und vom Zeitfaktor abgesehen die Gestalt

$$\underset{(\sin^2 \lambda t = 1)}{T} = \varrho\pi\lambda^2\int_{r_0}^{a}[f(r)]^2 z r\,dr$$

hat. Führt man in diese Formel, sowie in (2), den Ansatz $f(r) = r^s$ ein, so findet man, dass beide Grössen bei jedem Profil[6]) bis auf den Faktor $\omega^2 s^2 : (2s-1)\lambda^2$ durch einen und denselben Ausdruck dargestellt werden. Hat man also die kinetische Energie, so ist damit im Wesentlichen bereits auch die Fliehkraftenergie bekannt.

Durch diese Gesichtspunkte dürfte die Verwendung des Ausdruckes (2) an Stelle von (1) bei der Berechnung der Eigenfrequenzen der Querschwingungen von Scheiben hinreichend gerechtfertigt und begründet sein.

[3]) Man vergl. hierzu z. B. die in der Arbeit von *W. Campbell* in den „Transact. A. S. M. E.", 1924, p. 31 ff enthaltenen Angaben, insbesondere die Abb. 57, 58.

[4]) Dass der Betrag (2) kleiner ist als der Betrag (1), wird auch in der englischen Ausgabe des Stodolaschen Werkes, New York, 1927, bezeugt.

[5]) Vergl. hierzu z. B. „Handbuch der Physik", Bd. VI, 1928, S. 336.

[6]) Wegen der konischen Scheibe siehe „*Hütte*", des Ingenieurs Taschenbuch, 1931, S. 448.

Die Bautätigkeit im mittleren Osten.

Im Rahmen der letzten Tel-Aviver-Levantemesse, die im Frühjahr 1934[1]) stattfand, haben zahlreiche europäische Exporteure von Baumaterialien und Maschinen zum ersten Mal die Verbindung mit den Märkten des Orients aufgenommen. Unter den 2861 (davon 58 aus der Schweiz) Ausstellern, die sich an jener Messe beteiligten, waren Maschinenbau und Elektrotechnik mit 357 (darunter 323 ausländischen) Firmen, der Bauholz-Handel und die Holzbearbeitungsindustrie mit 69 (62) Firmen, und die übrigen Baubedarfsbranchen mit 67 (47) Firmen vertreten gewesen. Palästina, Aegypten, Syrien-Libanon, Transjordanien, der Irak haben bis zum heutigen Tage noch völlig freien Devisenverkehr, so daß der Export dorthin von all jenen Hemmungen verschont ist, die heute das Geschäft innerhalb Europas lähmen. Ausserdem kommt bei den orientalischen Märkten die Tatsache einer ausserordentlichen Expansion hinzu. Um mit der Messestadt Tel-Aviv selbst zu beginnen, sei erwähnt, dass sie im Frühjahr 1934 rund 85 000 Einwohner zählte, während sie gegenwärtig bereits von 150 000 Menschen bevölkert ist. Auch die weltpolitisch heute so interessante Hafenstadt Haifa[2]) hat vor zwei Monaten die Einwohnerzahl 100 000

[1]) Vergl. «SBZ» Bd. 102, S. 259, 18. Nov. 1933.

[2]) Vergl. «SBZ» Bd. 105, S. 132, 16. März 1935.