Band 108 Nr. 6

Der Formänderungseinfluss beim versteiften Stabbogen.

Von Dr. sc. techn. FRITZ STÜSSI, Privatdozent an der E. T. H., Zürich.

1. Es ist seit längerer Zeit bekannt, dass bei verankerten Hängebrücken die elastischen Formänderungen, d. h. die Durchbiegungen, eine Entlastung des Versteifungsträgers bewirken. Diese Abweichungen gegenüber den Ergebnissen der technischen Elastizitätslehre, die die Kräfte am unverformten System wirkend annimmt, sind dort oft so gross, dass die Anwendung der noch häufig als üblich bezeichneten Berechnungsweise einer unvertretbaren Materialverschwendung gleichkommt oder überhaupt eine vernünftige Bauausführung verunmöglichen würde. Bei Bogenträgern zeigen die Fehler der Elastizitätslehre entgegengesetztes Vorzeichen, da hier eine Vergrösserung der Bogenmomente infolge der Systemverformungen eintritt, was mit einer Abnahme der Tragwerksicherheit gleichbedeutend ist. In dieser Beziehung besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen Tragwerken mit aufgehobenem Horizontalschub, bei denen diese Formänderungseinflüsse nicht bestehen, und eigentlichen Bogen- und Hängebrücken.

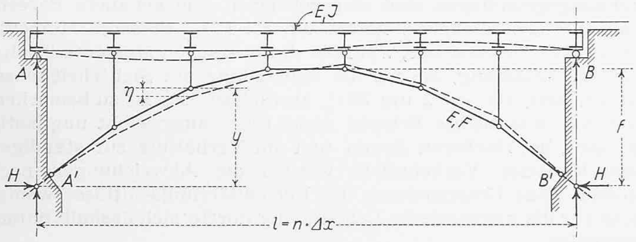

Abb. 1

Der versteifte Stabbogen (Abb. 1) nimmt unter den Bogenträgern insofern eine besondere Stellung ein, als sich hier diese Formänderungseinflüsse besonders einfach berechnen lassen. Dies deshalb, weil als massgebende Formänderungen hier die lotrechten Durchbiegungen des Versteifungsträgers auftreten, während bei gewöhnlichen Bogenträgern die Verschiebungsrichtung nicht von vornherein gegeben ist, sodass dort genau genommen mit zwei Verschiebungskomponenten zu rechnen ist. Der versteifte Stabbogen wird gerade in unsern Verhältnissen oft die zweckmässige Lösung darstellen. Da aber die Durchbiegungsvorschrift unserer neuen Verordnung (S. I. A.-Norm 112) bei üblicher Berechnung nach der Elastizitätslehre nicht genügt, um die Einflüsse der Formänderungen auf die Tragwerksicherheit genügend klein zu halten, scheint die Angabe einer einfachen Methode zur genaueren Berechnung dieser Tragwerksform gerechtfertigt.

2. Wir setzen einen gelenkigen Stabbogen voraus, auf den der Versteifungsträger mit Pendelstützen abgestützt sei. Ueberzählige Grösse X sei der Horizontalschub H des Stabbogens. Bezeichnen wir das Moment der äussern Belastung im einfachen Balken A—B (Grundsystem) mit M_0, so beträgt das Biegungsmoment M im wirklichen Tragwerk

$$M = M_0 - H \cdot (y - \eta), \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo η zunächst die Durchbiegung des Stabbogens bezeichnet. Da die elastischen Verkürzungen der Stützen vernachlässigbar klein sind, sind in den Knotenpunkten die Durchbiegungen η von Stabbogen und Versteifungsträger gleich gross. Wenn wir uns nun auch die Biegungslinie η des Versteifungsträgers polygonal, bestimmt durch die Durchbiegungen in den Knotenpunkten, vorstellen, so liefert uns die Differentialgleichung der elastischen Linie für den Versteifungsträger die Beziehung

$$M = -E\,J\,\eta'' = M_0 - H \cdot (y - \eta). \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Den polygonalen Verlauf der Durchbiegungen können wir uns auch so entstanden denken, dass die Verformungen (Winkeländerungen) des Versteifungsträgers in den Knotenpunkten konzentriert angenommen werden. Dieser gedachte Versteifungsträger sei als Ersatzträger bezeichnet.

Gleichung 2 ist identisch mit der Differentialgleichung des Ersatzträgers, wenn dieser ausser durch die Momente M_0 und $-H \cdot y$ durch eine gedachte axiale Druckkraft $N = H$ belastet ist, wobei N nur die Momente $N \cdot \eta$, aber keine Längsspannungen $N : F$ erzeugt.[1]) Für einen bestimmten Festwert von N können wir die Durchbiegungen η in die beiden Anteile infolge M_0 und $-H \cdot y$ zerlegen:

$$\eta = \eta_0 - H \cdot \eta_{H=1} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Für jeden Anteil M_k gilt die Differentialgleichung

$$M_k + N \cdot \eta_k = -E\,J \cdot \eta_k'' \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert die Durchbiegungsanteile η_k. Ein einfaches baustatisches Auflösungsverfahren für derartige lineare inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung wurde an anderer Stelle angegeben.[2]) Darnach kann die Differentialgleichung ersetzt werden durch ein System von dreigliedrigen Gleichungen, deren Auflösung ja jedem Statiker geläufig ist. Für den hier vorliegenden Fall lässt sich mit den Abkürzungen

$$U = \frac{6\,E\,J_c}{\Delta x^2}, \quad i_m = \frac{J_c}{J_m}$$

und unter der wohl stets die Steifigkeitsverhältnisse genügend genau erfassenden Annahme feldweise konstanten Trägheitsmoments für jeden Knotenpunkt m die Gleichung anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &-\eta_{m-1}\,(U + i_m \cdot N) + \eta_m \cdot 2\,(U - (i_m + i_{m+1})\,N) \\ &-\eta_{m+1}\,(U + i_{m+1} \cdot N) \\ &= i_m\,(M_{m-1} + 2\,M_m) + i_{m+1}\,(2M_m + M_{m+1}) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Randbedingungen lauten: $\eta_A = 0$, $\eta_B = 0$. Die Feldweiten Δx werden entsprechend den Querträgerabständen gewählt; sie sind also bei Anordnung von Zwischenquerträgern kleiner als die Pfostenabstände. Damit sind die Durchbiegungsanteile η_k infolge der Momentenanteile M_k bestimmbar.

Wir haben noch die Elastizitätsbedingung zur Bestimmung des überzähligen Horizontalschubes H aufzustellen. Sie lautet, dass der Abstand der beiden Auflagergelenkpunkte A' und B' sich nicht ändert. In Abb. 2 ist ein Stabbogenfeld in ursprünglichem Zustand und nach eingetretener Verformung skizziert. Daraus können wir die geometrischen Beziehungen

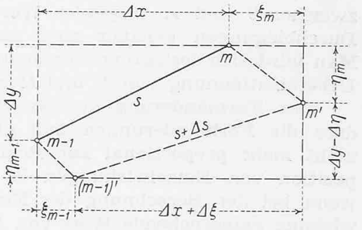

Abb. 2

$$(\Delta x + \Delta \xi)^2 + (\Delta y - \Delta \eta)^2 = (s + \Delta s)^2$$
$$\Delta x^2 \quad + \quad \Delta y^2 \quad = \quad s^2$$

ablesen.[3]) Unter Vernachlässigung der kleinen Grössen $\Delta \xi$ gegen Δx, $\Delta \eta$ gegen Δy und Δs gegen s erhalten wir durch Subtraktion

$$\Delta x \cdot \Delta \xi - \Delta y \,.\, \Delta \eta = s \,.\, \Delta s$$

oder

$$\Delta \xi = \Delta y \cdot \frac{\Delta \eta}{\Delta x} + s \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Stabverkürzung Δs setzt sich aus der Zusammendrückung infolge der Längskraft $S = H : \cos\alpha$ und aus dem Einfluss der Temperaturänderung zusammen:

---

[1]) Eine ähnliche Umdeutung der Differentialgleichung finden wir bei *S. Timoshenko:* «Suspension bridges with a continuos stiffening truss», Abhandlungen I. V. B. H. 2. Band, 1933/34, bei der Berechnung von Hängebrücken. Dagegen wird erst durch die gedankliche Trennung von H und dem gedachten Festwert N eine Zerlegung in Teileinflüsse und damit eine zur üblichen Theorie statisch unbestimmter Tragwerke analoge Berechnung möglich.

[2]) *F. Stüssi:* «Baustatische Methoden». «SBZ» Bd. 107, S. 277, 20. Juni 1936. S. auch: *F. Stüssi:* «Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers», Abhandlungen I. V. B. H. 3. Band 1935.

[3]) Diese Ableitung der Elastizitätsbedingung stimmt, abgesehen von der Zerlegung in Teildurchbiegungen η, mit einer auch bei der genaueren Berechnung von Hängebrücken verwendeten Form überein. Siehe *Hans Bleich:* «Die Berechnung verankerter Hängebrücken», Wien, Springer, 1935. Uebrigens erlaubt auch bei Hängebrücken die Trennung von N und H eine Vereinfachung der genaueren Berechnung, s. *F. Stüssi:* «Zur Berechnung verankerter Hängebrücken» Abhandlungen I. V. B. H., 4. Band 1936.