

# Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion

Autor(en): **Meissner, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **99/100 (1932)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45442>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. — Der neue Zentralbahnhof in Mailand. — Neuere geschweiste Brücken. — Mitteilungen: Eidgen. Technische Hochschule. Messtechnische Erfassung der durch elektrische Bahnen verursachten Telefonstörungen. Moderne Turbogebälde für Hüttenwerke. Atemfilter. 75 Jahre „Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure“. Kurs

über Betriebsführung. Auflösung von Stahl in Säuren. Eisenbahnmotorwagen auf Gummireifen. Baufach-Ausstellung in Zürich. Die erste Eisenbahnlinie auf den Bermudas. Prof. Dr. W. Wyssling. Wassermessungen mit Ueberfall in der Zentrale Handeck. — † Eduard Locher. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Fortsetzung von Seite 335 letzten Bandes.)

6. Ganze rationale Funktionen.

Eine ganze rationale Funktion  $n$ -ten Grades ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre  $n$ -te Ableitung konstant ist. Es ist daher die  $n$ -te Evolute ihres Linienbildes ein Kreis. Die  $(n - 1)$ te Evolute ist sonach eine gewöhnliche Kreis-evolute, und indem man zu dieser ihre aufeinanderfolgenden Evoluten zeichnet, gelangt man schliesslich zum Linienbild der Funktion. Um praktisch das Linienbild zu zeichnen, wird man zur Kontrolle einige Werte der Funktion und damit die zugehörigen Stützgeraden  $g$  direkt berechnen bezw. konstruieren. Aber wenn es sich darum handelt, den Verlauf der Funktion in einem grössern Intervall darzustellen, wird man das Linienbild zweckmässig in der geschilderten Weise als Evolute zeichnen.

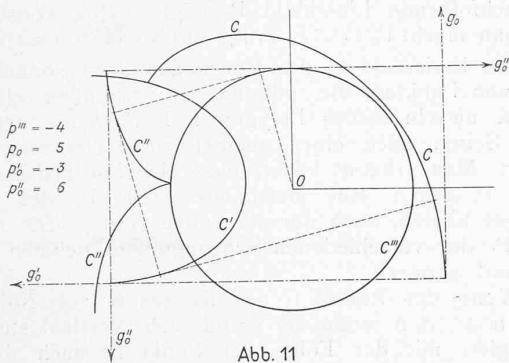


Abb. 11

In Abb. 11 ist die Funktion

$$p(u) = 5 - 3u + 3u^2 - \frac{2}{3}u^3$$

dargestellt. Es ist  $p_0 = 5$ ,  $p'_0 = -3$ ,  $p''_0 = 6$ ,  $p'''_0 = -4$ , und es ist daher  $C'''$  ein Kreis vom Radius  $-4$ . Dementsprechend sind die Geraden  $g_0, g'_0, g''_0, g'''_0$  eingetragen und die Evoluten  $C, C'$  und  $C''$  von  $C'''$  gezeichnet.  $C$  ist das Linienbild der gegebenen Funktion und in der Abb. 11 für das Intervall von 0 bis  $\pi$  dargestellt.

Von dieser Konstruktion wird bei der Integration von Differentialgleichungen Gebrauch gemacht, wenn ausnahmsweise für eine Funktion an einer Stelle die Funktion und ihre ersten Ableitungen alle Null werden. Ist z. B., wie in Abb. 12 dargestellt, für den Wert  $u = a$  sowohl  $p$ , wie  $p', p''$  und  $p'''$  gleich Null und erst  $p^{(4)} = a$  von Null verschieden, so kann die Funktion in der Umgebung jener Stelle angenähert durch den Ausdruck

$$a \frac{(u-a)^4}{4!}$$

dargestellt werden. Ihre zweite Evolute ist dort angenähert

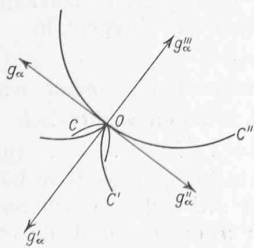


Abb. 12

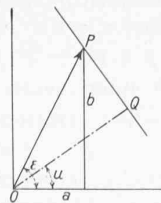


Abb. 13

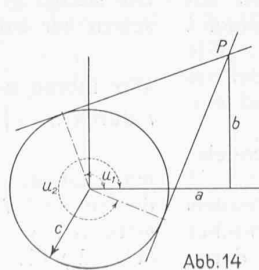


Abb. 14

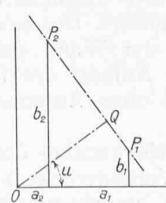


Abb. 15

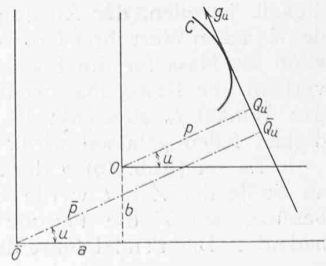


Abb. 16

ein Kreis vom Radius  $a$  und man hat hierzu nur die zweite Evolute durch den Punkt  $O$  zu zeichnen, wie die Abb. 12 angibt.

7. Die harmonische Funktion.

Das einfachste Linienbild ist ein Punkt  $P$ . Sind seine rechtwinkligen Koordinaten  $a, b$ , so ergibt sich aus Abb. 13  $p(u) = a \cos(u) + b \sin(u)$  d. h. die harmonische Funktion mit der Periode  $2\pi$ . Schreibt man  $p$  in der Form

$$p(u) = A \cos(u - \epsilon)$$

so ist die Amplitude  $A$  dargestellt durch die Länge der Strecke  $OP$ , die Phase  $\epsilon$  ist der Winkel, den diese Strecke mit der Polaraxe einschliesst. Die Bestimmungstücke der harmonischen Schwingung werden aus dem Vektor  $OP$  ersichtlich. Umgekehrt genügen alle harmonischen Schwingungen von der Periode  $2\pi$  der Differentialgleichung  $p(u) + p''(u) = 0$ , die nichts anderes aussagt, als dass der Krümmungsradius  $\rho$  des Linienbildes stets gleich Null ist, es sich also um einen Punkt handelt.

Durch Addition beliebig vieler solcher Schwingungen erhält man wiederum eine Schwingung der selben Art, und zwar wird sie dargestellt durch den Vektor, der sich durch geometrische Addition der Vektoren der Teil-schwingung ergibt.

Die Lösung der Gleichung  $a \cos(u) + b \sin(u) = c$  erfordert, jene Stützlinien durch den Punkt  $P(a, b)$  in Abb. 14 zu zeichnen, die von  $O$  den Abstand  $c$  haben. Man hat also einfach die Tangenten an den um  $O$  geschlagenen Kreis vom Radius  $c$  von  $P$  aus zu legen. Die Radien nach den Berührungspunkten schliessen mit der Polaraxe jene Winkel  $u$  ein, die die Lösung der Gleichung ergeben. Natürlich sind sie nur bis auf Multipla von  $2\pi$  bestimmt.

Die Lösung der Gleichung  $a_1 \cos(u) + b_1 \sin(u) = a_2 \cos(u) + b_2 \sin(u)$  wird analog durch die Verbindungsgerade der Punkte  $P(a_1, b_1)$  und  $P(a_2, b_2)$  gegeben (Abb. 15).

Das nächst einfache Linienbild ist der Kreis vom Radius  $r$ . Für ihn gilt  $p + p'' = r$  mit der allgemeinen Lösung  $p(u) = r + a \cos(u) + b \sin(u)$  Zur harmonischen Funktion erscheint eine feste Konstante addiert.

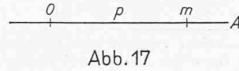
Verlegung des Anfangspunktes. Verlegt man bei beliebigem Linienbild  $C$  den Anfangspunkt von  $O$  nach links und unten um die Strecken  $a$  und  $b$  (Abb. 16), so tritt an Stelle der Stützfunktion  $p(u)$  die neue Funktion

$$\bar{p}(u) = p(u) + a \cos(u) + b \sin(u).$$

Eine harmonische Funktion mit der Periode  $2\pi$  ist somit ein unwesentlicher additiver Zusatz zur Stützfunktion. Durch passende Verlegung des Anfangspunktes kann sie stets beseitigt werden.

1. Beispiel. Elastische Schwingungen eines Massenpunktes auf einer Geraden bei konstanter Reibung.

Auf der Geraden OA (Abb. 17) sei ein Massenpunkt m von der Masse 1, der von O aus proportional der Entfernung  $p = Om$  angezogen werde (Proportionalitäts-Konstante  $k^2$ ). Ausserdem wirke auf ihn entgegengesetzt der Bewegung der konstante Reibungswiderstand R. Dann lautet die Bewegungsgleichung



$$\frac{d^2 p}{dt^2} + k^2 p = \pm R$$

wo das obere Zeichen für die Rückwärts-, das untere für die Vorwärtsbewegung gilt, oder mit der Abkürzung  $R/k^2 = r$  und nach Einführung der neuen Veränderlichen  $u = kt$

$$p'' + p = \pm r$$

Diese Gleichung aber sagt aus, dass das Linienbild C von  $p(u)$  einen Krümmungsradius hat, der abwechselnd bald gleich  $r$ , bald gleich  $-r$  ist, und dass der Wechsel an den Stellen eintritt, wo  $p' = 0$  wird. Hat man etwa die Anfangsbedingungen

$$p = p_0 \quad p' = p_0' \quad \text{für } t = 0,$$

also

$$p = p_0 = a \quad p' = kp_0' = b \quad \text{für } u = 0$$

und ist  $b$  wie in Abb. 18 positiv, so beginnt das Linienbild als Kreis vom Radius  $-r$ , was bedeutet, dass der Kreismittelpunkt im Sinne der negativen Richtung auf der Geraden  $g'$  aufzutragen ist. Dies gilt solange  $p'(u)$  positiv bleibt, also bis zur Stelle  $P_1$  der ersten Umkehrstelle. Hier springt der Radius auf  $+r$ , d. h. der Kreis ist jetzt auf die entgegengesetzte Stelle der Normalen zu zeichnen. Dieser Kreis gilt bis zur nächsten Umkehrstelle  $P_2$ , worauf neue Halbkreisbögen  $P_2, P_3$  usw. sich anschliessen. Ein endgültiger Stillstand der Bewegung tritt in jenem Punkte ( $P_4$ ) ein, an dem zum ersten Mal die elastische Kraft  $k^2 p$  kleiner wird als die vollentwickelte Reibung R, im Linienbild also da, wo zum ersten Mal  $|p| < r$  vorkommt. Das Linienbild der Bewegung setzt sich also aus einer Anzahl Halbkreisbögen zusammen, von denen nur der erste unvollständig bleibt. Man erkennt mit einem Blick, dass die Schwingungsausschläge arithmetisch abnehmen jeweils um den Betrag  $2r$ , aber man kann, was wertvoller ist, aus dem Bild für jede beliebige Zeit  $t$  (bezw.  $u$ ) den Ort  $p$  und die Geschwindigkeit  $dp/dt = kp'$  entnehmen. In Abb. 18 sind beispielsweise die Geschwindigkeiten  $OQ_1, OQ_2$  beim Durchgang durch den Nullpunkt und die zugehörigen  $u$ -Werte (Durchgangszeiten)  $u_1, u_2$  hervorgehoben.

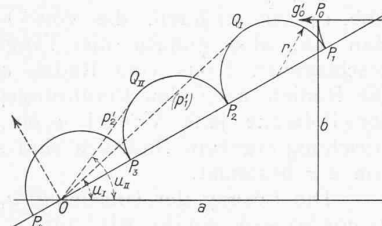


Abb. 18

2. Beispiel. Stösse eines Pendels gegen eine elastische Wand.

Ein Pendel, dessen Schwingungen so klein sind, dass sie als rein harmonisch angesehen werden können, stosse beim Fallen auf eine schiefe, elastische Wand W von der Neigung  $a$ . Durch den Stoss werde ein bestimmter Bruchteil der Bewegungsenergie vernichtet, die Geschwindigkeit jeweiligen der Richtung nach umgekehrt und auf den  $\lambda$ -fachen Wert ihrer Grösse reduziert. Der echte Bruch  $\lambda$  kann als Mass für die Elastizität der Wand gelten. Wie verläuft die Bewegung, wenn zu Anfang das Pendel um den Winkel  $p_0$  abgelenkt ist und ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen gelassen wird?

Es sei (Abb. 19)  $p$  der Ausschlagwinkel des Pendels; an Stelle der Zeit  $t$  werde die Veränderliche  $u = 2\pi t/T$  benützt, wo  $T$  die Periode des ungehemmten Pendels bedeutet. Das Pendel führt dann eine Reihe harmonischer Schwingungen aus, die in  $u$  die Periode  $2\pi$  haben, deren

Linienbilder also durch Punkte  $P_1, P_2 \dots$  dargestellt werden. Die Art dieser Schwingungen wechselt mit jedem Stoss. Denn im Augenblick des Aufprallens springt die Geschwindigkeit und damit das zu ihr proportionale  $p'$  auf das  $\lambda$ -fache ihres Wertes hinab unter Wechsel des Vorzeichens. Im Anfang, für kleine Werte von  $u$ , wird das Linienbild des Vorganges dargestellt durch den Punkt  $P_0$ , der durch die Anfangsbedingungen  $p(0) = p_0, p'(0) = 0$  gekennzeichnet ist. Für die letzte der zugehörigen Stützlinien  $g(\delta)_1$  ist  $p(\delta_1) = a$ , d. h. die Stützlinie ist Tangente an dem um O gezogenen Kreis K vom Radius  $a$ . Die nachfolgende harmonische Schwingung wird durch das Linienbild  $P_1$  dargestellt, das man erhält, indem man vom Berührungspunkte  $T_0$  das  $\lambda$ -fache der Strecke  $T_0 P_0$  auf  $g(\delta)_1$  nach entgegengesetzter Richtung abträgt, also  $P_1 T_0 = \lambda \cdot T_0 P_0$  macht. Dieses neue Linienbild gilt wiederum solange, bis  $p$  wieder gleich  $a$  wird, also bis die zugehörige Stützgerade  $g(\delta)_2$  durch  $P_1$  den Kreis K berührt.

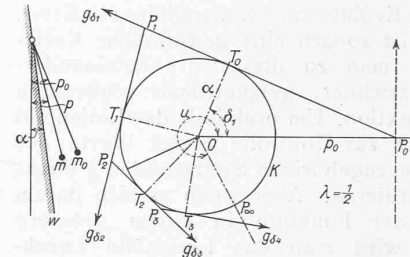


Abb. 19

Das nachfolgende Linienbild  $P_3$  wird analog konstruiert, d. h. man macht  $P_2 T_1 = \lambda \cdot T_1 P_1$  und so fährt man weiter.

Das Linienbild C des Vorganges wird sonach eine Folge von Punkten, die, miteinander verbunden, ein dem Kreis K umschriebenes Polygon  $P_0 P_1 P_2 P_3 \dots$  ergeben, dessen Seiten nach einer geometrischen Degression abnehmen. Man erkennt leicht, dass sich infolgedessen die Punkte  $P_i$  gegen eine bestimmte Stelle  $P_0$  des Kreisumfangs häufen, nach der sie konvergieren. Die Amplitude  $OP_1$  der verschiedenen Schwingungen nehmen daher mehr und mehr ab.

Wenn der Radius  $a$  des Kreises K von Null verschieden ist, d. h. wenn die Wand nicht vertikal steht, so konvergiert mit der Folge der Punkt  $P_i$  auch der im Gesamten überstrichene Winkel  $u$  nach einem Grenzwert  $U$ . Nur im Falle  $a = 0$  wird er ins Unendliche anwachsen. Man erhält somit das bemerkenswerte Resultat:

Wenn die Wand nicht vertikal steht, so kommt die Bewegung nach der endlichen Zeit  $T = U/2\pi$  zum Stillstand.

8. Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung.

In vielen Teilen der Mechanik und Physik spielt eine Differentialgleichung eine Rolle, die wir an einem mechanischen Beispiel auseinandersetzen wollen.

Ein System mit einem Freiheitsgrad und der Lagekoordinate  $z$  sei fähig, gedämpfte harmonische Schwingungen auszuführen, für die dann eine Gleichung von der Form

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + k^2 z = 0$$

gilt.  $\lambda$  ist die sog. Dämpfungskonstante, Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit. Wenn jetzt von aussen her eine zeitlich veränderliche Kraft hinzutritt, hat man als Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + k^2 z = f(t)$$

Um sie der graphischen Integration zugänglich zu machen, setzen wir zunächst  $z = e^{-\lambda t} p$ , worauf sie übergeht in

$$\dot{p} + (k^2 - \lambda^2) p = f(t) e^{\lambda t}$$

Wir führen noch einen neuen Zeitmassstab ein, indem wir  $t$  durch  $u = \sqrt{k^2 - \lambda^2} t$  ersetzen und erhalten schliesslich

$$p'' + p = F(u) \dots \dots \dots (9)$$

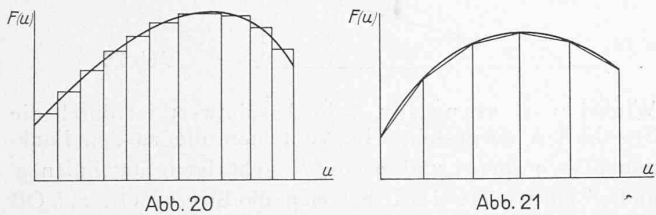
wo jetzt die Striche wiederum Ableitungen nach  $u$  bedeuten, und  $F(u)$  die Abkürzung für die rechte Gleichungsseite ist, wenn man dort  $t$  durch  $u$  ersetzt und durch  $(k^2 - \lambda^2)$  dividiert.

In der Folge dürfen wir uns auf die Behandlung dieser letzten Gleichung beschränken, die wir als die *Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung* bezeichnen.

Das Linienbild C der Lösung ist eine Kurve, für die  $\rho(u) = F(u)$

d. h. für die der Krümmungshalbmesser  $\rho$  eine gegebene Funktion des Richtungswinkels  $u$  ist.

Wenn man den Bereich der Veränderlichen  $u$  in genügend kleine Intervalle  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  einteilt, sodass innerhalb eines Intervalls  $\alpha_i$  die Funktion  $F(u)$  als konstant ( $= \rho_i$ ) angesehen werden kann, so hat man einfach zu den Zenitwinkeln  $\alpha_i$  mit den Radien  $\rho_i$  eine Folge von stetig und mit stetiger Tangente aneinanderschließenden Kreisbogen zu zeichnen, die dann das gesuchte Linienbild mit Annäherung darstellen. Das kommt darauf hinaus, die Funktion  $F(u)$  durch eine stückweise konstante Funktion zu ersetzen, sodass deren Funktionsbild in rechtwinkligen Koordinaten eine Treppenkurve wird (Abb. 20). In gewissen Fällen mag das nicht genau genug scheinen. Man kann aber wohl immer mit genügender Genauigkeit



die Funktion durch ein Polygon ersetzen (Abb. 21). Als dann ist aber ihre Ableitung durch eine Treppenkurve ersetzt und es lässt sich infolgedessen die Evolute C' von C durch eine Folge von Kreisbogen wie beschrieben konstruieren. Man hat dann einfach nachträglich noch zu C' die Evolvente zu zeichnen, um zum gesuchten Linienbild C zurückzugelangen.

Der beschriebenen Konstruktion, die wir als die *Konstruktion aus den Krümmungsradien* bezeichnen, kann eine zweite an die Seite gestellt werden, die wir die *Evolventenkonstruktion* nennen wollen. Sie illustriert einfach den Umstand, dass man das Integral einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung durch blosse Quadraturen finden kann, wenn die Lösung der homogenen Gleichung bekannt ist, was hier der Fall ist. Wir werden auf die anschaulichste Weise zu dieser Darstellung gelangen, indem wir auf die geometrische Deutung zurückgehen.

Seien wie früher  $x, y$  (Abb. 4) die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes  $P_u$  von  $g(u)$  mit dem Linienbild C. Sei ferner  $s$  die auf C gemessene Bogenlänge,  $ds$  das Linienelement  $P_u P_{u+du}$ , das der Winkeländerung  $du$  entspricht. Dann gelten die Formeln

$$\begin{aligned} ds &= \rho du = F(u) du, \\ dx &= -ds \sin(u), \\ dy &= +ds \cos(u) \end{aligned}$$

und also

$$\frac{dx}{du} = -F(u) \sin(u) \quad \frac{dy}{du} = F(u) \cos(u)$$

$-F(u) \sin(u)$  und  $F(u) \cos(u)$  sind also die Stützfunktionen für zwei Kurven  $C_x$  und  $C_y$ , deren Evolventen die Funktionen  $x(u)$  und  $y(u)$  zu Stützfunktionen haben. Sind sie ermittelt, so ergibt sich direkt ohne neue Integration

$$\begin{aligned} p(u) &= x(u) \cos(u) + y(u) \sin(u) \\ p'(u) &= -x(u) \sin(u) + y(u) \cos(u) \end{aligned}$$

Da sich Evolventen mit grosser Genauigkeit zeichnen lassen, wird es sich gelegentlich empfehlen, trotz der etwas grösseren Zeichenarbeit diese Evolventenmethode anzuwenden.

*Anwendung auf die Biegung eines halbkreisförmigen Stabes.*

Ein krummer Stab von Halbkreisform ABCDE (Abb. 22) sei an einem Ende A eingespannt und durch drei Kräfte,  $K$  in D,  $2K$  am freien Ende E und  $3K$  in C

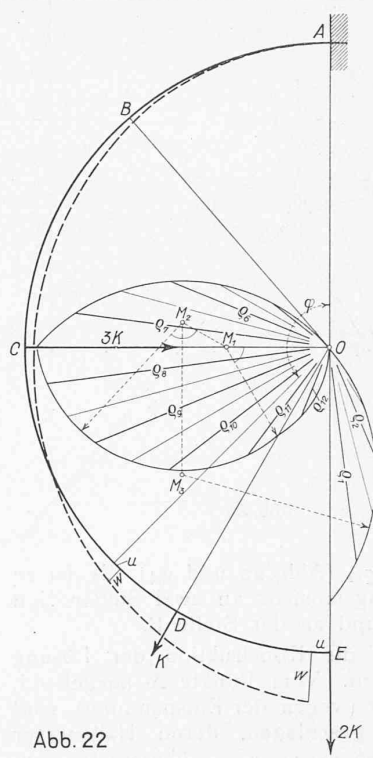


Abb. 22

belastet. Die beiden ersten wirken radial nach aussen, die letzte radial nach innen. Es sei die Deformation des Stabes zu suchen.

Der Schwerpunkt eines zum beliebigen Winkel  $\varphi$  gehörigen Querschnittes verschiebe sich um den Betrag  $u$  in der Richtung tangential zur Stabaxe im Sinne des wachsenden Winkels  $\varphi$ , und um den Betrag  $w$  radial nach aussen. Es bezeichne  $M(\varphi)$  das Biegemoment für diesen Querschnitt. Die Theorie kreisförmig gekrümmter Stäbe<sup>1)</sup> führt dann für  $w$  und  $u$  zu den Differentialgleichungen von Boussinesq:

$$\begin{aligned} w + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} &= -M(\varphi) \frac{a^2}{B} \\ u &= -\frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Hier ist  $a$  der Halbmesser des Kreises, in den die Stabaxe gebogen ist,  $B$  ist die sogen. Biegungsteifigkeit des Stabes. Es genügt sonach  $w$  der Gleichung der erzwungenen Schwingung und es stimmt die Störungsfunktion  $F$  der allgemeinen Theorie abgesehen vom konstanten Faktor  $-\frac{a^2}{B}$  mit dem Biegemoment überein.

Es ist indessen zu beachten, dass der Winkel  $u$  der Theorie hier durch  $\varphi$  und die Funktion  $p$  durch  $w$  ersetzt ist, und dass der Buchstabe  $u$  hier eine andere Bedeutung hat.

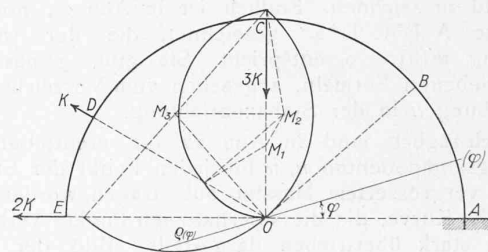


Abb. 23

In Abb. 23 ist zunächst ein Polardiagramm des Biegemomentes unter Mitberücksichtigung des Faktors  $+a^2/B$  dargestellt, d. h. es sind die Krümmungsradien  $\rho$  des zu konstruierenden Linienbildes in jedem Schnitt  $\varphi$  vom Zentrum O des Kreises aus aufgetragen. Da das Biegemoment für jedes der drei Felder AC, CD, DE von der Form

$$l \cos(\varphi) + m \sin(\varphi)$$

ist, setzt sich das Polardiagramm aus drei Kreisbogen zusammen, die durch das Zentrum O gehen. Man findet die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Kreise in den Ecken des Vektorpolygons, das entsteht, wenn man die radial wirkenden Kräfte der Reihe nach um einen rechten Winkel dreht, mit dem Faktor  $a^2/2B$  multipliziert und zusammensetzt.

Das Intervall von 0 bis  $180^\circ$  wurde in zwölf Intervalle von  $15^\circ$  eingeteilt und als konstanter Mittelwert des Krümmungsradius in einem Intervall wurde der Wert von  $\rho$  für die Intervallmitte gewählt. So ergaben sich zwölf

<sup>1)</sup> Vergl. hierzu etwa: Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 181, 182. Man hat in der Formel (2) S. 181 die Axialdehnung  $\epsilon = 0$  zu setzen.

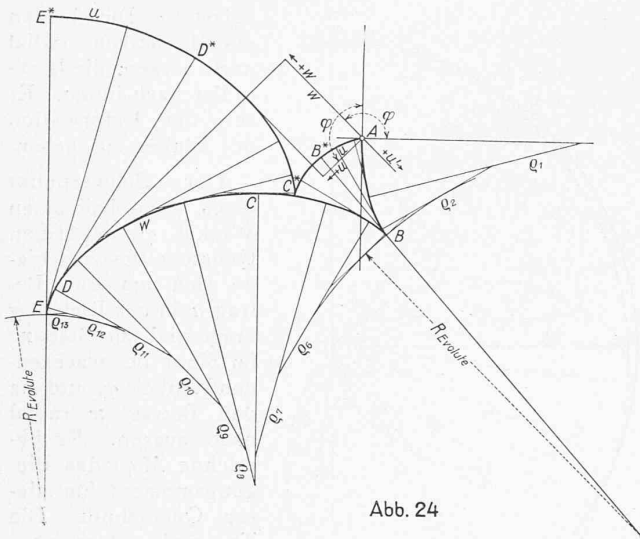


Abb. 24

Krümmungsradien  $\rho_1$  bis  $\rho_{13}$  (Abb. 22 und 24). Es ist zu beachten, dass das Bieugungsmoment an zwei Stellen Null wird, am freien Ende E und an der Stelle B.

Abb. 24 zeigt nun die Konstruktion der Lösung aus den Krümmungsradien. Vom Punkte A ausgehend, wo  $w(o) = 0$ ,  $w'(o) = 0$  ist (wegen der Einspannung), sind Kreisbogen von je  $15^\circ$  geschlagen, deren Halbmesser sukzessive mit den Grössen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$  übereinstimmen. In der Nähe der Stelle B werden indessen die Radien so klein, dass die Konstruktion einer Ergänzung bedarf. Das Linienbild hat dort eine Spitze, die sich aus den kleinen Radien nur ungenau zeichnen lassen würde. Es ist deshalb dort die Evolute gezeichnet, die einen nicht verschwindenden Krümmungsradius

$$\rho' = -\frac{a^2}{B} \frac{dM}{d\varphi}$$

hat, und das Linienbild in der Umgebung von B wird durch die Evolute dieser Kurve ersetzt. Der gleiche Kunstgriff ist verwendet, um am freien Ende E das Linienbild zu zeichnen. Endlich ist in Abb. 24 noch die Evolute  $A^*B^*C^*D^*E^*$  gezeichnet, die der Anfangsbedingung  $w'(o) = 0$  entspricht. Sie gibt, gemäss den angeschriebenen Formeln, abgesehen vom Vorzeichen, die Verschiebung  $u$  in der Stabaxenrichtung.

Nachträglich sind in Abb. 22 die ermittelten Verschiebungskomponenten  $u, w$  für jeden Punkt der Stabaxe in stark vergrössertem Masstab aufgetragen worden. Die gestrichelte Kurve, die die so erhaltenen Punkte verbindet, gibt das stark übertrieben dargestellte Bild der deformierten Stabaxe.

Wenn auch zu bemerken ist, dass in dem behandelten Beispiel die Lösung analytisch streng gefunden werden könnte, so ist es doch ein Vorteil dieser graphischen Methode, dass sie selbst bei ganz beliebiger Lastverteilung einfach und übersichtlich bleibt, während schon in dem hier behandelten Beispiel von nur drei Lasten die analytischen Rechnungen umständlich werden. Denn das Bieugungsmoment folgt in den drei Feldern drei verschiedenen analytischen Gesetzen. Man hat daher die Differentialgleichungen dreimal zu integrieren und, was besonders umständlich ist, die Teillösungen stetig und mit stetiger Ableitung aneinander anzupassen. Dieser Prozess wird für grössere Lastenzahl praktisch fast undurchführbar. Die Verhältnisse sind denen beim geraden Stab ganz analog. In der graphischen Darstellung entspricht der Culmannschen Momentenfläche das aus Kreisbogen sich zusammensetzende Polardiagramm des Bieugungsmomentes.

*Lösung der gleichen Aufgabe mit der Evolventenkonstruktion.*

Die Abb. 25 enthält zunächst wieder das Polardiagramm des Krümmungshalbmessers  $\rho$  für das zu konstruierende Linienbild von  $w$ . Für den hervorgehobenen

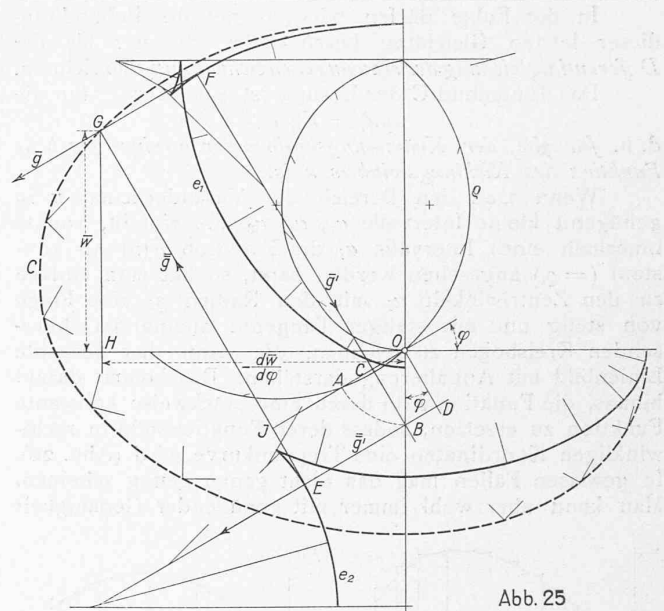


Abb. 25

Winkel  $\varphi$  ist er negativ, sein Absolutwert ist durch die Strecke OA dargestellt. Es sind nun die zu den Funktionen  $-\rho \sin(\varphi)$  und  $\rho \cos(\varphi)$  gehörigen Stützlinien  $\bar{g}'$  und  $\bar{g}$  konstruiert. Dazu hat man die Strecke OA auf OB übertragen und durch B die Parallele  $\bar{g}$  bzw. die Normale  $\bar{g}'$  zu OA gezogen. Sie haben von O die Abstände  $-\rho \cos(\varphi)$  und  $-\rho \sin(\varphi)$ . Dementsprechend ergeben sich für die Stützlinien die in der Figur eingezeichneten Pfeile.

Zum System der Geraden  $\bar{g}$  ist nun irgend eine Evolute  $e_2$  gezeichnet, die also bis auf eine Integrationskonstante genau die Funktion  $y(\varphi)$  darstellt, und zwar hat man, entsprechend dem Pfeilsinn der Stützlinien, die Beziehung

$$-y = OJ = DE.$$

Analog liefert die Orthogonaltrajektorie  $e_1$  zu den Geraden  $\bar{g}'$  bis auf eine additive Integrationskonstante genau die Funktion  $x(\varphi)$  und zwar ist

$$x = JG = CF$$

Demgemäss stellen die Strecken

$$HG = JG \cos \varphi - JO \sin \varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \bar{w}$$

und

$$HO = JG \sin \varphi + JO \cos \varphi = x \sin \varphi - y \cos \varphi = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi}$$

bis auf eine harmonische Funktion mit der Periode  $2\pi$  genau die Funktionen  $w(\varphi)$  und  $w'(\varphi)$  dar.

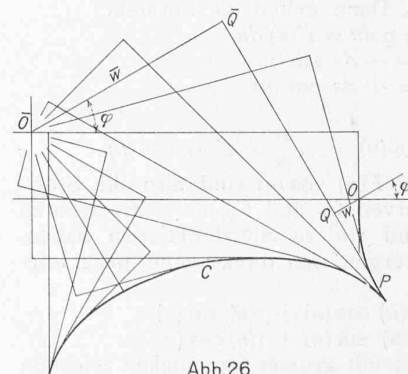


Abb. 26

In Abb. 26 ist das Linienbild der so gefundenen Funktion  $\bar{w}(\varphi)$  von einem Anfangspunkt O aus aufgetragen. Um die wahre Funktion  $w$  zu finden, sind jetzt noch die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Das geschieht nach früherem durch Verlegung des Anfangspunktes nach einer Stelle O, die eindeutig dadurch bestimmt ist, dass für die von dort aus gemessene Stützfunktion der selben Kurve  $w(o)$  und  $w'(o)$  verschwinden. Es ist jetzt

$$-w(\varphi) = OQ \quad -\frac{\partial w}{\partial \varphi} = QP = u$$

womit die Verschiebungskomponenten wieder gefunden sind. (Forts. folgt.)