

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 25

Artikel: Die Reibung in Gleitlagern
Autor: Bosch, M. Ten
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45511>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Reibung in Gleitlagern. — Das Basler Kunstmuseums-Projekt. — Eidg. Amt für Wasserwirtschaft, 1931. — Jubiläumfeier fünfzig Jahre Gotthardbahn. — Zum Kapitel Berufsmoral. — Wärmehäuser für Zentralheizungen. — Zur Wegwahl des Kantonsingenieurs von Obwalden. — Mitteilungen: Der Oxymetallgleichrichter von Westinghouse. Achsbrücke von Eisenbahnfahrzeugen. Grossdrehbank mit elektrischer Steuerung. Die neue Schlachthofbrücke in Dresden. Eine Diskussionstagung über Unfallverhütung in Industrie- und Baubetrieben. Das Kraftwerk Cize-Bolozon. Eine „Zürcher Autoschau“. — Nekrologe: Ludwig Mathys. — Wettbewerbe: Bauplan der Stadt Lausanne. Neubau des Kollegienhauses der Universität Basel. Schmuckbrunnen zum Andenken an Prof. Dr. August Forel in Zürich. — Literatur.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 25

Die Reibung in Gleitlagern.

Von Prof. M. TEN BOSCH, E. T. H., Zürich.

Die Theorie der Reibung geschmierter Flächen¹⁾ gehört heute zu den wichtigsten Grundlagen des Maschinenbaues. Da die Trägheitskräfte dabei vernachlässigbar sind, beruht sie ausschliesslich darauf, dass bei der Strömung physikalischer Flüssigkeiten Schubspannungen τ auftreten, die dem Geschwindigkeitsgefälle dw/dy proportional sind:

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy} \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor η (kg s/m^2) wird *Zähigkeitszahl* genannt. Die Schlussfolgerungen der Theorie stimmen mit der Erfahrung gut überein. Ihre Zuverlässigkeit wird aber noch oft bezweifelt, weil gelegentlich abweichende Versuchsergebnisse bekannt werden. Namentlich von Seiten der Chemiker wird immer wieder behauptet, dass nicht die Zähigkeit des Oeles für die Schmierfähigkeit allein massgebend ist, sondern auch die sog. Schlüpfrigkeit (Oiliness, Onctuosité), eine wesentliche Rolle spielt. Diese Schlüpfrigkeit wird in den verschiedenen Veröffentlichungen sehr verschieden umschrieben.²⁾ Es handelt sich dabei nicht um eine klar definierte physikalische Eigenschaft der Flüssigkeiten, sondern es soll die Wirkung der molekularen Kräfte in den Grenzschichten erfasst werden. Die molekularen Kräfte wirken aber nur in einem Bereich von der Grössenordnung des Moleküldurchmessers, während die kleinsten in der Praxis vorkommenden Oelspalte (etwa 0,001 mm) noch 10^4 mal grösser als der Moleküldurchmesser sind. Es ist also sehr unwahrscheinlich, dass die Molekularkräfte etwas anderes bewirken, als dass die Flüssigkeit an den Grenzflächen *haftet*.

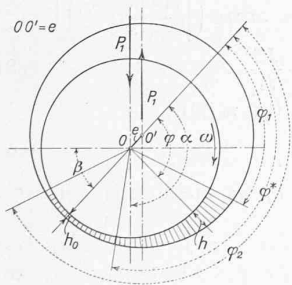


Abb. 1.

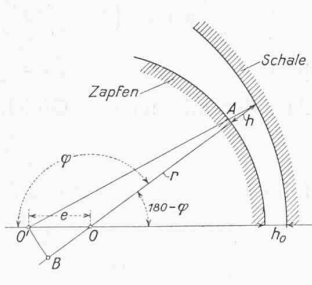


Abb. 2.

Die bekannte Gleichung für die eindimensionale Flüssigkeitströmung lautet ³⁾:

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta U \frac{h-h^*}{h^3} \quad (2)$$

Für Zapfenlager (Abb. 1) ist $dx = r d\varphi$; U ist die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens und h^* eine Integrationskonstante, nämlich jene Schmiermitteldicke, für die $dp/dx = 0$, also p ein Maximum wird. Die veränderliche Höhe h ist

¹⁾ Die vier grundlegenden Arbeiten der hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung (Petroff, Reynolds, Sommerfeld & Michell) sind zusammengefasst in Oswalds Klassiker, Nr. 218, Leipzig 1927. Das Buch von Falz, „Grundzüge der Schmiertechnik“, 2. Auflage, Springer, Berlin, hat viel dazu beigetragen, die Schlussfolgerungen der Theorie in Ingenieurkreisen einzuführen; leider kommen die theoret. Grundlagen darin zu kurz.

²⁾ Eine vollständige Zusammenstellung aller mit der Schlüpfrigkeit zusammenhängenden Fragen gibt P. Woag: „Contribution à l'étude du graissage“, Paris 1925, Delagrave.

³⁾ Vergl. z. B. meine Vorlesungen über Maschinenelemente, Heft III, S. 32, Gl. (27). Jul. Springer, Berlin. Das Weglassen des Minus-Zeichens erklärt sich dadurch, dass U in Abb. 1 in der positiven X-Richtung wirkt.

trischer Steuerung. Die neue Schlachthofbrücke in Dresden. Eine Diskussionstagung über Unfallverhütung in Industrie- und Baubetrieben. Das Kraftwerk Cize-Bolozon. Eine „Zürcher Autoschau“. — Nekrologe: Ludwig Mathys. — Wettbewerbe: Bauplan der Stadt Lausanne. Neubau des Kollegienhauses der Universität Basel. Schmuckbrunnen zum Andenken an Prof. Dr. August Forel in Zürich. — Literatur.

durch die Form des Oelspaltes gegeben. Für Lager, deren Schalenradius um einen Betrag Δr grösser als der Zapfenradius ist (Abb. 1), folgt aus dem geometrischen Zusammenhang (Abb. 2):

$$h + r + e \cos(180 - \varphi) = r + \Delta r^4$$

$$\text{oder } h = \Delta r - e \cos(180 - \varphi) = \Delta r + e \cos \varphi \quad (3)$$

Um allgemeine, von der Lagergrösse unabhängige Beziehungen zu erhalten, werden dimensionslose Grössen eingeführt, nämlich:

$$\varrho = \Delta r/r, \text{ das relative Lagerspiel, und} \\ \varepsilon = e/\Delta r, \text{ die relative Exzentrizität.}$$

$$\text{Damit wird: } h = \Delta r (1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (3a)$$

und die kleinste Schmiermitteldicke h_0 , für $\varphi = 180^\circ$:

$$h_0 = \Delta r (1 - \varepsilon) \quad (4)$$

Nur im Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ nimmt die Oelschichtdicke stetig ab; ausserhalb dieses Gebietes sind die Oelschichten divergent, womit Druckverminderung und Zerreißen der Schicht verbunden sind. Mit den Werten von h und h^* lautet die Differentialgleichung (2):

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{6\eta\omega}{\varrho^2} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} - \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi^*}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \right) \quad (5)$$

worin φ^* der Winkel ist, für den p ein Maximum wird. Durch Integration zwischen einem zuerst beliebigen angenommenen Eintrittswinkel φ_1 und dem beliebigen φ erhält man den Druck p an der Stelle φ :

$$p = \frac{6\eta\omega}{\varrho^2} [j_2 - (1 + \varepsilon \cos \varphi^*) j_3] \quad (6)$$

worin die Symbole j_2 bzw. j_3 Abkürzungen für die beiden

Integrale $\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}$ bzw. $\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3}$ sind.

$$\text{Setzt man: } \frac{\varepsilon + \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \cos \gamma$$

$$\text{so wird: } 1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{\varepsilon + \cos \varphi}{\cos \gamma}$$

$$\text{und } 1 - \varepsilon \cos \varphi = 1 - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$\text{oder } 1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \gamma}$$

Durch Differentiation erhält man:

$$\sin \varphi d\varphi = - (1 - \varepsilon^2) \frac{\varepsilon \sin \gamma d\gamma}{(1 - \varepsilon \cos \gamma)^2}$$

$$\text{Nun ist } \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \sqrt{(1 - \varepsilon^2) - \cos^2 \varphi (1 - \varepsilon^2)}$$

$$\text{oder } \sin \gamma = \frac{\sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Damit wird

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3} d\gamma}{(1 + \varepsilon \cos \varphi) (1 - \varepsilon \cos \gamma)^2} = \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3} d\gamma}{(1 - \varepsilon \cos \gamma) (1 - \varepsilon^2)} \\ = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \gamma} d\gamma$$

mit diesen trigonometrischen Substitutionsformeln wird:

$$j_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}} \int_{\gamma_1}^{\gamma} (1 - \cos \gamma) d\gamma \\ = \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}} [(\gamma - \gamma_1) - \varepsilon (\sin \gamma - \sin \gamma_1)] \quad (I)$$

und

$$j_3 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^5}} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) (\gamma - \gamma_1) - 2\varepsilon (\sin \gamma - \sin \gamma_1) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{4} (\sin 2\gamma - \sin 2\gamma_1) \right] \quad (II)$$

⁴⁾ Die exakte Gleichung für h ist viel verwickelter (Wolff, Forschungsheft 308 S. 17); die hier gemachte Vereinfachung ist aber durchaus zulässig, weil der Fehler nur etwa 0,3% beträgt.

Im Interesse einer Vereinfachung der Rechnung ist die Zähigkeit des Oeles bei der Integration als unveränderlich angenommen. Nun nimmt aber die Zähigkeit aller Oelsorten mit zunehmender Temperatur ab und bei grossen Drücken ist η auch noch vom Druck abhängig. Die Erfahrung muss zeigen, ob die Wahl einer mittlern Temperatur ausreicht, um die Veränderlichkeit der Zähigkeit mit praktisch genügender Genauigkeit zu berücksichtigen.

Die Gleichung (6) muss den Grenzbedingungen genügen, dass — wenn das Oel ohne Ueberdruck zu- und abfliessen kann — für $\varphi = \varphi_1$ und für $\varphi = \varphi_2$ (Austritt) $p = 0$ ist. Die erste Bedingung ist immer erfüllt, weil für $\varphi = \varphi_1$ die Integrale J_2 und J_3 Null werden. Die zweite Bedingung führt zu der Gleichung:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} - (1 + \varepsilon \cos \varphi^*) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} = 0$$

oder mit den abgekürzten Bezeichnungen J_2 und J_3 für die zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 integrierten Integrale:

$$J_2 - (1 + \varepsilon \cos \varphi^*) J_3 = 0$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{J_2}{J_3} = 1 + \varepsilon \cos \varphi^* = \frac{h^*}{\Delta r} \quad (7)$$

$$\text{und damit} \quad p = \frac{6\eta\omega}{\varrho^2} \left(J_2 - \frac{J_2}{J_3} J_3 \right) \quad (8)$$

Zum Nachprüfen der rechnerischen Druckverteilung haben Gümbel⁵⁾, Lasche⁶⁾ und Andere Versuche durchgeführt und eine gute Uebereinstimmung gefunden. Die genauen Druckmessungen von R. E. Stanton im Nat. Phys. Laboratorium⁷⁾ mit verschiedenen Oelsorten bestätigen die Gl. (7) auch für Oelspalten bis 0,001 mm (Abb. 3). Es ist demnach gar nicht daran zu zweifeln, dass die Voraussetzungen der Theorie ausreichend und richtig sind.

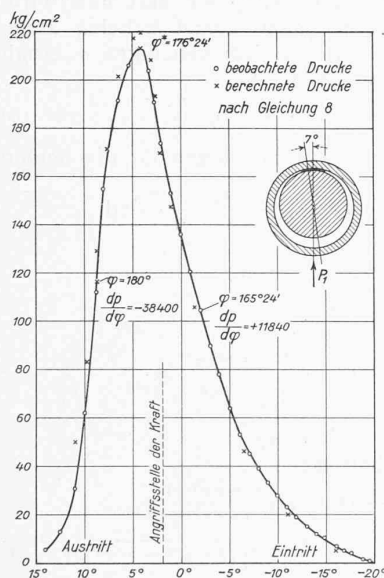


Abb. 3. Versuche von R. E. Stanton.

Die äusseren Kräfte, die auf dem Zapfen wirken, sind: a) Die totale Belastung P , die in der vertikalen Richtung durch O wirkend gedacht ist, unter der Voraussetzung, dass keine zusätzlichen Kräfte wirken, die z. B. vom unvollständigen Massenausgleich der drehenden Teile herrühren können. b) Das zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Drehmoment M_d der Welle.

Nennen wir P_1 die Belastung und M_1 das Drehmoment der Welle, beide auf die Breitereinheit⁸⁾ des

⁵⁾ Gümbel-Everling. „Reibung und Schmierung im Maschinenbau“, M. Krayn, Berlin 1925.

⁶⁾ O. Lasche. „Konstruktion und Materialim Bau von Dampfturbinen“, Springer, Berlin.

⁷⁾ R. E. Stanton. „Cylindrical Journal Lubrication at high Values of the Excentricity“. Proc. Roy. Soc. Serie A, 1922, London, Vol. 102, S 241.

⁸⁾ Man spricht meist von der Lagerlänge. In Uebereinstimmung mit der ebenen Platte ist es zweckmässig, die Länge in der Bewegungsrichtung zu messen und die Breite senkrecht dazu. Man sollte demnach Lagerbreite sagen.

Zapfens bezogen, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen für den Zapfen:

$$P_1 \cos \alpha = r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p \cos \varphi d\varphi \quad (9)$$

$$P_1 \sin \alpha = r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p \sin \varphi d\varphi \quad (10)$$

und

$$M_1 = -r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_0 d\varphi \quad (11)$$

wenn der Winkel zwischen der Krafrichtung zwischen P und OO' mit α bezeichnet wird. Durch partielle Integration ($\int u dv = uv - \int v du$) der Gl. (9) erhält man:

$$P_1 \cos \alpha = r \left[p \sin \varphi \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} - r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{dp}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

Das erste Glied auf der rechten Seite wird Null, wenn der Druck p am Ein- und Austritt gleich Null ist. Mit dem Wert $dp/d\varphi$ aus Gl. (5) wird:

$$P_1 \cos \alpha = -\frac{6\eta U}{\varrho^2} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varepsilon \sin \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varepsilon \sin \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \right) = -\frac{6\eta U}{\varrho^2} \left(i_2 - i_3 \frac{J_2}{J_3} \right) = -\frac{6\eta U}{\varrho^2} S_2 \quad (12)$$

worin zur Abkürzung

$$i_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varepsilon \sin \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi_2} - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi_1} \quad (13)$$

$$i_3 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varepsilon \sin \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_2)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_1)^2} \right) \quad (14)$$

$$\text{und } S_2 = i_2 - i_3 \frac{J_2}{J_3} \quad (15)$$

gesetzt ist. In ähnlicher Weise findet man:

$$P_1 \sin \alpha = \frac{6\eta U}{\varrho^2} \left(J_1 - \frac{J_2^2}{J_3} \right) = \frac{6\eta U}{\varrho^2} S_1 \quad (16)$$

$$\text{mit } J_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\varphi_2}{2} \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \quad (17)$$

$$\text{und } S_1 = J_1 - \frac{J_2^2}{J_3} \quad (18)$$

Aus der allgemeinen Gleichung für τ_0 ¹⁴⁾

$$\tau_0 = -\left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{U\eta}{h} \right) \quad (19)$$

folgt mit den Werten von h und $dp/d\varphi$ aus den Gl. (3) u. (5):

$$\tau_0 = -\frac{\eta U}{\Delta r} \left(\frac{4}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 3 \frac{J_2}{J_3} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \right)$$

und damit die Reibungskraft für die Breitereinheit, am Zapfenumfang gemessen:

$$R_1 = r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_0 d\varphi = \frac{\eta U}{\varrho} \left(4J_1 - 3 \frac{J_2^2}{J_3} \right) \quad (20)$$

und das Reibungsmoment, das mit dem Moment M_1 im Gleichgewicht ist:

$$M_1 = -r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_0 d\varphi = \frac{\eta U r}{\varrho} \left(4J_1 - 3 \frac{J_2^2}{J_3} \right) \quad (21)$$

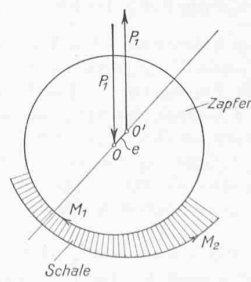


Abb. 4.

Da der Flüssigkeitsdruck p senkrecht zu den Oberflächen wirkt, muss die resultierende, auf die Lagerschale wirkende Kraft durch den Schalenmittelpunkt O' gehen. Diese Resultierende ist gleich dem resultierenden Druck der Oelschicht P_1 auf dem Zapfen, der durch den Zapfenmittelpunkt O geht. Beide Kräfte sind parallel, wirken aber in der Entfernung $e \sin \alpha$ (Abb. 4). Die Schubspan-

nung τ_L an der Schalenoberfläche ist nicht gleich der Schubspannung τ_0 an der Zapfenoberfläche; demnach sind auch die Reibungsmomente am Zapfen und am Lager gemessen verschieden gross. Dieser schon von O. Reymond bei der Reibung ebener Gleitflächen hervorgehobene Unterschied wird bei der Zapfenreibung oft unbeachtet gelassen⁹⁾. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt sofort, dass

$$M_L = M_1 - P_1 e \sin \alpha \quad (22)$$

Aus Gl. (12) und (16) folgt die Lagerbelastung

$$P_1 = \frac{6\eta U}{\varrho^2} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \frac{\eta U}{\varrho^2} \Phi \quad (23)$$

$$\text{oder} \quad \Phi = \frac{F_1 \varrho^2}{\eta U} \quad (24)$$

und der Verlagerungswinkel α aus:

$$\tan \alpha = -S_1/S_2 \quad (25)$$

Die Reibungszahl, am Zapfen gemessen, $\mu_z = R_1/P_1$, wird dann:

$$\mu_z = \frac{4J_1 - 3\frac{J_2^2}{J_3}}{\sqrt{\Phi}} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = k \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (26)$$

oder auch

$$\mu_z = \frac{4J_1 - 3\frac{J_2^2}{J_3}}{\Phi} \varrho = C \varrho \quad (27)$$

und die Reibungszahl μ_L am Lagerkörper gemessen:

$$\mu_L = \mu_z - \frac{e}{r} \sin \alpha = \mu_z - \varepsilon \varrho \sin \alpha \quad (28)$$

Die für die Schmierung erforderliche Oelmenge^{1) 4)} ist:

$$G_1 = \frac{U h^*}{2} = \frac{J_2}{J_3} \frac{U \Delta r}{2} \quad (29)$$

Die grösste Flächenpressung $p_{\max}$ in der Oelschicht ist:

$$p_{\max} = \frac{6\eta U}{\varrho^2} \left(j_2^* - \frac{J_2}{J_3} j_3^* \right) \quad (30)$$

wobei j^* den Wert des Integrales j für die Grenze $\varphi = \varphi^*$ ist. Mit der mittlern Flächenpressung $\bar{p} = P_1/2r$, wird:

$$\frac{p_{\max}}{\bar{p}} = \frac{12 \left(j_2^* - \frac{J_2}{J_3} j_3^* \right)}{\Phi} = E^* \quad (31)$$

Für die zahlenmässige Ausrechnung der Integrale müssen die Integrationsgrenzen φ_1 und φ_2 festgelegt werden. Wenn die Lagerschale den Zapfen vollständig umschliesst, hat der divergente Teil des Oelspalt zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$ keinen Anteil an der Tragfähigkeit (am Auftrieb) des Zapfens, weil darin dauernd keine Unterdrücke aufrecht erhalten werden können. Man integriert daher immer um die halbumschliessende Lagerschale. Der Eintrittswinkel φ_1 ist dort vorhanden, wo zuerst der Oelspalt vollständig mit Oel aufgefüllt ist. Es ist deshalb nicht in Uebereinstimmung mit den tatsächlich bei Lagern vorliegenden Verhältnissen, wenn $\varphi_1 = 0$ angenommen wird. Bei tiefliegendem Zapfen ($\varepsilon \sim 1$) z. B. und bei vertikaler Krafrichtung liegt $\varphi_1 = 0$ fast in der vertikalen Ebene, während das Oel meist in der horizontalen Ebene zugeführt wird. Gümbel wählt $\varphi_1 = \alpha - \pi/2$, also abhängig von dem veränderlichen Verlagerungswinkel α . Der Winkel φ_1 hängt von der Menge des zugeführten Oeles, von der Art der Oelzuführung und auch von der Krafrichtung ab. Die z. B. von einem losen Schmierring zugeführte Oelmengemenge ist von sehr vielen Faktoren abhängig, wie Oeltemperatur, Eintauchtiefe des Ringes, Drehzahl der Welle, Gewicht des Ringes, usw.¹⁰⁾ Jedenfalls ist die geförderte Oelmengemenge nicht mit der Drehzahl proportional, wie es notwendig wäre, damit immer die der Theorie entsprechende Oelmengemenge zur Verfügung steht. Bei Kraftwirkung nach oben (Abb. 3) kann der benetzte Umfang des Zapfens sehr klein werden, wie z. B. bei den Versuchen von R. E. Stanton.⁷⁾

Auch bei der Festlegung der Austrittsstelle φ_2 , wo der Druck wieder Null wird, treten verschiedene Schwierigkeiten auf. Gümbel hat zuerst $\varphi_2 = \pi$ angenommen,

d. h. die Stelle des engsten Oelquerschnittes dazu gewählt, weil auch die Zahlenrechnungen dadurch vereinfacht werden. Diese Annahme steht aber in Widerspruch mit der beobachteten Druckverteilung^{5), 9), 7), 11)}, die zeigt, dass an dieser Stelle der Druck noch etwa halb so gross ist, wie der maximale Oeldruck, und jedenfalls nicht gleich Null. Später hat Gümbel die Grenze φ_2 so festgelegt, dass an dieser Stelle $dp/d\varphi = 0$ und p ein Minimum wird. Diese Annahme steht in besserer Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, obschon ihre Formulierung physikalisch nicht genügend begründet ist. Man könnte die Stelle φ_2 hinter dem engsten Querschnitt vielleicht aus den Strömungsgesetzen ableiten. Jedenfalls ist auch φ_2 , wie z. B. die Versuche von W. Nücker zeigen¹⁰⁾, von einer grossen Anzahl Faktoren abhängig, die alle zum Voraus bei der Berechnung von Lagern kaum berücksichtigt werden können. Nach den vorliegenden Messungen liegt φ_2 etwa zwischen $\pi + 3$ bis 5° (für $\varepsilon \sim 1$) und $\pi + 15^\circ$ bei ε etwa 0,5, je nach dem Lagerspiel.

Aber auch wenn die Lage von φ_2 genau festgelegt werden könnte, sind damit noch nicht alle Schwierigkeiten überwunden. An dieser Stelle wird wohl der Druck gleich Null und damit das wirksame Gebiet des Auftriebes begrenzt, aber nicht gleichzeitig auch die Schubspannungen. Meist liegt der Oelaustritt in der horizontalen Ebene, sodass der Oelspalt in dem Winkel von φ_2 bis $\pi/2 + \alpha$ noch vollständig mit Oel gefüllt bleibt. Wenn das Oel reichlich und mit Ueberdruck zugeführt wird, und wenn die obere Lagerschale ungenügend ausgespart ist, wird auch in der unbelasteten Lagerhälfte ein zusätzliches Reibungsmoment M_1' entstehen:

$$M_1' = r^2 \int_{\pi}^{2\pi} \tau_0' d\varphi \quad (32)$$

Wenn wir voraussetzen, dass der ganze Raum dort mit Oel unter einem konstanten Druck gefüllt ist, so ist $dp/d\varphi = 0$ und im Oelspalt eine lineare Geschwindigkeitsverteilung vorhanden, sodass $\tau_0' = \eta U/h$ ist. Dann wird:

$$M_1' = \frac{r^2}{\Delta r} \eta U \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{r^2}{\Delta r} \eta U \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (33)$$

Um diesen Betrag (etwa 100 %) wird das Reibungsmoment des Lagers und damit auch die Reibungszahl μ nutzlos erhöht.¹²⁾ Der Konstrukteur wird diesen ungünstigen Fall nach Möglichkeit zu vermeiden suchen.

Wenn eine bestimmte Lagerkonstruktion und eine bestimmte Belastung vorliegt, könnte man eventuell die verschiedenen Faktoren, die die Grenzen φ_1 und φ_2 beeinflussen, bei der Berechnung berücksichtigen. Will man aber für den Konstrukteur eine allgemeine Rechnungsgrundlage schaffen, so muss auf die Berücksichtigung solcher Feinheiten bei der Festlegung von φ_1 und φ_2 verzichtet werden, damit die Rechnung für den praktischen Gebrauch eine genügend einfache Form erhält.

Glücklicherweise lassen sich einige Vereinfachungen ohne wesentliche Beeinträchtigung der Genauigkeit des Resultates einführen. Der Eintrittswinkel φ_1 muss veränderlich angenommen werden; er kann zwischen 0 und fast 180° liegen. Dieser letzte Wert kommt etwa bei Tropf- oder Dochtschmierung vor oder wenn die obere Lagerschale belastet wird. Das Ende des Druckgebietes wird bei $\varphi_2 = \pi$ angenommen. Der Fehler, der dadurch entsteht, dass in Wirklichkeit $\varphi_2 = \pi + 3$ bis 15° ist, kann durch eine entsprechende Aenderung der Eintrittsstelle φ_1 kompensiert werden. Da der Druckverlauf bei $\varphi = \pi$ sehr steil und bei $\varphi = 0$ nur schwach steigend ist, muss die Eintrittskante um einen grösseren Winkel als 3 bis 15° zurückverlegt werden, damit der Auftrieb in beiden Fällen gleich bleibt. Dadurch wird dann gleichzeitig die zusätzliche Reibung von $\varphi = \pi$ bis Oelaustrittskante zum Teil berück-

¹¹⁾ W. Nücker. „Ueber den Schmiervorgang im Gleitlager“. Forschungsheft 352, V. D. I. 1932.

¹²⁾ Die Versuche von Nücker zeigen deutlich eine Vergrösserung des Reibungsmomentes mit zunehmender Oelmengemenge.

⁹⁾ R. O. Boswall hat in seinem Buch (das wohl die beste Zusammenfassung aller theoretischen Grundlagen ist) „The Theorie of Film Lubrication“, Longmans, Green & Co., London 1928, Seiten 201/204 vielleicht zuerst ausführlich darauf hingewiesen. Beim dritten internationalen Kongress für techn. Mechanik in Stockholm, hat Prof. Ch. Hanocq, Lüttich, darüber einen Vortrag gehalten (Verhandlungen, Bd. I, S. 298).

¹⁰⁾ Karelitz, Transact. Am. Soc. Mech. Eng. 1930, Bd. 80, I. APM 52, 5.

sichtigt. Eventuell müsste bei sehr ungünstigem Oelabfluss ein Zuschlag gemacht werden, der durch Einsetzen der Grenzen aus Gleichung (32) berechnet werden kann.

Unter diesen Grenzbedingungen sind die Integrale berechnet worden¹³⁾; das Resultat ist in Abb. 5 in Abhängigkeit von Φ dargestellt. Nur für die genaue Lage des Zapfens, d. h. für die Berechnung des Verlagerungswinkels α ist die Vereinfachung $\varphi_2 = \pi$ nicht zulässig. Die Zapfenlagen sind für die beiden Grenzbedingungen $\varphi_2 = \pi$ und $\varphi_2 = \pi + 10^\circ$ und für verschiedene Eintrittswinkel φ_1 in Abb. 6 eingezeichnet. Aus dieser Abbildung geht hervor, dass die Bahn der Wellenmitte nicht immer mit dem Halbkreis zusammenfällt, wie meist vorausgesetzt wird. Die berechneten Kurven werden durch manche Beobachtungen sehr gut bestätigt¹⁴⁾; so hat M. Stone⁹⁾ bei einem Ringschmierlager die in Abb. 7 dargestellte Bahn der Wellenmitte beobachtet. Sie lässt sich durch die Beeinflussung der Grenzbedingungen φ_1 und φ_2 durch die zugeführte Oelmenge zwanglos erklären.

Man kann die Grösse Φ , durch die alle Eigenschaften des Lagers eindeutig festgelegt sind, als „Lagerkennzahl“ bezeichnen. Aus der Differentialgleichung (2) folgt allgemein, dass alle Zähigkeitströmungen ähnlich sind, für die $p d/\eta U$ konstant ist. Diese Grösse hat eine ähnliche Bedeutung wie etwa die Reynolds'sche Zahl für andere Flüssigkeitsströmungen und könnte als *Gümbel'sche Zahl* ($Gü = p d/\eta U$) bezeichnet werden. Durch die Festlegung der Form des Oelspaltes kommt eine weitere Einschränkung hinzu. Für Zapfenlager mit dem Lagerspiel ϱ ist $\Phi = \varrho^2 Gü$ für die schwach geneigte Platte, ist $(h_0/a)^2 Gü$ die kennzeichnende Grösse.

Die theoretische Untersuchung beschränkte sich auf eindimensionale Flüssigkeitströmungen. Für *endliche Lagerbreiten* muss das seitliche Abfließen berücksichtigt werden, wodurch die Tragfähigkeit des Lagers verkleinert wird. Die Verminderung der Tragfähigkeit kann man durch Einführung eines Korrekturfaktors berücksichtigen. Nach Gümbel ist (Abb. 8):

für b/l $= \infty$ 5 3,3 2 1 0,5
 der Korrekturfaktor $= 1$ 0,98 0,92 0,83 0,54 0,23
 oder $1/\text{Faktor} = f_b = 1$ 1,02 1,08 1,21 1,83 4,35
 Für Zapfenlager ist an Stelle der Plattenlänge l die Länge der tragfähigen Oelschicht, also $r(\varphi_2 - \varphi_1)$ einzusetzen.

¹³⁾ Die Integration wurde bis jetzt ausschliesslich graphisch durchgeführt. Vergl. z. B. Karelitz „Charts for Studying the Oil Film in Bearings“, Trans. Am. Soc. Mech. Eng. Vol. 47 (1925) S. 1101 oder Ch. Hommel „Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager“, Forschungsheft 287 V.D.I. 1926. Da die Integrale sich in geschlossener Form darstellen lassen, ist die analytische Berechnung sicher vorzuziehen.

¹⁴⁾ Vergl. z. B. die Versuche von M. Stone bei der Westinghouse Co., oder die noch unveröffentlichten Messungen von R. Bühler in Cambridge.

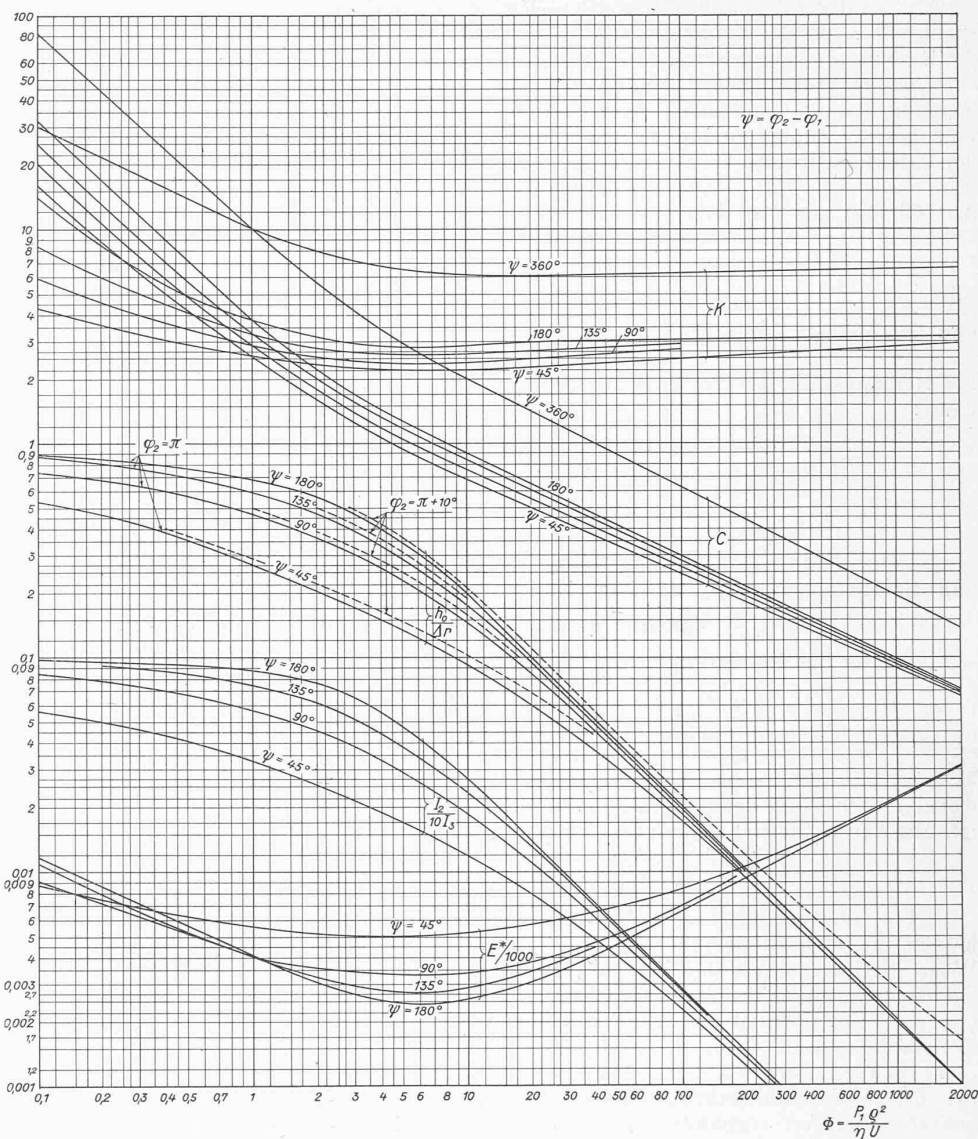


Abb. 5. Werte von C , K , h_0/lr von E^* zur Berechnung von Zapfenlagern.

Der Korrekturfaktor f_b ist demnach auch von den Grenzbedingungen abhängig.

Man kann nun den Zapfen mit einem *gleichwertigen*, unendlich breiten vergleichen, der die gleiche Lage im Lager einnehmen würde, wie der Zapfen von endlicher Breite. Dazu müsste die Belastung f_b -mal grösser sein, und der Wert $\Phi = \frac{P_1 \varrho^2}{\eta U}$ ändert sich zu $\Phi' = f_b \Phi$. Durch den Wert Φ' ist dann die Reibungskraft R_1 nach Gl. (20) und mit Abb. 5 bestimmt. Die Reibungszahl μ_z wird aber f_b -mal grösser, weil die tatsächliche Belastung des Zapfens nicht $f_b P_1$, sondern nur P_1 ist. Man findet also die Reibungszahl für endliche Lagerbreiten aus

$$\mu_{\text{endl}} = f_b C \varrho \quad (34)$$

worin C für Φ' aus Abb. 5 zu entnehmen ist: oder auch

$$\mu_{\text{endl}} = K \sqrt{f_b} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (35)$$

mit den K -Werten für Φ' aus Abb. 5.

Nur der Vergleich mit den Beobachtungen kann darüber entscheiden, ob die bei der Ableitung gemachten Vereinfachungen praktisch zulässig sind. Zum direkten Vergleich eignen sich nur die an der Welle gemessenen Reibungsmomente. Bei Messung des Reibungsmomentes an der Lagerschale müssen gleichzeitig Exzentrizität und Verlagerungswinkel α beobachtet werden.

Neue, sehr sorgfältige Versuche mit direkter Messung des Reibungsmomentes an der Welle liegen vor von Dr. E. Schneider¹⁵⁾; sie sind in Abb. 9 mit den theoretischen Kurven verglichen. Die Uebereinstimmung ist sehr gut; dass die Versuchspunkte nicht genau auf der 180°-Linie liegen, sondern etwas tiefer, etwa bei 135° benetztem Umfang, lässt sich dadurch erklären, dass der Oelzufluss während der Versuchsdauer (etwa 10 min) abgestellt wurde. Weiter sind in der Abbildung noch die Versuche von R. E. Stanton im Nat. Phys. Lab. eingetragen. Stanton hat das Reibungsmoment an der Lagerschale gemessen, gleichzeitig aber auch Exzentrizität und Verlagerungswinkel beobachtet. Auch hier, bei ganz anderen Φ -Werten, ist die Uebereinstimmung sehr gut, sodass gesagt werden kann, dass — trotz den Vereinfachungen — die Theorie sich für den praktischen Gebrauch in sehr weiten Grenzen als durchaus zuverlässig erwiesen hat.

Für den Konstrukteur folgen aus der Theorie der Zapfenlager mit Lagerspiel die aus Abb. 5 ersichtlichen wichtigen Schlussfolgerungen:

1. Für Werte der Lagerkennzahl $\Phi < 2$ steigt die Reibungszahl sehr rasch an. Kleinere Kennzahlen als 2 sind also bei der Ausführung zu vermeiden.

2. Für Lagerkennzahlen grösser als 400 wird die kleinste Oelschichtdicke h_0 sehr klein ($h_0/\Delta r < 0,05$), sodass Zapfen und Lagerschale äusserst glatte Oberflächen erhalten müssen, um halbflüssige Reibung zu vermeiden. Dem Konstrukteur stehen dazu folgende Hilfsmittel zur Verfügung: Zapfen härten und schleifen oder durch Oberflächendrücken (Läppen) glätten, Einlaufenlassen mit kolloidalem Graphit (Kollag, Oildag). Die guten Gleiteigenschaften der Caro-Bronzerohr-Lager¹⁶⁾ beruhen vor allem auf der sorgfältigen Oberflächenbearbeitung.

3. In dem Gebiet der Lagerkennzahlen Φ von 2 bis 400 kann die Reibungszahl, unabhängig vom Lagerspiel,

$$\mu_z = (2,6 \text{ bis } 3) \sqrt{f_b} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (36)$$

gesetzt werden. Die genaue Festlegung des Zahlenfaktors folgt aus Abb. 5.

4. Das Verhältnis $\frac{p_{\max}}{p} = \frac{\text{grösste Flächenpressung}}{\text{mittlere Pressung}} = \frac{P_1}{b d} = E^*$ ist ausschlaggebend für die Wahl des Lagermetalles, weil $p_{\max}$ unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben muss. Für tiefliegende Zapfen, $\Phi < 1000$, ist die maximale Flächenpressung etwa 20 mal grösser als die mittlere!

¹⁵⁾ E. Schneider. „Versuche über die Reibung in Gleitlagern“. Dissertation, Karlsruhe 1929.

¹⁶⁾ Spezialbronze G. m. b. H., Berlin WS.

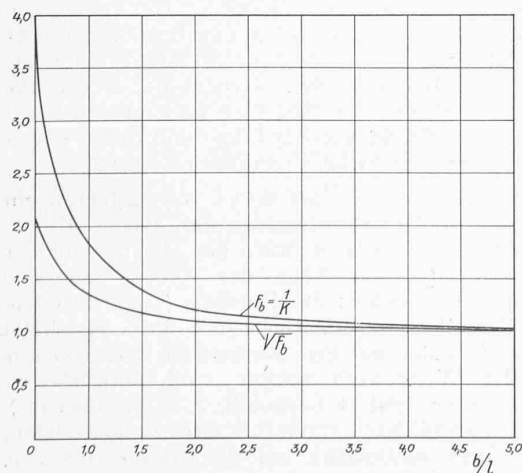


Abb. 8. Einfluss der Lagerbreite.

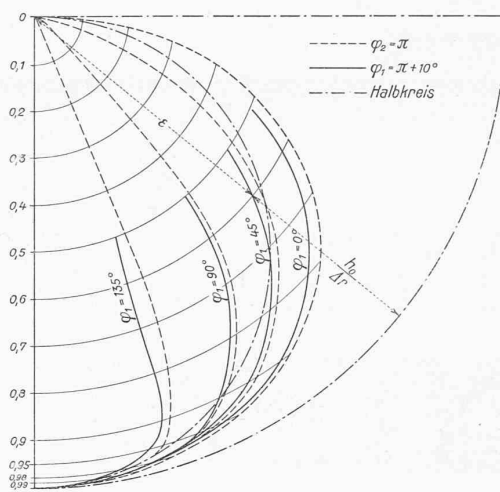


Abb. 6. Bahn der Wellenmitte bei verschiedenen Grenzbedingungen für φ_1 und φ_2

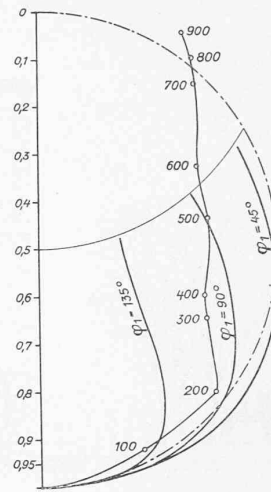


Abb. 7. Bahn der Wellenmitte nach Versuchen von Stone.

5. Aus den Kurven J_2/J_3 kann mit Gleichung (29) die minimal erforderliche Oelmenge berechnet werden. Dabei ist noch folgendes zu beachten. Das Oel wird durch die Reibung an der Zapfenoberfläche in den Oelspalt hineingezogen. Nur der Teil des benetzten Umfanges, der vor dem engsten Querschnitt liegt, ist an der Oelförderung beteiligt. Hier ist also die Integrationsgrenze $\varphi_2 = \pi$ richtig, sodass in Abb. 5 für die J_2/J_3 -Werte der benetzte Umfang ψ etwa zwischen 90° und 135° zu wählen ist, je nach Zapfenlage.

Durch die Verwendung von Abb. 5 ist die Vorausberechnung der Reibungszahlen so einfach geworden, dass jeder Konstrukteur davon Gebrauch machen sollte.

*

Zahlenbeispiel. Ein Lager $d = 200$ mm, $b = 400$ mm ist mit einem Lagerspiel $\Delta d = 0,34$ mm ausgeführt. Die mittlere Flächenpressung beträgt $6,5$ kg/cm². Wie gross ist das Reibungsmoment des Zapfens bei 30 m/sec Umfangsgeschwindigkeit, wenn bei vertikaler Kraftwirkung das Oel ohne Druck zugeführt und auch horizontal abgeleitet wird? Die Zähigkeit des Oeles ist bei einer mittlern Lagertemperatur von 55° rd. $0,0015$ kgsec/m².

Die Lagerkennzahl $\Phi = \frac{P_1 Q^2}{\eta U}$ ist eine dimensionslose Zahl.

$$P_1 = p d = 6,5 \text{ kg/cm}^2 \times 20 \text{ cm} = 130 \text{ kg/cm} = 13\,000 \text{ kg/m.}$$

$$Q = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,34}{200} \quad \text{und} \quad Q^2 = 2,89 \times 10^{-6}.$$

$$\Phi = \frac{P_1 Q^2}{\eta U} = \frac{13\,000 \times 2,89 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-4} \times 30} = 0,87.$$

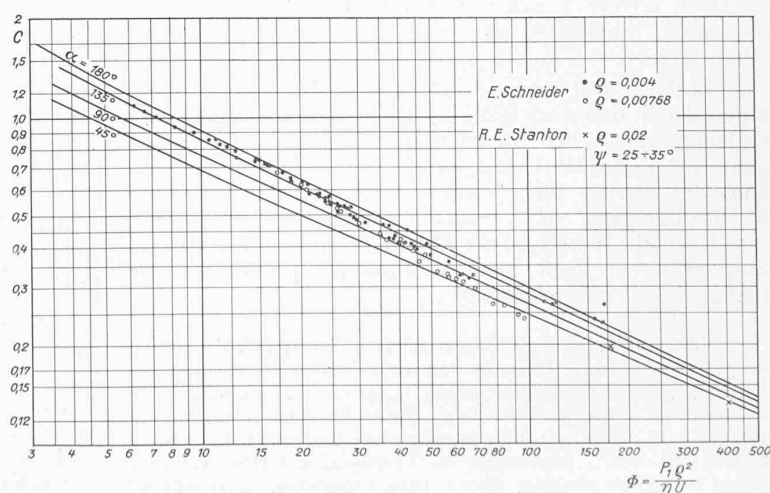


Abb. 9. Vergleich der theoretischen Werte mit den Versuchen.

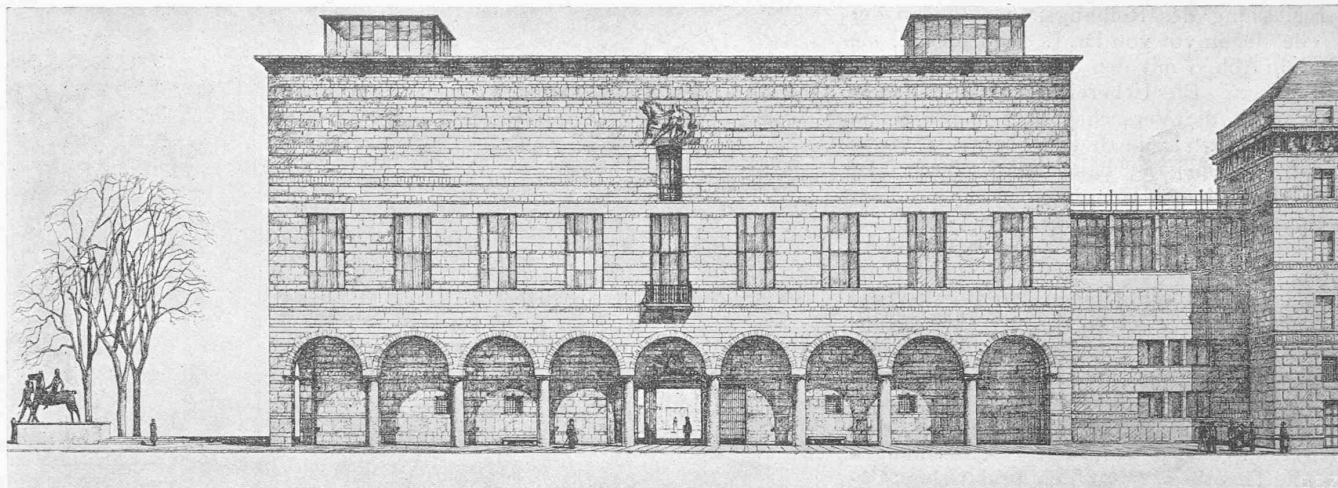


Abb. 5. Hauptfassade am St. Albansgraben, in Hausstein und mit betonter Mitte über dem Haupteingang. Rechts die Nationalbank. — Masstab 1 : 400.

$$\sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = \sqrt{\frac{15 \times 30}{10^3 \times 13000}} = 0,00185.$$

Für $b/d = \frac{400}{200} = 2$ ist nach Abb. 8

$f_b = 1,2$ und $\sqrt{f_b} = 1,1$. Dann wird $\Phi' = f_b \Phi = 1,2 \times 0,87 = 1,04$.

Aus Abb. 5 folgt bei $\psi = 180^\circ$ $C = 3,8$ und mit Gl. (35)

$$\mu_z = 3,8 \times 1,1 \times 0,00185 = 0,0078.$$

Das Reibungsmoment $\mu P r$, mit $P = p b d = 6,5 \times 20 \times 40 = 5200$ kg wird $0,0078 \times 5200 \times 0,1 = 4,05$ mkg. Lasche (Abb. 313) fand 4,1 mkg bei einer Oelmenge von 12 kg/min. Wird die zugeführte Oelmenge so stark gesteigert, dass der Oelspalt auch in der oberen Lagerschale ausgefüllt ist, so vergrößert sich das Reibungsmoment, in Übereinstimmung mit den Versuchen von Lasche.

Das Verhältnis $E^* = \frac{p_{\max}}{p} = 3,8$ (aus Versuch $\frac{23}{6,5} = 3,54$).

Bei allen Versuchen, die von der Theorie abweichende Resultate ergeben haben¹⁷⁾, war die grundlegende Voraussetzung der Theorie über die Form des Oelspaltes (Gl. 3) nicht erfüllt.

Die Reibungstheorie für Lagerschalen, die durch Einlaufen oder Eintuschieren einen kürzern oder längern „Spiegel“ erhalten, muss einer spätern Arbeit vorbehalten werden.

Es lässt sich nachweisen, dass die Bahn der Wellenmittel dabei den von Wolff¹⁷⁾ experimentell gefundenen Verlauf grundsätzlich haben muss. Bei engen Oelspalten kann die Temperatur und damit die Zähigkeit des Oels längs des Spaltes nicht mehr konstant sein. Dass Oele gleicher Zähigkeit sich verschieden verhalten können, lässt sich durch die verschiedene Abhängigkeit von der Temperatur erklären, auch ohne Einfluss der problematischen Schlupfrigkeit (Schmierfähigkeit).

¹⁷⁾ R. Wolff. „Ueber die Schmierschicht in Gleitlagern“. Forschungsheft 308, V. D. I. 1928. (Versuche mit eintuschierten Lagerschalen). — W. Büche. „Untersuchungen über molekularphysikalische Eigenschaften der Schmiermittel“. Diss. Karlsruhe 1930. (Eintuschierte Lager und parallele Flächen.) — R. Voittländer. „Untersuchungen zur Beurteilung der Schmierfähigkeit von Oelen“. Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 3, 1929, Oldenbourg. („Versuche mit zwei sich senkrecht kreuzenden Zylindern“.)

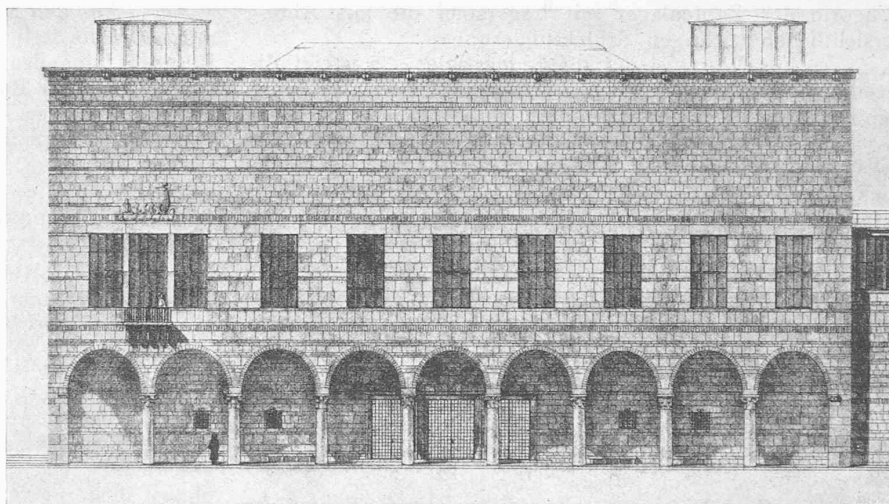


Abb. 6. Variante, ohne betonte Mitte, statt dessen an die Ecke gerücktes Motiv. — Masstab 1 : 400.

Das Basler Kunstmuseums-Projekt.

Wie wir am 28. Mai bereits berichtet haben, ist durch Volksabstimmung, bei schwacher Beteiligung und mit geringem Mehr, die Vorlage der Regierung durch Bewilligung des Baukredits von 7,43 Mill. Fr. gutgeheissen worden. Damit hat die seit Jahrzehnten gewälzte Basler Museumsfrage ihre, nach Ansicht Vieler allerdings nicht sehr erfreuliche Erledigung erfahren. Die S. B. Z. hat sich am Streit der Meinungen, der ob dieser Vorlage unter den Sachverständigen entbrannt war, nicht beteiligt; das „Werk“ (Märzheft d. J.) hat das Nötige zur Aufklärung über die Berechtigung der Kritik gesagt. Heute, da es an die Ausführung geht, wollen wir immerhin unsere Leser über das Bauvorhaben anhand der Pläne und Bilder unterrichten, die wir erst nachträglich erhalten konnten.

Es sei daran erinnert, dass schon vor 22 Jahren ein erster Wettbewerb für den Neubau des Basler Kunstmuseums veranstaltet worden war, das damals auf der Elisabethenschanze (in der Nähe des Zentral-Bahnhofs) hätte erstellt werden sollen; das Ergebnis (sechs Entwürfe im gleichen Rang!) ist veröffentlicht in S. B. Z. April/Mai 1910. Ein zweites Mal war dem Museum die Schützenmatte zugedacht; der Wettbewerb zeitigte zwei Entwürfe im 1. Rang (E. Faesch † und H. Bernoulli, S. B. Z. Mai 1914). Aber auch diese Oertlichkeit vermochte nicht zu überzeugen, und so kam man schliesslich auf die heutige Baustelle, die schiefe Ecke von St. Alban-Graben und Dufourstrasse, östlich anschliessend an den Neubau der Schweiz. National-