Berechnung nicht biegungssteifer Rotationsschalen für Winddruck

Autor(en): **Wiedemann, Erich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **107/108 (1936)**

Heft 23

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48412

Band 108 Nr. 23

Berechnung nicht biegungssteifer Rotationsschalen für Winddruck

Von Ing.-Arch. ERICH WIEDEMANN, Universität Riga, Lettland

Windgesetz: $w = w_0 \sin\varphi \sin\psi$

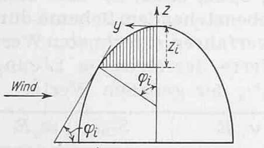
Voraussetzung: Einwandfreie, den reinen Membranzustand garantierende Auflagerbedingungen.

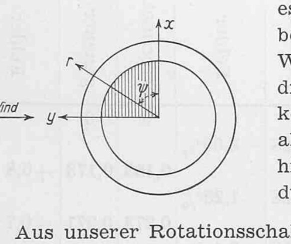
H. Reissner[1]) hat diese Aufgabe für die Kugelschale streng gelöst; Fr. Dischinger[2]) hat die Untersuchungen auf die Zylinder- und Kegelschale ausgedehnt und zugleich ein Verfahren angegeben, das gestattet, *beliebige* Rotationsschalen für Winddruck zu berechnen: es ist das graphisch-analytische Verfahren der Differenzenrechnung.

Die Berechnung der Meridianspannungsresultante T_1 und der Schubspannungsresultante S gestaltet sich sehr einfach. Zur Berechnung der Ringspannungsresultante T_2 bedient sich Dischinger der bekannten Beziehung zwischen T_1 und T_2 beim Membranzustande (mit den von Dischinger benutzten Bezeichnungen)

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = Z\,.$$

Im Falle, dass die Meridiankurve nicht analytisch, sondern nur graphisch gegeben ist («beliebige» Rotationsschale), stösst die Berechnung der Ringspannungsresultante T_2 auf eine Schwierigkeit: die Krümmungsradien R_1 und R_2, die wir zur Berechnung von T_2 benötigen, können nicht analytisch bestimmt werden. Wohl kann der Querkrümmungsradius R_2 ohne Schwierigkeit direkt aus der Zeichnung abgegriffen werden; schwierig ist es aber, den Meridiankrümmungsradius R_1 zu bestimmen. Dischinger empfiehlt «entweder die Meridiankurve durch eine Reihe von Korbbogen zu ersetzen und auf diese Weise für die einzelnen Längenelemente der Meridiankurve die Krümmungsradien R_1 zu ermitteln, oder sich aus den Koordinaten von drei benachbarten Punkten der Meridiankurve die Grösse der Meridiankrümmungsradien zu errechnen».





Aufgabe dieser Abhandlun g sol es sein, einen Weg zur Berechnung beliebiger Rotationsschalen für Winddruck zu zeigen, bei welchem die eben geschilderten Schwierigkeiten vermieden werden, indem alle Berechnungen ganz ohne Zuhilfenahme der Krümmungsradien durchgeführt werden.

Aus unserer Rotationsschale denken wir uns durch drei zueinander senkrechte Schnitte:

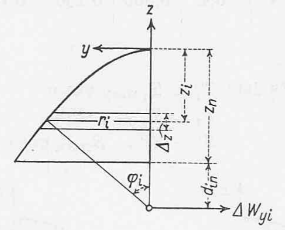
den «z_i»-Parallelkreisschnitt ($\perp$ zur z-Axe) im Abstande z_i vom Scheitel,
den «x»-Meridianschnitt ($\perp$ zur x-Axe) und
den «y»-Meridianschnitt ($\perp$ zur y-Axe),
ein *Kappenviertel* herausgeschnitten.

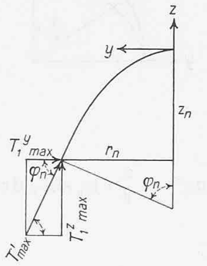
Die Gleichgewichtsbedingung ΣM inbezug auf die x-Axe des Parallelkreisschnittes $= 0$ führt auf dem schon bekannten Wege zur Bestimmung der Meridianspannungsresultante T_1;
die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Y = 0$ — zur Bestimmung der Schubspannungsresultante S;
die *Gleichgewichtsbedingung* $\Sigma X = 0$ — auf dem *neuen Wege* zur *Bestimmung der Ringspannungsresultante* T_2.

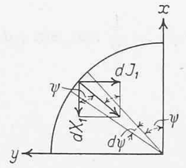
[1]) *H. Reissner:* «Spannungen in Kugelschalen», Müller-Breslau-Festschrift 1912.

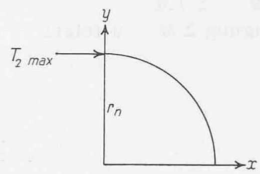
[2]) *Fr. Dischinger:* «Die antisymmetrisch belasteten Rotationsschalen und Vieleckkuppeln»; vergl. auch: «Handbuch für Eisenbetonbau», 4. Auflage, 6. Band, 1928, S. 194 u. f.

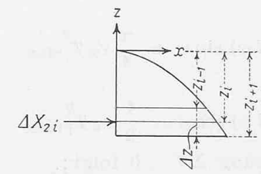
Bezeichnungen:

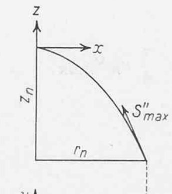


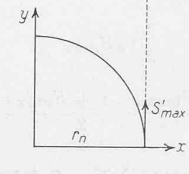


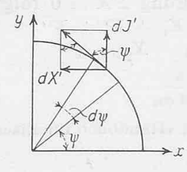




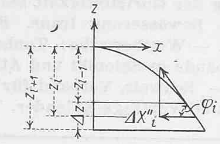








dW_y bzw. ΔW_y = Komponente der Resultierenden des auf ein Zonenviertel (zwischen zwei Parallelkreisschnitten) wirkenden Winddruckes in Richt. y-Axe;
dW_x bzw. ΔW_x desgl. in Richtung der x-Axe;
W_y = Komponente der Resultierenden des auf das ganze Kappenviertel wirkenden Winddruckes in Richtung der y-Axe;
W_x desgl. in Richtung d. x-Axe;
d = Hebelarm der Kraft ΔW_y inbezug auf die x-Axe eines Parallelkreisschnittes;
ΔM = statisches Moment der Kraft ΔW_y inbezug auf x-Axe eines Parallelkreisschnittes;
M = statisches Moment d. Kraft W_y inbezug auf die x-Axe eines Parallelkreisschnittes;
T_1 = gesuchte Meridianspannungsresultante in einem Parallelkreisschnitt;
$T_{1\,\max}$ = max. Meridianspannungsresultante (für $\psi = 90^0$) in einem Parallelkreisschnitt;
$T_1{}^z{}_{\max}$ = Komponente von $T_{1\max}$ in Richtung der z-Achse;
$T_1{}^y{}_{\max}$ desgl. in Richtung y-Axe;
J_1 = Komponente der Resultierenden der in einem Viertel eines Parallelkreisschnittes wirkenden Meridiankräfte in Richtung der y-Axe;
X_1 desgl. in Richtung d. x-Axe;
T_2 = gesuchte Ringspannungsresultante in einem Meridianschnitt (an der Schnittstelle eines bestimmten Parallelkreises mit demselben);
$T_{2\max}$ = maximale Ringspannungsresultante im x-Meridianschnitt ($\psi = 90^0$) (an der Schnittstelle eines bestimmten Parallelkreises);
ΔX_2 = Resultierende der im Längenelement des x-Meridianschnittes (zwischen den Schnittstellen zweier benachbarter Parallelkreise mit demselben) wirkenden Ringkräfte;
X_2 = Resultierende der im x-Meridianschnitt des Kappenviertels wirkenden Ringkräfte);
S = gesuchte Schubspannungsresultante:
S' in einem Parallelkreisschnitt (an der Schnittstelle eines bestimmten Meridianschnittes mit demselben);
S'' in einem Meridianschnitt (an der Schnittstelle eines bestimmten Parallelkreises mit ihm):
$S_{\max}$ = maximale Schubspannungsresultante:
$S'_{\max}$ in einem Parallelkreisschnitt an der Schnittstelle mit dem y-Meridianschnitt ($\psi = O^0$);
$S''_{\max}$ im y-Meridianschnitt (an der Schnittstelle eines bestimmten Parallelkreises);
J' = Komponente der Resultierenden der in einem Viertel eines Parallelkreisschnittes wirkenden Schubkräfte in Richtung der y-Axe;
X' desgl. in Richtung der x-Axe;

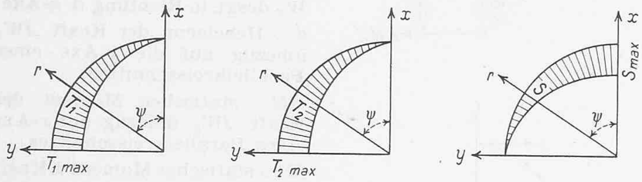


$\Delta X''$ = Komponente der Resultierenden der im Längenelement des y-Meridianschnittes (zwischen den Schnittstellen zweier benachbarter Parallelkreise mit demselben) wirkenden Schubkräfte in Richtung der x-Axe;
X'' = Komponente der Resultierenden der im y-Meridianschnitt des Kappenviertels wirkenden Schubkräfte in Richtung der x-Axe.

$Nr.$	$z:R$	$r:R$	$\Delta r:R$	ctg φ [5]	φ	$\sin\varphi$	$\Delta W_y : w_0 R^2$	$\Delta W_x : w_0 R^2$	$W_y : w_0 R^2$	$W_x : w_0 R^2$	$M : w_0 R^3$	$\overset{z}{T}_{1\max} : w_0 R$	$\overset{y}{T}_{1\max} : w_0 R$	$T_{1\max} : w_0 R$
0	0	0		∞	0°	0			0	0	0	0	0	0
1	0,1	0,435	0,600	2,10	25 ½°	0,43	0,030	0,019						
2	0,2	0,600	0,280	1,40	35 ½°	0,58			0,030	0,019	0,024	0,086	0,120	0,148
3	0,3	0,715	0,200	1,00	45°	0,71	0,079	0,051						
4	0,4	0,800	0,150	0,75	53°	0,80			0,109	0,070	0,067	0.134	0,100	0,168

usw.

Es ist: $T_1 = T_{1\max} \sin\psi$
$T_2 = T_{2\max} \sin\psi$
$S' = S'' = S_{\max} \cos\psi$.



$Nr.$	$J_1 : w_0 R^2$	$X_1 : w_0 R^2$	$J' : w_0 R^2$	$S_{\max} : w_0 R^2$	$X' : w_0 R^2$	$\Delta X'' : w_0 R^2$	$X'' : w_0 R^2$	$X_2 : w_0 R^2$	$\Delta X_2 : w_0 R^2$	$T_{2\max} : w_0 R$
0	0	0	0	0	0		0	0		
1						0,038			0,148	0,318
2	0,056	0,036	0,086	0,183	0,055		0,038	0,148		
3						0,046			0,155	0,551
4	0,063	0,040	0,172	0,273	0,109		0,084	0,303		

usw.

Gang der Berechnung: [3])

$$d W_y = \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} (w_0 \sin\varphi \sin\psi)\left(r\, d\psi \frac{dz}{\sin\varphi}\right)(\sin\varphi \sin\psi) = \frac{\pi}{4}\, r\, w_0 \sin\varphi\, dz$$

bezw. $\Delta W_{yi} = \dfrac{\pi}{4} r_i w_0 \sin\varphi_i \Delta z$

$$dW_x = \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} (w_0 \sin\varphi \sin\psi)\left(r\, d\psi \frac{dz}{\sin\varphi}\right)(\sin\varphi \cos\psi) = \frac{1}{2}\, r w_0 \sin\varphi\, dz$$

bezw. $\Delta W_{xi} = \dfrac{1}{2} r_i w_0 \sin\varphi_i \Delta z$

$W_y = \Sigma \Delta W_y$ $\qquad W_x = \Sigma \Delta W_x$

$d_{in} = z_i + r_i \operatorname{ctg}\varphi_i - z_n$

$\Delta M_{in} = \Delta W_{yi}\, d_{in}$ $\qquad M = \Sigma \Delta M$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ folgt:

$$\overset{z}{T}_{1\max} = \frac{M}{\frac{\pi r^2_n}{4}} \text{ [4])}$$

$$\overset{y}{T}_{1\max} = \overset{z}{T}_{1\max} \operatorname{ctg}\varphi_n$$

$$T_{1\max} = \frac{\overset{z}{T}_{1\max}}{\sin\varphi_n}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overset{y}{T}_{1\max} \sin\psi\, r_n\, d\psi) \sin\psi = \frac{\pi}{4} r_n \overset{y}{T}_{1\max}$$

$$X_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overset{y}{T}_{1\max} \sin\psi\, r_n\, d\psi) \cos\psi = \frac{1}{2} r_n \overset{y}{T}_{1\max}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma J = 0$ folgt:

$J' = W_y + J_1$

es ist aber

$$J' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (S_{\max} \cos\psi\, r_n\, d\psi) \cos\psi = \frac{\pi}{4} r_n S_{\max}$$

also $S_{\max} = \dfrac{J'}{\frac{\pi r_n}{4}}$

$$X' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (S_{\max} \cos\psi\, r_n\, d\psi) \sin\psi = \frac{1}{2} r_n S_{\max}$$

$$\Delta X''_i = \left(S_{\max i} \frac{\Delta z}{\sin\varphi_i}\right) \cos\varphi_i = \frac{S_{\max\, i-1} + S_{\max\, i+1}}{2} \operatorname{ctg}\varphi_i \Delta z$$

$X'' = \Sigma \Delta X''$.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma X = 0$ folgt:

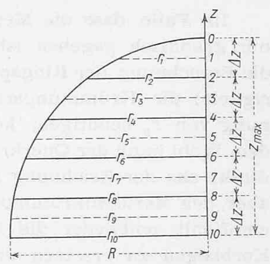
$$X_2 = W_x + X_1 + X' + X''$$

$$\Delta X_{2\,n} = X_{2\,n+1} - X_{2\,n-1}$$

$$T_{2\max} = \frac{\Delta X_{2\,n}}{\Delta z / \sin\varphi_n}$$

[3]) Vergl. hiezu: Fr. Dischinger in «Handbuch für Eisenbeton», 4. Auflage, 6. Band, Seiten 204 bis 208.

Beispiel. Um eine Kontrolle der Genauigkeit der mit Hilfe dieser Näherungsrechnung gewonnenen Resultate zu erhalten, soll die Rechnung nicht für eine «beliebige» Rotationsschale durchgeführt werden, sondern für eine Kugelschale, für die die strenge Lösung bekannt ist; jedoch werden wir die Berechnung der Kugelschale so durchführen, *als ob* diese Schale eine «beliebige», also analytisch nicht erfassbare Rotationsschale sei. Wir zerlegen die Rotationsschale durch vier Parallelkreisschnitte (2, 4, 6, 8) in fünf Zonen laut Abbildung nebenan. Es ist $z_{\max} : R = 1$; $\Delta z : R = 0{,}2$.



Die Längen r greifen wir in der Zeichnung ab ($r : R = 0$, 0,435, 0,600, 0,715, 0,800, 0,865, 0,91,5 0,955, 0,980, 0,995, 1) und führen die Rechnung in Tabellenform nach obenstehendem Schema durch.

Neben den nach dem Näherungsverfahren errechneten Werten sind untenstehend die genaueren Werte der strengen Lösung [6]) angeschrieben und der Fehler in %% der genauen Werte.

$Nr.$	$T_{1\max} : w_0 R$			$T_{2\max} : w_0 R$			$S_{\max} : w_0 R$		
	errechnet	genauer	Fehler	errechnet	genauer	Fehler	errechnet	genauer	Fehler
0	0	0	—		0		0	0	—
1				0,318	0,328	—3,05%			
2	0,148	0,138	+ 7,3 %				0,183	0,173	+5,8 %
3				0,551	0,558	—1,25%			
4	0,168	0,163	+ 3,1 %				0,273	0,271	+0,7 %
5				0,722	0,705	+2,4 %			
6	0,153	0,150	+ 2,0 %				0,378	0,374	+1,1 %
7				0,822	0,824	—0,25%			
8	0,104	0,100	+ 4,0 %				0,502	0,498	+0,8 %
9				0,936	0,939	—0,3 %			
10	0,004	0	—		1		0,670	0,667	+0,45%

Die nach dem Näherungsverfahren errechneten Werte, insbesondere die Grösstwerte, können als durchaus befriedigend angesehen werden.

[4]) $\dfrac{\pi r^2_n}{4}$ ist das Widerstandsmoment des Viertel-Parallelkreises inbezug auf die x-Axe des Parallelkreisschnittes.

[5]) $\operatorname{ctg}\varphi_i = \dfrac{\Delta r_i}{\Delta z}$; für Meridiankurven, die, wie hier, im Scheitelpunkt eine horizontale Tangente haben, empfiehlt es sich (um zu genaueren Resultaten zu kommen) ctg φ_1 um rd. 30% zu verkleinern.

[6]) Vergl. hiezu Fr. Dischinger in «Handbuch für Eisenbeton», 4. Aufl., 6. Band, S. 202 bis 03; in die benutzten Formeln sind selbstverständlich die trigonometrischen Funktionen nicht der näherungsweise errechneten, sondern der genauen Winkel eingesetzt.