

Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper

Autor(en): **Kito, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **91/92 (1928)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-42540>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper. — Die „Musterhäuser“ an der Wasserwerkstrasse, Zürich, Ausstellung „Das Neue Heim“, 1928 (mit Tafeln 1 bis 4). — Internationale Vereinigung des neuen Bauens. — † Prof. Dr. phil. h. c. Dr. Ing. e. h. Albert Fliegner. — Rheinkorrektion oberhalb des Bodensees und die Wildbachverbauungen in Graubünden. II. Internationale Tagung für Brücken- und Hochbau Wien 1928. — Wirtschaftliche Fortbildungskurse der E. T. H. — Wett-

bewerbe: Nidwaldner Kantonalbank in Stans. — Mitteilungen: Zu den Architektur-Diplom-Arbeiten der E. T. H. Ueber Fortschritte in der Ausführung neuzeitlicher Holzkonstruktionen. Maschinelles Brennschneiden. Die „Opera Bonomelli“. Pont de la Caille. Ausfuhr elektrischer Energie, 25 Jahre B. D. A. 20 Jahre B. S. A. Die Rheinschiffahrt bis Basel. Die Kunze-Knorr-Güterzugbremse in Holland. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine: Gesellschaft ehemaliger Studierender. S. T. S.

Band 92. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 4

Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper.

Von Ingenieur F. KITO, Nagoya (Japan).

In Heft 1 von Band 87 der S. B. Z. (2. Januar 1926) hat Herr Prof. Dr. E. Hahn unter dem Titel „Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique“ eine Methode zur Bestimmung der kritischen Eigenschwingungen elastischer Körper bekannt gegeben. Der vorliegende Artikel soll die Nützlichkeit dieser Methode in ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Eigenschwingungen von Rahmenwerken zeigen.

Obgleich die Abhandlung von Prof. Hahn an sich ein Ganzes ist, müssen wir doch die dort entwickelten Resultate für unsern bestimmten Zweck etwas umformen.

Betrachten wir einen elastischen Körper, der aus gebogenen oder geraden Stäben besteht. Von einem passend gewählten Ausgangspunkt können wir die Lage eines jeglichen Massenelementes durch eine einzige veränderliche *s* bezeichnen. Nehmen wir an, jeder Massenpunkt *s* sei durch die beiden den Koordinatenachsen parallelen Kräfte *X* und *Y* beansprucht (Abbildung 1); diese Kräfte verursachen in jedem Punkt *t* die Ablenkungen

$$\delta_x = \alpha_{st} X + \beta_{st} Y \quad (1)$$

$$\delta_y = \gamma_{st} X + \delta_{st} Y \quad (2)$$

Daher werden unter dem Einfluss von verteilten Kräften *dX_s* und *dY_s* Deformationen entstehen, die im Punkte *t*, nach den Richtungen *x* und *y*, folgende Werte annehmen werden:

$$x_t = \int_0^l \alpha_{st} dX_s + \beta_{st} dY_s \quad (3)$$

$$y_t = \int_0^l \gamma_{st} dX_s + \delta_{st} dY_s \quad (4)$$

Nehmen wir an, das System führe Schwingungen aus, nach dem Gesetze

$$x_s = X_s \cos \lambda T \quad (5)$$

$$y_s = Y_s \cos \lambda T \quad (6)$$

Dieser Schwingung entsprechen Beschleunigungen im Betrage von:

$$x_s'' = -X_s \lambda^2 \cos \lambda T = -\lambda^2 x_s \quad (7)$$

$$y_s'' = -Y_s \lambda^2 \cos \lambda T = -\lambda^2 y_s \quad (8)$$

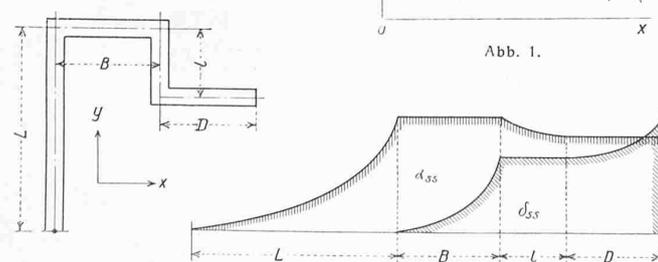


Abb. 1.

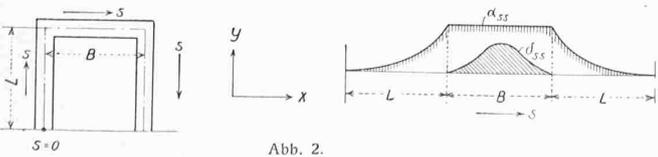


Abb. 2.

Ist die betrachtete Schwingung eine natürliche, so reduzieren sich *dX_s* und *dY_s* auf die Trägheitskraft:

$$dX_s = -m \lambda^2 x_s ds \quad (9)$$

$$dY_s = -m \lambda^2 y_s ds \quad (10)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (3) und (4) ergibt sich:

$$x_t = - \int_0^l \lambda^2 m [\alpha_{st} x_s + \beta_{st} y_s] ds \quad (11)$$

$$y_t = - \int_0^l \lambda^2 m [\gamma_{st} x_s + \delta_{st} y_s] ds \quad (12)$$

Das sind simultane lineare Integral-Gleichungen. Somit haben wir, wie in Prof. Hahn's Aufsatz, für die Eigenschwingungen erster Ordnung die Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_0^l [\alpha_{ss} + \delta_{ss}] m ds} \quad (13)$$

Die Bedeutung der Grössen *α_{ss}* und *δ_{ss}* ist offensichtlich; somit können wir durch eine einfache Quadratur die Eigenschwingungen erster Ordnung berechnen. Die folgenden Abbildungen beziehen sich auf vier Beispiele, die die Anwendung der Formeln auf praktische Fälle erläutern sollen. Im Falle der Abb. 2 sind *δ_{ss}* und *α_{ss}* verhältnismässig klein, sodass der entsprechende Wert von *λ* verhältnismässig gross sein würde. Im Falle der Abb. 3 sind *α_{ss}* und *δ_{ss}* gross wie für Abb. 2. Im dritten Beispiel (Abb. 4) ergibt der Stab *D* einen ziemlich grossen Betrag zum Integral in Gl. (13). Somit wird der Wert von *λ* kleiner werden. Im Falle der Abb. 5 würde der von *L* herrührende Anteil viel grösser sein als die der übrigen Stäbe, sodass die Schwingungsfrequenz nur wenig von der eines Kragträgers der Länge *L* verschieden wäre.

Im folgenden soll die obige Methode auf ein beliebiges statisch unbestimmtes System angewendet werden, wobei wir die von W. Kaufmann gewählten Bezeichnungen benutzen¹⁾. Das Biegemoment in irgend einem Punkt lässt sich in der Form bringen:

$$M = M_0 + M_a X_a + M_b X_b + \dots + M_n X_n \quad (14)$$

worin *X_a*, *X_b* ... *X_n* statisch unbestimmte Grössen sind. *M₀* bedeutet das von den äussern Kräften herrührende Biegemoment, *M_a* das Biegemoment für *X_a = 1*, usw.

¹⁾ W. Kaufmann, „Statik“. Verlag Julius Springer. S. 198.

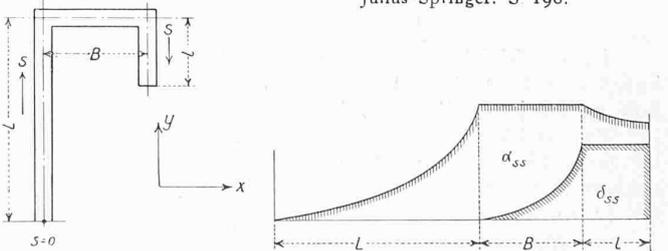


Abb. 4.

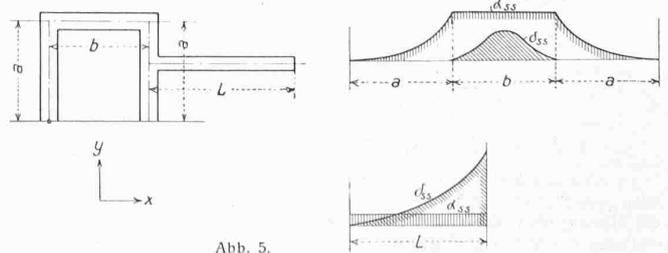


Abb. 5.

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} &= \int \frac{M_a^2}{EI} ds & \delta_{ab} &= \delta_{ba} = \int \frac{M_a M_b}{EI} ds \\ \delta_{bb} &= \int \frac{M_b^2}{EI} ds & \text{usw.} & \end{aligned} \right\} (15)$$

wobei δ_{aa} , zum Beispiel, die Verschiebung des Punktes a unter der alleinigen Einwirkung der Kraft $X_a = 1$ darstellt, und setzen wir ferner

$$\left. \begin{aligned} K_a &= - \int \frac{M_0 M_a}{EI} ds, & K_b &= - \int \frac{M_0 M_b}{EI} ds \\ \dots, & \dots, & K_n &= - \int \frac{M_0 M_n}{EI} ds \end{aligned} \right\} (16)$$

dann lauten die Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $X_a, X_b \dots X_n$

$$\left. \begin{aligned} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ba} + \dots + X_n \delta_{na} &= K_a \\ X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} + \dots + X_n \delta_{nb} &= K_b \\ \dots & \dots \\ X_a \delta_{an} + X_b \delta_{bn} + \dots + X_n \delta_{nn} &= K_n \end{aligned} \right\} (17)$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} K_a + \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} K_b + \dots + \frac{\Delta_{an}}{\Delta} K_n \\ X_b &= \frac{\Delta_{ba}}{\Delta} K_a + \frac{\Delta_{bb}}{\Delta} K_b + \dots + \frac{\Delta_{bn}}{\Delta} K_n \\ \dots & \dots \\ X_n &= \frac{\Delta_{na}}{\Delta} K_a + \frac{\Delta_{nb}}{\Delta} K_b + \dots + \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} K_n \end{aligned} \right\} (18)$$

oder anders geschrieben:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \vartheta_{aa} K_a + \vartheta_{ab} K_b + \dots + \vartheta_{an} K_n \\ X_b &= \vartheta_{ba} K_a + \vartheta_{bb} K_b + \dots + \vartheta_{bn} K_n \\ \dots & \dots \\ X_n &= \vartheta_{na} K_a + \vartheta_{nb} K_b + \dots + \vartheta_{nn} K_n \end{aligned} \right\} (19)$$

Somit können wir mit Hilfe der Gleichung (14) für jeden beliebigen Punkt das Biegemoment berechnen, das durch die Wirkung äusserer Kräfte entsteht.

Nehmen wir nun an, das Moment M_0 rühre von einer einzigen im Punkte S , parallel zur X -Axe angreifenden Einheitskraft her. Dann haben wir auf Grund des Prinzips der virtuellen Verschiebungen¹⁾

$$\begin{aligned} I \quad a_{ss} &= \int \frac{M_0}{EI} [M_0 + M_a X_a + M_b X_b + \dots + M_n X_n] ds \\ &= \int \frac{M_0^2}{EI} ds + X_a \int \frac{M_0 M_a}{EI} ds + X_b \int \frac{M_0 M_b}{EI} ds \\ &\quad + \dots + X_n \int \frac{M_0 M_n}{EI} ds \\ &= \int \frac{M_0^2}{EI} ds - K_a X_a - K_b X_b - \dots - K_n X_n \\ &= \overline{a_{ss}} - K_a (\vartheta_{aa} K_a + \vartheta_{ab} K_b + \dots) \\ &\quad - K_b (\vartheta_{ba} K_a + \vartheta_{bb} K_b + \dots) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - K_n (\vartheta_{na} K_a + \vartheta_{nb} K_b + \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

wobei wir gesetzt haben

$$\overline{a_{ss}} = \int \frac{M_0^2}{EI} ds$$

Da die Gleichung (20) nun keine Unbekannten mehr enthält, können wir den Wert von a_{ss} für jeden Wert von s berechnen.

Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen am Platze sein betreffend die quadratischen Formen in $K_a, K_b \dots, K_n$, die in Gl. (20) vorkommen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} &K_a X_a + K_b X_b + \dots + K_n X_n \\ &= K_a (\vartheta_{aa} K_a + \vartheta_{ab} K_b + \dots) \\ &+ K_b (\vartheta_{ba} K_a + \vartheta_{bb} K_b + \dots) \\ &+ \dots \\ &+ K_n (\vartheta_{na} K_a + \vartheta_{nb} K_b + \dots) \\ &= X_a (\delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \dots) \\ &+ X_b (\delta_{ba} X_a + \delta_{bb} X_b + \dots) \\ &+ \dots \\ &+ X_n (\delta_{na} X_a + \delta_{nb} X_b + \dots) \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁾ Man beachte, dass hier die Parameter X_a, X_b ebenfalls „pro Einheitskraft“ aufgefasst werden müssen, damit die Homogenität der Gleichungen gewahrt bleibe (Anmerkung des Übersetzters).

Nun erkennt, man dass dieser letzte Ausdruck nichts anderes bedeutet als die Deformationsarbeit, die dem Kräftesystem $X_a, X_b, \dots X_n$ entspricht. Somit muss die Summe dieser quadratischen Form stets positiv sein.

Aus Gleichung (20) geht also deutlich der Unterschied hervor, der zwischen statisch bestimmten und unbestimmten Systemen besteht.

Wir können auf die gleiche Weise den Ausdruck für γ_{ss} finden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} a_{ss} + \gamma_{ss} &= \overline{a_{ss}} + \overline{\gamma_{ss}} - 2 K_a (\vartheta_{aa} K_a + \vartheta_{ab} K_b + \dots) \\ &\quad - 2 K_b (\vartheta_{ba} K_a + \vartheta_{bb} K_b + \dots) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - 2 K_n (\vartheta_{na} K_a + \vartheta_{nb} K_b + \dots) \end{aligned} \quad (22)$$

oder, durch Einsetzung der Werte für X_a, X_b, \dots

$$\begin{aligned} a_{ss} + \gamma_{ss} &= \overline{a_{ss}} + \overline{\gamma_{ss}} - 2 X_a (\delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \dots) \\ &\quad - 2 X_b (\delta_{ba} X_a + \delta_{bb} X_b + \dots) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - 2 X_n (\delta_{na} X_a + \delta_{nb} X_b + \dots) \end{aligned} \quad (23)$$

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Methode Müller-Breslau die Berechnung wesentlich vereinfachen wird, denn, wenn wir von dieser Methode ausgehen, so erhalten wir

$$\delta_{ab} = \delta_{ac} = \dots = 0.$$

und die quadratische Form in Gl. (21) reduziert sich auf

$$\vartheta_{aa} K_a^2 + \vartheta_{bb} K_b^2 + \dots + \vartheta_{nn} K_n^2$$

oder

$$\delta_{aa} X_a^2 + \delta_{bb} X_b^2 + \dots + \delta_{nn} X_n^2$$

Durch diese Methode wird also die Aufgabe auf die Berechnung einer orthogonalen quadratischen Form zurückgeführt.

Die „Musterhäuser“ an der Wasserwerkstrasse, Zürich, Ausstellung „Das Neue Heim“, 1928.

(Hierzu Tafeln 1 bis 4.)

Die „Musterhäuser“ an der Wasserwerkstrasse, die acht Tage nach der Eröffnung des im Zürcher Kunstgewerbemuseum untergebrachten ersten Teils der von Direktor A. Altherr veranstalteten Ausstellung „Das Neue Heim“ eröffnet werden konnten, verdienen besondere Beachtung als erstes Symptom eines sich vorerst sehr zögernd regenden Interesses öffentlicher Stellen für die Bestrebungen der modernen Architektur. Nicht dass etwa ein Rappen für eigentliche Versuchszwecke bewilligt worden wäre, für die das verarmte Deutschland, in richtiger Erkenntnis ihrer

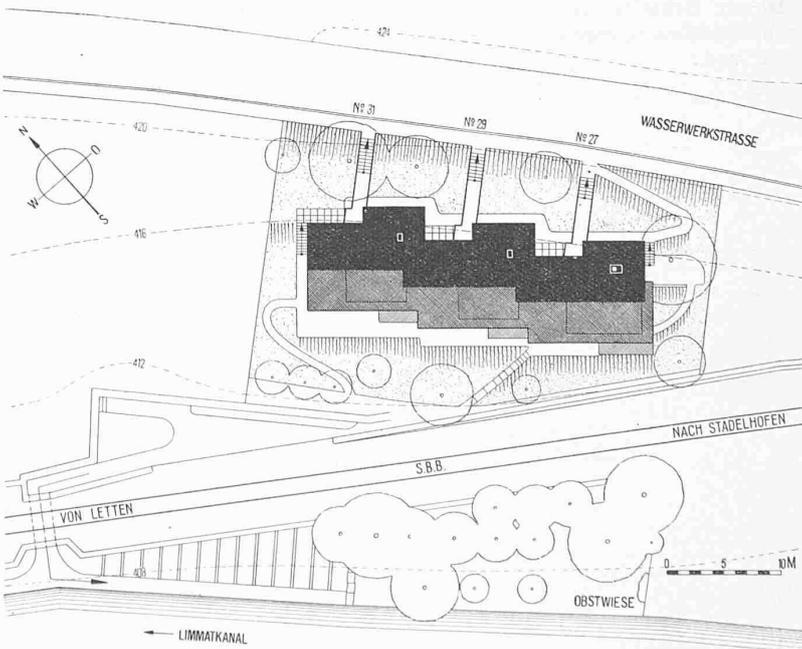


Abb. 1. Lageplan der Musterhäuser an der Wasserwerkstrasse in Zürich. — 1 : 600.