Band 92. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 4**

Ueber die Eigenfrequenzen elastischer Körper.

Von Ingenieur F. KITO, Nagoya (Japan).

In Heft 1 von Band 87 der S. B. Z. (2. Januar 1926) hat Herr Prof. Dr. E. Hahn unter dem Titel „Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique" eine Methode zur Bestimmung der kritischen Eigenschwingungen elastischer Körper bekannt gegeben. Der vorliegende Artikel soll die Nützlichkeit dieser Methode in ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Eigenschwingungen von Rahmenwerken zeigen.

Obgleich die Abhandlung von Prof. Hahn an sich ein Ganzes ist, müssen wir doch die dort entwickelten Resultate für unsern bestimmten Zweck etwas umformen.

Betrachten wir einen elastischen Körper, der aus gebogenen oder geraden Stäben besteht. Von einem passend gewählten Ausgangspunkt können wir die Lage eines jeglichen Massenelementes durch eine einzige veränderliche s bezeichnen. Nehmen wir an, jeder Massenpunkt s sei durch die beiden den Koordinatenaxen parallelen Kräfte X und Y beansprucht (Abbildung 1); diese Kräfte verursachen in jedem Punkt t die Ablenkungen

$$\delta_x = \alpha_{st}\, X + \beta_{st}\, Y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\delta_y = \gamma_{st}\, X + \delta_{st}\, Y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Daher werden unter dem Einfluss von verteilten Kräften dX_s und dY_s Deformationen entstehen, die im Punkte t, nach den Richtungen x und y, folgende Werte annehmen werden:

$$x_t = \int_o^l \alpha_{st}\, d\,X_s + \beta_{st}\, d\,Y_s \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$y_t = \int_o^l \gamma_{st}\, d\,X_s + \delta_{st}\, d\,Y_s \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nehmen wir an, das System führe Schwingungen aus, nach dem Gesetze

$$x_s = X_s \cos \lambda\, T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$y_s = Y_s \cos \lambda\, T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Dieser Schwingung entsprechen Beschleunigungen im Betrage von:

$$x_s'' = -X_s\, \lambda^2 \cos \lambda\, T = -\lambda^2 x_s \quad . \; . \; . \quad (7)$$

$$y_s'' = -Y_s\, \lambda^2 \cos \lambda\, T = -\lambda^2 y_s \quad . \; . \; . \quad (8)$$

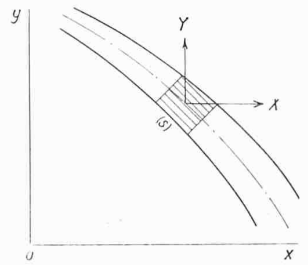

Abb. 1.

Ist die betrachtete Schwingung eine natürliche, so reduzieren sich dX_s und dY_s auf die Trägheitskraft:

$$d\,X_s = -m\, \lambda^2 x_s\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$d\,Y_s = -m\, \lambda^2 y_s\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (3) und (4) ergibt sich:

$$x_t = -\int_o^l \lambda^2 m \left[\alpha_{st}\, x_s + \beta_{st}\, y_s\right] ds \quad . \; . \quad (11)$$

$$y_t = -\int_o^l \lambda^2 m \left[\gamma_{st}\, x_s + \delta_{st}\, y_s\right] ds \quad . \; . \quad (12)$$

Das sind simultane lineare Integral-Gleichungen. Somit haben wir, wie in Prof. Hahn's Aufsatz, für die Eigenschwingungen erster Ordnung die Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_o^l [\alpha_{ss} + \delta_{ss}]\, m\, ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Bedeutung der Grössen α_{ss} und δ_{ss} ist offensichtlich; somit können wir durch eine einfache Quadratur die Eigenschwingungen erster Ordnung berechnen. Die folgenden Abbildungen beziehen sich auf vier Beispiele, die die Anwendung der Formeln auf praktische Fälle erläutern sollen. Im Falle der Abb. 2 sind δ_{ss} und α^{ss} verhältnis mässig klein, sodass der entsprechende Wert von λ verhältnismässig gross sein würde. Im Falle der Abb. 3 sind α_{ss} und δ_{ss} gross wie für Abb. 2. Im dritten Beispiel (Abb. 4) ergibt der Stab D einen ziemlich grossen Betrag zum Integral in Gl. (13). Somit wird der Wert von λ kleiner werden. Im Falle der Abb. 5 würde der von L herrührende Anteil viel grösser sein als die der übrigen Stäbe, sodass die Schwingungsfrequenz nur wenig von der eines Kragträgers der Länge L verschieden wäre.

Im folgenden soll die obige Methode auf ein beliebiges statisch unbestimmtes System angewendet werden, wobei wir die von W. Kaufmann gewählten Bezeichnungen benützen[1]). Das Biegungsmoment in irgend einem Punkt lässt sich in der Form bringen:

$$M = M_0 + M_a\, X_a + M_b X_b + \ldots + M_n\, X_n \quad . \; . \quad (14)$$

worin X_a, X_b ... X_n statisch unbestimmte Grössen sind. M_0 bedeutet das von den äussern Kräften herrührende Biegungsmoment, M_a das Biegungsmoment für $X_a = 1$, usw.

[1]) W. Kaufmann, „Statik". Verlag Julius Springer. S. 198.

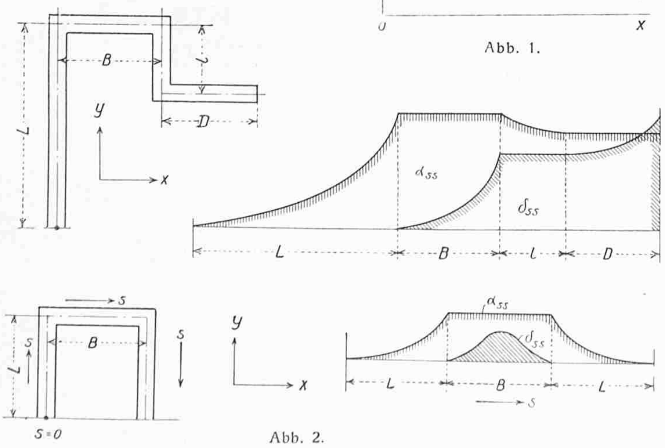

Abb. 2.

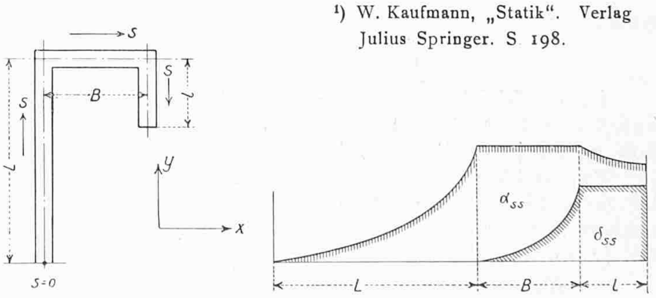

Abb. 4.

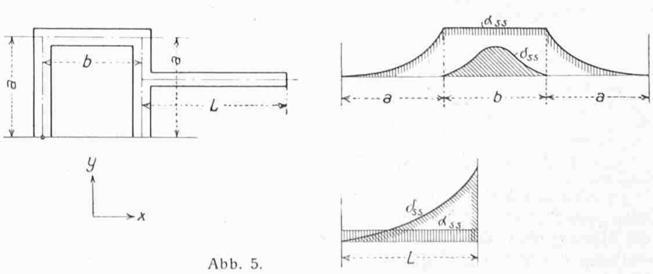

Abb. 5.