Band 97 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 16**

Analogien zwischen Stützkraftminimum und Energieminimum in der Hydraulik.

Von CHARLES JAEGER, dipl. Ing. E. T. H., Zürich.

Der Begriff der Energielinie ist den Hydraulikern seit Jahren allgemein bekannt und hat zur Entwicklung einer generellen Berechnungsmethode geführt. Es hat sich in jüngster Zeit gezeigt, dass die Bewegungs-Gleichung (vom Prinzip von d'Alembert abgeleitet) zur Lösung der verschiedensten Probleme mit Erfolg angewendet werden kann. Insbesondere ist diese Gleichung für „nicht permanente" Bewegungen noch anwendbar, wo bekanntlich die Berechnungsmethode mittels der Energielinie versagt. Ein Vergleich beider Methoden scheint deshalb am Platze.

Beide Methoden erlauben, eine allgemeine Definition der „Kritischen Tiefe" zu geben. Es soll hier bewiesen werden, dass diese Definitionen, unter gewissen Annahmen, identisch sind. Dabei wird auch der Gültigkeitsbereich dieser Definitionen strenger umgrenzt.

1. Die Energielinienhöhe H eines Wasserfadens ist gegeben durch

$$H = h + \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo h die Wassertiefe und v die Wassergeschwindigkeit am entsprechenden Ort bezeichnen.

Wir erweitern diesen Begriff auf ein beliebiges Profil mit mittlerer Geschwindigkeit $v_m = \frac{Q}{F}$, wo Q die Durchflussmenge und F den benetzten Querschnitt bezeichnen, sodass irgend eine Geschwindigkeit im Profil

$$v = v_m \pm \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird.

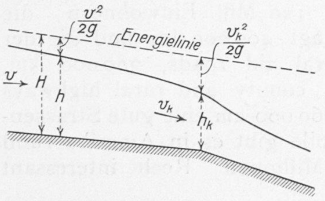

Abb. 1.

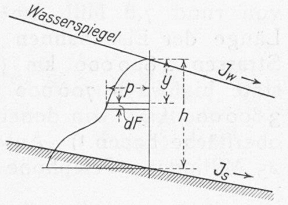

Abb. 2.

In diesem Falle ist bekanntlich die Energielinienhöhe H dargestellt durch:

$$H = h + \alpha_1 \frac{v_m^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(siehe Abb. 1), in welcher Gleichung (da es sich um die Erhaltung von Energie handelt):

$$\alpha_1 = \int_F \frac{(v_m + \eta)^3}{v_m^3}\, dF$$

oder

$$\alpha_1 = 1 + 3\int_F \frac{\eta^2}{v_m^2}\, dF + \int_F \frac{\eta^3}{v_m^3}\, dF$$

wobei das Glied: $\int_F \frac{\eta}{v_m}\, dF = 0$ ist.

Wo an einem bestimmten Ort (Gefällsbruch usw.) die kritische Tiefe h_k einsetzt, wird H ein Minimum, dies heisst:

$$\frac{dH}{dh} = \frac{d\left(\alpha_1 \frac{v_m^2}{2g} + h\right)}{dh} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder $$\frac{dH}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\alpha_1 \frac{Q^2}{2F^2 g} + h\right) = -\alpha_1 \frac{Q^2}{g F^3}\frac{dF}{dh} + 1 = 0$$

oder $$\alpha_1 \frac{Q^2}{g F^3}\frac{dF}{dh} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenn zur Lösung dieses Differenzials angenommen wird, α_1 sei eine Konstante. Gleichung (5) enthält implicite den gesuchten Wert für h_k.

Für rechtwinkligen Querschnitt $F = b\,h$, wo b die Breite des Gerinnes bezeichnet, und für $\alpha = 1$, wird

$$\frac{dF}{dh} = b$$

und Gleichung (5) lässt sich schreiben

$$1 = \frac{Q^2\, b}{g\, h^3\, b^3}$$

oder $$h_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welcher Wert schon längst bekannt ist.

2. Die Bewegungsgleichung leitet über zur Einführung der sogenannten „Stützkraft" P, die die Summe der Drucke auf Fläche F und der Bewegungsgrösse im Profil darstellt (Abb. 2). Also:

$$P = \int_F p\, dF + \gamma\, \alpha_2\, F \frac{v_m^2}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

In dieser Gleichung ist, da es sich nicht mehr um konstante Energie, sondern um eine konstante Bewegungsgrösse handelt:

$$\alpha_2 = \int_F \frac{(v_m + \eta)^2}{v_m^2}\, dF = 1 + \int_F \frac{\eta^2}{v_m^2}\, dF$$

wobei wiederum das Glied: $2\int_F \frac{\eta}{v_m}\, dF = 0$ ist.

Wir definieren nun die kritische Tiefe als jene, für die die Funktion P ein Minimum wird. Indem wir α_2 als konstant und weiter eine *lineare* Verteilung der Drucke voraussetzen, also

$$\int_F p\, dF = \gamma \int_F y\, dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und $$\gamma\, \alpha_2\, F \frac{v_m^2}{g} = \gamma\, \alpha_2 \frac{F Q^2}{F^2 g} = \gamma\, \alpha_2 \frac{Q^2}{F g},$$

können wir das Minimum von P berechnen:

$$\frac{dP}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\gamma \int_F y\, dF + \gamma\, \alpha_2 \frac{Q^2}{F g}\right) = 0$$

Da $$\frac{d}{dh}\left(\gamma \int_F y\, dF\right) = \gamma\, F \text{ ist,}$$

und $$\frac{d}{ah}\left(\gamma\, \alpha_2 \frac{Q^2}{F g}\right) = -\gamma\, \alpha_2 \frac{Q^2}{F^2 g}\frac{dF}{dh},$$

erhalten wir, nach Elimination von γ

$$F - \alpha_2 \frac{Q^2}{g F^2}\frac{dF}{dh} = 0$$

oder $$\alpha_2 \frac{Q^2}{g F^3}\frac{dF}{dh} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese letzte Gleichung wäre mit Gleichung (5) identisch, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ wäre; eine Annahme, die für die praktischen Fälle, wo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ genommen wird, wohl zulässig ist. Theoretisch wäre dies nur der Fall, wenn $\eta \equiv 0$, also für $v \equiv v_m$, was nie zutrifft.

3. *Schlussfolgerungen.* Die Identität der Gleichungen (5) und (9) war für ein rechteckiges Profil schon bekannt. Es lässt sich demnach für ein beliebiges Profil ableiten; dass die kritische Tiefe zugleich dem Minimum der Energielinienhöhe *und* der Stützkraft entspricht.

Wichtiger als die Ableitung selbst sind die der Beweisführung zugrundeliegenden Annahmen der linearen