Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper

Band 92. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 4**

Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper.

Von Ingenieur F. KITO, Nagoya (Japan).

In Heft 1 von Band 87 der S. B. Z. (2. Januar 1926) hat Herr Prof. Dr. E. Hahn unter dem Titel „Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique“ eine Methode zur Bestimmung der kritischen Eigenschwingungen elastischer Körper bekannt gegeben. Der vorliegende Artikel soll die Nützlichkeit dieser Methode in ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Eigenschwingungen von Rahmenwerken zeigen.

Obgleich die Abhandlung von Prof. Hahn an sich ein Ganzes ist, müssen wir doch die dort entwickelten Resultate für unsern bestimmten Zweck etwas umformen.

Betrachten wir einen elastischen Körper, der aus gebogenen oder geraden Stäben besteht. Von einem passend gewählten Ausgangspunkt können wir die Lage eines jeglichen Massenelementes durch eine einzige veränderliche s bezeichnen. Nehmen wir an, jeder Massenpunkt s sei durch die beiden den Koordinatenaxen parallelen Kräfte X und Y beansprucht (Abbildung 1); diese Kräfte verursachen in jedem Punkt t die Ablenkungen

$$\delta_x = \alpha_{st} X + \beta_{st} Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\delta_y = \gamma_{st} X + \delta_{st} Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daher werden unter dem Einfluss von verteilten Kräften dX_s und dY_s Deformationen entstehen, die im Punkte t, nach den Richtungen x und y, folgende Werte annehmen werden:

$$x_t = \int_o^l \alpha_{st}\, d\, X_s + \beta_{st}\, d\, Y_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$y_t = \int_o^l \gamma_{st}\, d\, X_s + \delta_{st}\, d\, Y_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nehmen wir an, das System führe Schwingungen aus, nach dem Gesetze

$$x_s = X_s \cos \lambda\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$y_s = Y_s \cos \lambda\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dieser Schwingung entsprechen Beschleunigungen im Betrage von:

$$x_s'' = - X_s \lambda^2 \cos \lambda\, T = - \lambda^2 x_s \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$y_s'' = - Y_s \lambda^2 \cos \lambda\, T = - \lambda^2 y_s \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

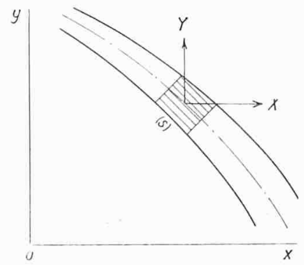


Abb. 1.

Ist die betrachtete Schwingung eine natürliche, so reduzieren sich dX_s und dY_s auf die Trägheitskraft:

$$d\, X_s = - m\, \lambda^2 x_s\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$d\, Y_s = - m\, \lambda^2 y_s\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (3) und (4) ergibt sich:

$$x_t = - \int_o^l \lambda^2\, m\, [\alpha_{st} x_s + \beta_{st} y_s]\, ds \quad . \quad . \quad (11)$$

$$y_t = - \int_o^l \lambda^2\, m\, [\gamma_{st} x_s + \delta_{st} y_s]\, ds \quad . \quad . \quad (12)$$

Das sind simultane lineare Integral-Gleichungen. Somit haben wir, wie in Prof. Hahn's Aufsatz, für die Eigenschwingungen erster Ordnung die Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_o^l [\alpha_{ss} + \delta_{ss}]\, m\, ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

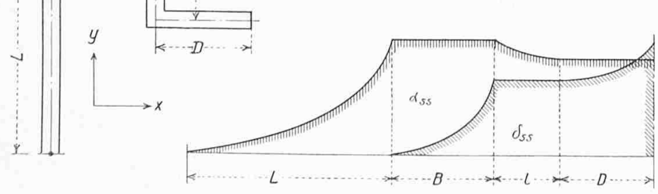
Die Bedeutung der Grössen α_{ss} und δ_{ss} ist offensichtlich; somit können wir durch eine einfache Quadratur die Eigenschwingungen erster Ordnung berechnen. Die folgenden Abbildungen beziehen sich auf vier Beispiele, die die Anwendung der Formeln auf praktische Fälle erläutern sollen. Im Falle der Abb. 2 sind δ_{ss} und α^{ss} verhältnis mässig klein, sodass der entsprechende Wert von λ verhältnismässig gross sein würde. Im Falle der Abb. 3 sind α_{ss} und δ_{ss} gross wie für Abb. 2. Im dritten Beispiel (Abb. 4) ergibt der Stab D einen ziemlich grossen Betrag zum Integral in Gl. (13). Somit wird der Wert von λ kleiner werden. Im Falle der Abb. 5 würde der von L herrührende Anteil viel grösser sein als die der übrigen Stäbe, sodass die Schwingungsfrequenz nur wenig von der eines Kragträgers der Länge L verschieden wäre.

Im folgenden soll die obige Methode auf ein beliebiges statisch unbestimmtes System angewendet werden, wobei wir die von W. Kaufmann gewählten Bezeichnungen benützen[1]). Das Biegungsmoment in irgend einem Punkt lässt sich in der Form bringen:

$$M = M_0 + M_a X_a + M_b X_b + \ldots + M_n X_n \quad . \quad . \quad (14)$$

worin X_a, X_b ... X_n statisch unbestimmte Grössen sind. M_0 bedeutet das von den äussern Kräften herrührende Biegungsmoment, M_a das Biegungsmoment für $X_a = 1$, usw.

[1]) W. Kaufmann, „Statik“. Verlag Julius Springer. S 198.



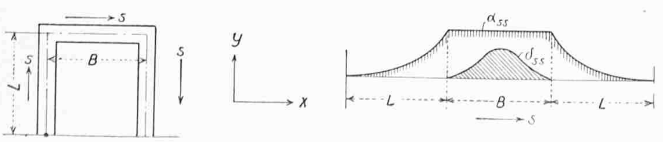


Abb. 2.

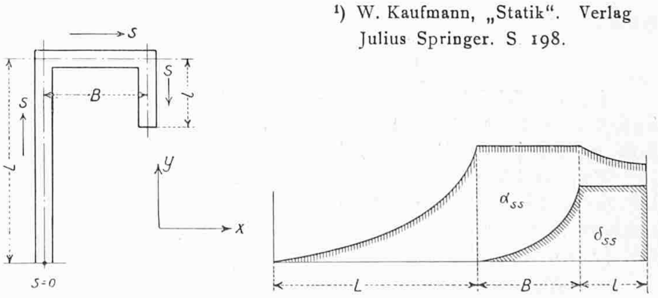


Abb. 4.

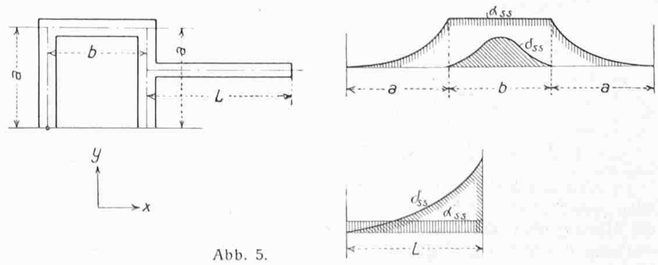


Abb. 5.

Setzen wir

$$\left.\begin{array}{ll}\delta_{aa}=\int\frac{M_a^2}{EI}\,ds & \delta_{ab}=\delta_{ba}=\int\frac{M_a\,M_b}{EI}\,ds\\ \delta_{bb}=\int\frac{M_b^2}{EI}\,ds & \text{usw.}\end{array}\right\}\quad(15)$$

wobei δ_{aa}, zum Beispiel, die Verschiebung des Punktes a unter der alleinigen Einwirkung der Kraft $X_a = 1$ darstellt, und setzen wir ferner

$$\left.\begin{array}{ll}K_a=-\int\frac{M_0\,M_a}{EI}\,ds, & K_b=-\int\frac{M_0\,M_b}{EI}\,ds\\ \ldots,\quad\ldots, & K_n=-\int\frac{M_0\,M^n}{EI}\,ds\end{array}\right\}\quad(16)$$

dann lauten die Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten X_a, X_b ... X_n

$$\left.\begin{array}{l}X_a\,\delta_{aa}+X_b\,\delta_{ba}+\ldots+X_n\,\delta_{na}=K_a\\ X_a\,\delta_{ab}+X_b\,\delta_{bb}+\ldots+X_n\,\delta_{nb}=K_b\\ \ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\ X_a\,\delta_{an}+X_b\,\delta_{bn}+\ldots+X_n\,\delta_{nn}=K_n\end{array}\right\}\quad.\quad(17)$$

woraus

$$\left.\begin{array}{l}X_a=\frac{\varDelta_{aa}}{\varDelta}K_a+\frac{\varDelta_{ab}}{\varDelta}K_b+\ \ldots\ +\frac{\varDelta_{an}}{\varDelta}K_n\\ X_b=\frac{\varDelta_{ba}}{\varDelta}K_a+\frac{\varDelta_{bb}}{\varDelta}K_b+\ \ldots\ +\frac{\varDelta_{bn}}{\varDelta}K_n\\ \ldots\qquad\ldots\\ X_n=\frac{\varDelta_{na}}{\varDelta}K_a+\frac{\varDelta_{nb}}{\varDelta}K_b+\ \ldots\ +\frac{\varDelta_{nn}}{\varDelta}K_n\end{array}\right|\quad(18)$$

oder anders geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l}X_a=\vartheta_{aa}\,K_a+\vartheta_{ab}\,K_b+\ldots+\vartheta_{an}\,K_n\\ X_b=\vartheta_{ba}\,K_a+\vartheta_{bb}\,K_b+\ldots+\vartheta_{bn}\,K^n\\ \ldots\qquad\ldots\\ X_n=\vartheta_{na}\,K_a+\vartheta_{nb}\,K_b+\ldots+\vartheta_{nn}\,K_n\end{array}\right\}\quad.\quad(19)$$

Somit können wir mit Hilfe der Gleichung (14) für jeden beliebigen Punkt das Biegungsmoment berechnen, das durch die Wirkung äusserer Kräfte entsteht.

Nehmen wir nun an, das Moment M_0 rühre von einer einzigen im Punkte S, parallel zur X-Axe angreifenden Einheitskraft her. Dann haben wir auf Grund des Prinzipes der virtuellen Verschiebungen[1])

$$\begin{aligned}1\quad \alpha_{ss}&=\int\frac{M_0}{EI}\left[M_0+M_a\,X_a+M_b\,X_b+\ldots+M_n\,X_n\right]ds\\ &=\int\frac{M_0^2}{EI}\,ds+X_a\int\frac{M_0\,M_a}{EI}\,ds+X_b\int\frac{M_0\,M_b}{EI}\,ds\\ &\qquad+\ldots+X_n\int\frac{M_0\,M_n}{EI}\,ds\\ &=\int\frac{M_0^2}{EI}\,ds-K_a\,X_a-K_b\,X_b-\ldots-K_n\,X_n\\ &=\overline{\alpha_{ss}}-K_a\left(\vartheta_{aa}\,K_a+\vartheta_{ab}\,K_b+\ldots\right)\\ &\qquad-K_b\left(\vartheta_{ba}\,K_a+\vartheta_{bb}\,K_b+\ldots\right)\\ &\qquad-\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &\qquad-K_n\left(\vartheta_{na}\,K_a+\vartheta_{nb}\,K_b+\ldots\right)\quad(20)\end{aligned}$$

wobei wir gesetzt haben

$$\overline{\alpha_{ss}}=\int\frac{M_0^2}{EI}\,ds$$

Da die Gleichung (20) nun keine Unbekannten mehr enthält, können wir den Wert von α_{ss} für jeden Wert von s berechnen.

Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen am Platze sein betreffend die quadratischen Formen in K_a, K_b ..., K_n, die in Gl. (20) vorkommen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}&K_a\,X_a+K_b\,X_b+\ \ldots\ +K_n\,X_n\\ &=K_a\left(\vartheta_{aa}\,K_a+\vartheta_{ab}\,K_b+\ \ldots\right)\\ &+K_b\left(\vartheta_{ba}\,K_a+\vartheta_{bb}\,K_b+\ \ldots\right)\\ &+\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &+K_n\left(\vartheta_{na}\,K_a+\vartheta_{nb}\,K_b+\ \ldots\right)\\ &=X_a\left(\delta_{aa}\,X_a+\delta_{ab}\,X_b+\ \ldots\right)\\ &+X_b\left(\delta_{ba}\,X_a+\delta_{bb}\,X_b+\ \ldots\right)\\ &+\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &+X_n\left(\delta_{na}\,X_a+\delta_{nb}\,X_b+\ \ldots\right)\ .\quad(21)\end{aligned}$$

[1]) Man beachte, dass hier die Parameter X_a, X_b ebenfalls „pro Einheitskraft" aufgefasst werden müssen, damit die Homogenität der Gleichungen gewahrt bleibe (Anmerkung des Uebersetzers).

Nun erkennt, man dass dieser letzte Ausdruck nichts anderes bedeutet als die Deformationsarbeit, die dem Kräftesystem X_a, X_b, ... X_n entspricht. Somit muss die Summe dieser quadratischen Form stets positiv sein.

Aus Gleichung (20) geht also deutlich der Unterschied hervor, der zwischen statisch bestimmten und unbestimmten Systemen besteht.

Wir können auf die gleiche Weise den Ausdruck für γ_{ss} finden, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha_{ss}+\gamma_{ss}=\overline{\alpha_{ss}}+\overline{\gamma_{ss}}&-2\,K_a\left(\vartheta_{aa}\,K_a+\vartheta_{ab}\,K_b+\ \ldots\right)\\ &-2\,K_b\left(\vartheta_{ba}\,K_a+\vartheta_{bb}\,K_b+\ \ldots\right)\\ &-\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &-2\,K_n\left(\vartheta_{na}\,K_a+\vartheta_{nb}\,K_b+\ \ldots\right)\quad(22)\end{aligned}$$

oder, durch Einsetzung der Werte für X_a, X_b, ...

$$\begin{aligned}\alpha_{ss}+\gamma_{ss}=\overline{\alpha_{ss}}+\overline{\gamma_{ss}}&-2\,X_a\left(\delta_{aa}\,X_a+\delta_{ab}\,X_b+\ \ldots\right)\\ &-2\,X_b\left(\delta_{ba}\,X_a+\delta_{bb}\,X_b+\ \ldots\right)\\ &-\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &-2\,X_n\left(\delta_{na}\,X_a+\delta_{nb}\,X_b+\ \ldots\right)\quad(23)\end{aligned}$$

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Methode Müller-Breslau die Berechnung wesentlich vereinfachen wird, denn, wenn wir von dieser Methode ausgehen, so erhalten wir

$$\delta_{ab}=\delta_{ac}=\ \ldots\ =0.$$

und die quadratische Form in Gl. (21) reduziert sich auf

$$\vartheta_{aa}\,K_a^2+\vartheta_{bb}\,K_b^2+\ \ldots\ +\vartheta_{nn}\,K_n^2$$

oder

$$\delta_{aa}\,X_a^2+\delta_{bb}\,X_b^2+\ \ldots\ +\delta_{nn}\,X_n^2$$

Durch diese Methode wird also die Aufgabe auf die Berechnung einer orthogonalen quadratischen Form zurückgeführt.

Die „Musterhäuser" an der Wasserwerkstrasse, Zürich, Ausstellung „Das Neue Heim", 1928.

(Hierzu Tafeln 1 bis 4.)

Die „Musterhäuser" an der Wasserwerkstrasse, die acht Tage nach der Eröffnung des im Zürcher Kunstgewerbemuseum untergebrachten ersten Teils der von Direktor A. Altherr veranstalteten Ausstellung „Das Neue Heim" eröffnet werden konnten, verdienen besondere Beachtung als erstes Symptom eines sich vorerst sehr zögernd regenden Interesses öffentlicher Stellen für die Bestrebungen der modernen Architektur. Nicht dass etwa ein Rappen für eigentliche Versuchszwecke bewilligt worden wäre, für die das verarmte Deutschland, in richtiger Erkenntnis ihrer

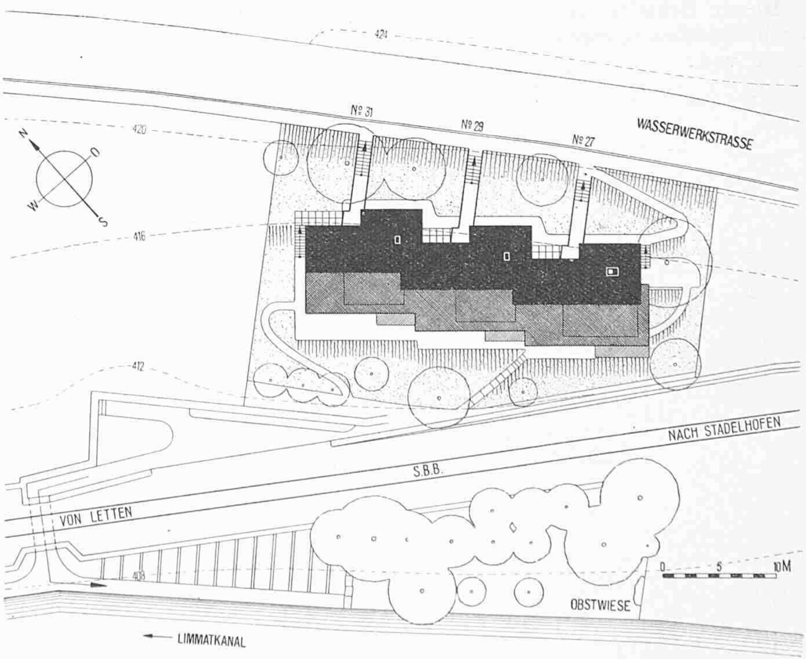


Abb. 1. Lageplan der Musterhäuser an der Wasserwerkstrasse in Zürich. — 1 : 600.