

# Beitrag zur Berechnung von Schrumpfermögen

Autor(en): **Janicki, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **87/88 (1926)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40933>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Beitrag zur Berechnung von Schrumpfvverbindungen — Römisch-katholische Sankt Antonius-Kirche in Basel. — Versuche über den Spannungszustand genieteter Stäbe. — Das Donau-Kraftwerk „Kachlet-Stufe“ bei Passau. — Eidgenössische Technische Hochschule. — Miscellanea: Die Durchdringung Afrikas mit dem Automobil und dem Flugzeug. Zur Nordpolfahrt des Luftschiffs „Norge“. Das elastische Verhalten

des Viaduc de la Recoumène. Museum im „Segerhof“ in Basel. Schweizer Bundesbahnen. Zur Geschichte der Dampfturbinen-Lokomotive. „Weckbeton“. Schweizer Verein von Gas- und Wasserfachmännern. — Nekrologie: Thomas Luchsinger. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein.

Band 88. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 6

## Beitrag zur Berechnung von Schrumpfvverbindungen.

Von Dipl.-Ing. W. JANICKI, Zürich-Baden.

Die Verwendung der Verbindung von Maschinenteilen durch Aufschrumpfen hat sich in der Praxis schon seit langem eingeführt und im allgemeinen gut bewährt. In dem Masse jedoch, wie der Konstrukteur durch die technische und wirtschaftliche Forderung einer vermehrten Ausnutzung der Baustoffe dazu geführt wird, mit den Beanspruchungen des Materials immer höher zu gehen und gelegentlich fast bis in die Nähe der Streckgrenze zu gelangen<sup>1)</sup>, ergibt sich die Notwendigkeit, eine möglichst klare Vorstellung von dem tatsächlich auftretenden Deformations- und Spannungszustand zu gewinnen. Schrumpfvverbindungen werden häufig bei hochbeanspruchten Maschinenteilen, wie z. B. den Trommeln und Radscheiben schnellaufender Turbinen, Radkränzen von Zahnradgetrieben, Kurbelwangen von Kolben-, Dampf- und Oelmaschinen, Kollektoren elektrischer Maschinen<sup>2)</sup> usw. verwendet. Da diese Konstruktionselemente oft auch im Betriebe grossen Temperaturunterschieden ausgesetzt sind, ergibt sich die Notwendigkeit, deren Einfluss ebenfalls genau zu untersuchen, da sie unter Umständen eine vollständige Veränderung des erwarteten Spannungs- und Formänderungsbildes zur Folge haben können.

Die bis anhin im Maschinenbau gebräuchlichen Berechnungsarten von Schrumpfvverbindungen umfassen in der Hauptsache zwei Näherungsverfahren: das eine behandelt den Kernkörper — meistens eine Welle oder ein Zapfen — als ein vollständig starres Konstruktionselement und berücksichtigt nur die Elastizität des Mantelkörpers, der eine Trommel, Radscheibe, Platte, Kurbelwange, Ring usw. sein kann<sup>3)</sup>. Bei der andern Rechenmethode wird auch die Nachgiebigkeit des Kernkörpers in Betracht gezogen, wobei Kern- und Mantelkörper als scheibenförmige Gebilde aufgefasst werden und dementsprechend die aus der höhern Festigkeitslehre bekannte Theorie der Scheiben zur Anwendung gelangt<sup>4)</sup>. Eine sehr gute Zusammenstellung der bis jetzt im Maschinenbau üblichen Grundlagen für die Berechnung von Schrumpfvverbindungen gibt die Arbeit von H. Böhm und H. Kreczy<sup>5)</sup>, und einen Hinweis auf die Wünschbarkeit eines weiteren Ausbaues der bis anhin gebräuchlichen Berechnungsverfahren, wozu die wissenschaftliche Literatur genügend Unterlagen bietet, der in der Zeitschrift „Maschinenbau“ veröffentlichte Aufsatz von F. László<sup>6)</sup>.

Im Nachfolgenden wird der Versuch unternommen, einen Beitrag zur Berechnung von Schrumpfvverbindungen

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Stodola, Dampf- u. Gasturbinen, 6. Aufl., 1924, S. 349.

<sup>2)</sup> Siehe H. de Pistoye, Etude mécanique et usinage des machines électriques, 1924, Seite 431 bis 437.

<sup>3)</sup> Siehe z. B. Dr. Hermann Pflieger-Haertel: Die Beanspruchung einer aufgeschrumpften rotierenden Platte. „Siemens-Zeitschrift“, Heft Nr. 1, 1922, Seiten 32 bis 37.

<sup>4)</sup> Siehe z. B. A. Stodola: „Dampf- und Gasturbinen“. 6. Auflage, 1924, Seite 342, sowie A. Föppl, „Lehrbuch der technischen Mechanik“, Band V, 1907, Seiten 45 bis 144 und A. & L. Föppl „Drang und Zwang“, Band I, 2. Aufl., 1924, Seiten 244 bis 328. Ferner Dr. E. Honegger: Ueber das Aufschrumpfen von Rädern auf Wellen oder Trommeln, „BBC-Mitteilungen“, September 1919, Seiten 222 bis 230 und E. Müller: Beitrag zur Kenntnis der beim Aufpressen von Scheibenrädern auf ihre Wellen entstehenden Beanspruchungen, „S. B. Z.“, 24. Juni 1916, Seiten 307 bis 310.

<sup>5)</sup> Dipl. Ing. H. Böhm und Dipl. Ing. H. Kreczy: Ueber die Berechnung von Schrumpfvspannungen, „Werft, Reederei, Hafen“, Heft Nr. 6, 22. März 1925.

<sup>6)</sup> Dr. Ing. Franz László: Schrumpfvverbindungen. „Maschinenbau“, Heft Nr. 12 vom 18. Juni 1925.

für den Fall beizusteuern, wo der Mantelkörper als scheibenförmiges elastisches Gebilde aufgefasst werden kann und der Kernkörper eine Voll- oder Hohlwelle ist, deren Elastizität ebenfalls im vollen Masse berücksichtigt wird. Die geeigneten Grundlagen für die festigkeitstheoretisch richtige Erfassung und Verfolgung der soeben angedeuteten Probleme bieten die Untersuchungen von A. & L. Föppl<sup>1)</sup> über die Umdrehungskörper, an denen ringsum symmetrisch verteilte Kräfte angreifen, die alle in den durch ihre Angriffspunkte gelegten Meridianebenen enthalten sind.

In Anlehnung an die von A. & L. Föppl aufgestellten Formeln für den Spannungs- und Formänderungszustand einer unendlich langen, in der Mitte ringsum symmetrisch belasteten Vollwelle lässt sich die Berechnung der in Frage stehenden Schrumpfvverbindung auf verschiedene Arten durchführen, je nachdem die Belastung in der Mitte oder am Ende der Welle (Zapfen) nur auf einem sehr schmalen Streifen konzentriert oder auf eine gewisse Länge verteilt angeordnet ist, und je nachdem man die Berechnung auf die, auf Grund des Satzes von dem Minimum der Formänderungsarbeit (Theorem von Ritz) aus einem Variationsproblem gewonnenen Formeln oder auf jene aus der genauen Integration der massgebenden partiellen Differentialgleichungen des Problems, unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen hervorgegangenen, aufbaut. Wegen der Umständlichkeit der mit der letzterwähnten Methode verbundenen Rechnungen sollen an dieser Stelle nur die beiden sich auf den Satz von dem Minimum der Deformationsarbeit stützenden Berechnungsverfahren behandelt werden. Die Berechnungsgrundlagen für den Fall einer Hohlwelle oder eines hohlen Zapfens bleiben einer spätern Arbeit vorbehalten.

### Erste Berechnungsart.

Betrachtet man zuerst einen Kernkörper von der Gestalt eines Kreiszyllinders und von einer Länge, die gegenüber dem Durchmesser gross genug ist, um sie mit praktisch vollkommen ausreichender Genauigkeit als unendlich gross ansehen zu können, und setzt voraus, dass die einzige Belastung, die der Körper aufzunehmen hat, auf ihn durch einen sehr schmalen Ring übertragen wird, der den Zylinder auf einem ungefähr in der Mitte der ganzen Länge liegenden Streifen umfasst, so wird auf die Welle ein, längs des Umfanges eines jeden Querschnitts ringsum gleichmässig verteilter Anpressungsdruck  $p_x$  ausgeübt. Dieser spezifische Flächendruck  $p_x$  wirke gemäss der einfachsten Annahme nach dem Gesetz

$$p_x = p_0 \frac{h-x}{h} \dots \dots \dots (I)$$

wenn  $p_0$  den spezifischen Flächendruck in der Mitte bedeutet und die Last über einen ringförmig in der Mitte der ganzen Welle angeordneten Streifen von der Breite  $2h$  verteilt ist, wobei  $h$  nicht nur als klein gegenüber der Länge der Welle, sondern auch als klein gegenüber ihrem Halbmesser anzusehen ist.  $x$  bedeutet dabei den Abstand des ins Auge gefassten Querschnittes vom mittleren Querschnitt. In diesem Falle ergibt die nach dem Ritz'schen Verfahren des Minimums der Formänderungsarbeit als Variationsproblem durchgeführte Rechnung in guter Annäherung für die Radial-, Tangential-, Axial- und

<sup>1)</sup> A. & L. Föppl: „Drang und Zwang“, Band II, 1920, Seiten 161 bis 181 und 190 bis 225, sowie 284 bis 297.

Schubspannung an einer beliebigen Stelle der Welle *innerhalb des Belastungstreifens* ( $0 \leq |x| \leq |h|$ ) die Ausdrücke <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= k e^{-\gamma x} (a - r) - \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \\ \sigma_t &= e^{-\gamma x} [k(a - 2r) - c \gamma r^2 (a - r)] + \frac{c}{h} r^2 (a - r) - \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \\ \sigma_x &= c \left( \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} - \frac{(h-x)^2}{2h} \right) (2a - 3r) \\ \tau &= cr(a - r) \left( e^{-\gamma x} - \frac{h-x}{h} \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

wobei  $r$  und  $x$  die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten eines Punktes der Welle, in radialer und axialer Richtung gemessen, bedeuten und  $c, \gamma, k$  feste Zahlenkoeffizienten, die folgende Werte aufweisen:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{h \dot{p}_0}{a^2 (0,660 h + 0,238 a)} = \sim 4,202 \dot{p}_0 \cdot \frac{h}{a^3} \\ \gamma &= 4,04 \cdot \frac{1}{a} \\ k &= - \frac{0,269 \dot{p}_0 h}{a (0,660 h + 0,238 a)} = \sim - 1,130 \frac{\dot{p}_0 h}{a^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

wenn man der Einfachheit halber den Wert der Poissonschen Konstanten  $m = \infty$  setzt, was nach Föppl in diesem Falle zulässig ist, ohne die Genauigkeit der Rechnung allzu sehr zu beeinträchtigen. Jedenfalls steht nichts im Wege, die Rechnung für eine andere Grösse des „Querkoeffizienten“  $m$  (z. B. für das im Maschinenbau übliche  $m = 10/3$ ) durchzuführen, falls darauf besonderer Wert gelegt wird. Für  $m = 10/3$  ergeben sich folgende Werte der Konstanten  $c, \gamma, k$ :

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\dot{p}_0 h}{a^2 (0,948 h + 0,337 a)} = \sim 2,967 \frac{\dot{p}_0 h}{a^3}; \\ \gamma &= 4,50 \cdot \frac{1}{a} \\ k &= - 0,3234 a c = - 0,3234 \cdot 2,967 \frac{\dot{p}_0 h}{a^3} \end{aligned} \right\} (3')$$

Da es aber bei den hier angestellten Betrachtungen mehr auf die grundsätzliche Darlegung des Rechnungsganges, als auf die genaue Ausarbeitung des Verfahrens bis in alle Einzelheiten ankommt, sei auf die Durchführung der Rechnung für einen andern Wert der Poissonschen Konstanten  $m$  an dieser Stelle verzichtet.

Berechnet man noch die elastische Verkürzung  $\Delta a$ , die ein Halbmesser  $a$  des Zylinders an irgend einer Stelle  $x$  *innerhalb des Belastungstreifens* ( $0 \leq |x| \leq |h|$ ) erfährt und die man für die weiteren Ueberlegungen braucht, so findet man:

$$\Delta a = \int_0^a \epsilon_r dr = \frac{1}{E} \int_0^a \left[ \sigma_r - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_t) \right] dr = \frac{1}{E} \int_0^a \left[ k e^{-\gamma x} (a - r) - \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \right] dr$$

(für  $m = \infty$ ) =  $-\frac{\dot{p}_0}{E} \left( 0,565 h e^{-4,04 x/a} + \frac{h-x}{h} a \right)$  (4)

wobei  $\epsilon_r$  die Dehnungskomponente in radialer Richtung und  $E$  den Elastizitätsmodul des Materials für Zug bedeutet.

Fasst man andererseits den scheibenförmigen Mantelkörper ins Auge, so gelten nach der Scheibentheorie folgende Beziehungen für die elastische Vergrösserung  $u$  irgend eines Zwischenradius  $r$  der Scheibe, und für die radiale und tangentielle Spannung  $\sigma_r^*$  und  $\sigma_t^*$  an einer beliebigen Stelle (die axiale Spannung  $\sigma_x^*$  ist nach dieser Theorie gleich Null zu setzen):

$$\left. \begin{aligned} u &= Br + \frac{C}{r} \\ \sigma_r^* &= E \frac{1}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu) B - (1-\nu) \frac{C}{r^2} \right] \\ \sigma_t^* &= E \frac{1}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu) B + (1-\nu) \frac{C}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} (5)$$

wobei  $\nu = 1/m$  bedeutet und  $B$  und  $C$  Integrationskonstanten sind, die vorläufig unbestimmt bleiben. Setzt man wiederum zur Vereinfachung der Rechnung  $m = \infty$ , also  $\nu = 0$ , so nehmen die Gleichungen (5) folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} u &= Br + \frac{C}{r} \\ \sigma_r^* &= E \left( B - \frac{C}{r^2} \right) \\ \sigma_t^* &= E \left( B + \frac{C}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Ist nun das Schrumpfmass oder die Zugabe  $\Delta$  vorgeschrieben (dieser Wert schwankt in der Praxis zwischen 0,5 ‰ bis 1,5 ‰ des inneren Durchmessers  $2 R_1$  des Mantelkörpers), so stellt sich jetzt die Aufgabe, die maximale spezifische Flächenpressung  $\dot{p}_0$ , sowie die Integrationskonstanten  $B$  und  $C$  des Scheibenproblems zu bestimmen. Diese drei Grössen lassen sich nun aus folgenden drei Randbedingungen ermitteln:

1. Weil am äusseren Scheibenrand ( $r = R_2$ ) keine Belastung vorhanden ist, so muss dort die Radialspannung den Wert  $(\sigma_r^*)_{r=R_2} = 0$  haben.

2. Die algebraische Summe der radialen Ausdehnung  $u$  für den Mantelkörper und der negativ genommenen Ausdehnung, d. h. Zusammendrückung  $\Delta a$  für den Kernkörper muss gleich der Zugabe  $\Delta$  sein.

3. In der Berührungsfläche, d. h. beim Kernkörper für  $r = a$  und beim Mantelkörper für  $r = R_1$  müssen die Radialspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_r^*$  gleich sein.

Diese Bedingungen führen auf folgende drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} E \left( B - \frac{C}{R_2^2} \right) &= 0 \\ BR_1 + \frac{C}{R_1} - \frac{\dot{p}_0}{E} (0,565 h + a) &= \Delta \\ E \left( B - \frac{C}{R_1^2} \right) &= \dot{p}_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

Da  $R_1 = a - \Delta$  und  $\Delta$  nur Tausendstel von  $a$  betragen darf, kann in den Gleichungen (7) unbedenklich  $R_1 = a$  gesetzt werden, wodurch sich die Auflösung vereinfacht und folgende Werte für  $\dot{p}_0, B$  und  $C$  liefert:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{a^2 \Delta}{a(R_2^2 + a^2) + (R_2^2 - a^2)(0,565 h + a)} = \sim \frac{a \Delta}{2 R_2^2} \\ C &= \sim \frac{a \Delta}{2}; \dot{p}_0 = \sim - E \frac{\Delta}{2} \frac{R_2^2 - a^2}{R_2^2 a} \end{aligned} \right\} (8)$$

Es sei noch hervorgehoben, dass zur Vereinfachung der Rechnung der Mantel- und der Kernkörper als aus gleichem Material bestehend vorausgesetzt sind, was die Gleichheit der Elastizitätsmodulen in den Formelgruppen (4), (5), (7) und (8) zur Folge hat.

*Zahlenbeispiel:* Die gefundenen Ergebnisse sollen nun an einem Zahlenbeispiel erläutert werden. Es seien folgende Grössen der Berechnung zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} a &= 20 \text{ cm}, R_2 = 40 \text{ cm}, h = 0,5 \text{ cm} \\ \Delta &= 1,5 \text{ ‰ von } a = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,03 \text{ cm} \\ E &= 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad (m = \infty, 1/m = \nu = 0) \end{aligned}$$

Daraus erhält man gemäss den Formeln (8), (6) und (3):

$$\begin{aligned} B &= \sim \frac{a \Delta}{2 R_2^2} = \frac{0,03 \cdot 20}{2 \cdot 1600} = 18,75 \cdot 10^{-5} \\ C &= \sim \frac{a \Delta}{2} = \frac{20 \cdot 0,03}{2} = 0,3 \text{ cm}^2 \\ \dot{p}_0 &= \sim - 2,2 \cdot 10^6 \frac{0,03}{2 \cdot 1600} \cdot \frac{1600 - 400}{20} = \\ &= - 6,6 \cdot 62,5 \cdot 3 = - 1237,5 \text{ kg/cm}^2 \\ k &= + 1,130 \cdot \frac{1237,5 \cdot 0,5}{400} = 1,748; \quad \gamma = \frac{4,04}{20} = 0,202 \\ c &= - \frac{k}{0,269 a} = - 0,325 \\ (\sigma_r^*)_{r=R_2} &= 2,2 \cdot 10^6 \left( 18,75 \cdot 10^{-5} - \frac{0,3}{1600} \right) = 0 \\ (\sigma_t^*)_{r=R_2} &= 2,2 \cdot 10^6 \left( 18,75 \cdot 10^{-5} + \frac{0,3}{1600} \right) = 825 \text{ kg/cm}^2 \\ (\sigma_r^*)_{r=R_1=a} &= 2,2 \cdot 10^6 \left( 18,75 \cdot 10^{-5} - \frac{0,3}{400} \right) = \\ &= - 1237,5 \text{ kg/cm}^2 \\ (\sigma_t^*)_{r=R_1=a} &= 2,2 \cdot 10^6 \left( 18,75 \cdot 10^{-5} + \frac{0,3}{400} \right) = \\ &= 2062,5 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe A. & L. Föppl: „Drang und Zwang“, Band II, 1920, S. 172.

Trifft man die Voraussetzung, dass es sich um Material mit einer niedrigen Streckgrenze, z. B. 1800 kg/cm<sup>2</sup> (weiches Flusseisen) handelt, so kann man den obigen Zahlenergebnissen entnehmen, dass, während die maximale Radialspannung am Schrumpfring noch erheblich unter der Streckgrenze bleibt, diese durch die Tangentialspannung in so bedeutendem Masse überschritten wird, dass eine mit einer der Berechnung zugrunde gelegten Zugabe  $\Delta = 1,5\%$  ausgeführte Schrumpfung zwecklos ist, da nach der jetzt allgemein anerkannten Theorie der Bruchgefahr, die von Guest-Mohr aufgestellt worden ist<sup>1)</sup>, die grösste in einem Querschnitt auftretende Schubspannung als Mass für die Beanspruchungsgefahr eines Baustoffes betrachtet werden muss, und diese grösste Schubspannung nach der Elastizitätslehre gleich dem halben Unterschied der algebraisch genommenen grössten und kleinsten Normalhauptspannung gesetzt werden muss. Bei der Betrachtung zu Grunde gelegten Scheibe sind  $\sigma_r^*$  und  $\sigma_t^*$  zwei Hauptspannungen, die dritte, die zur Scheibenmittelebene senkrecht stünde, ist Null. Die grösste Schubspannung ist daher  $\frac{\sigma_r^*}{2}$  oder  $\frac{\sigma_t^*}{2}$ , je nachdem  $\sigma_r^*$  oder  $\sigma_t^*$  grösser ist. Im vorliegenden

Zahlenbeispiel ergibt sich für die maximale Schubspannung ein Wert von rund  $2062/2 = 1031$  kg/cm<sup>2</sup>, der somit den im Maschinenbau für das in Betracht gezogene Material im allgemeinen zulässigen Wert schon überschreitet. Um die maximale Schubspannung herabzusetzen, müsste man also entweder das Schrumpfmass  $\Delta$  verkleinern, oder aber die Breite des Ringes ändern.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass auf Grund der Formeln (2) und (4) mit Hilfe der jetzt numerisch festgelegten Konstanten  $k$ ,  $c$  und  $\gamma$  der gesamte Spannungs- und Deformationszustand der Welle an irgend einer Stelle innerhalb des Belastungstreifens bestimmt werden kann. Auch für eine beliebige Stelle ausserhalb des Belastungstreifens gelten ähnliche Beziehungen wie die unter (2) angegebenen, auf deren Wiedergabe aber hier verzichtet sei, sodass tatsächlich die von der Schrumpfung herrührende Spannungsverteilung an jedem beliebigen Punkt der Welle ermittelt werden kann.

Handelt es sich statt um eine Welle um einen Zapfen, auf dem ein Schrumpfring sitzt, also um einen Belastungsfall, bei dem die einschnürende Last am Ende des Kreiszyinders angreift, so lässt sich dieser Fall auf den weiter oben behandelten zurückführen, indem man in den dort vorkommenden Formeln  $p_0$  durch  $2p_0$  ersetzt. Das beruht auf der Ueberlegung, dass die eine Hälfte des Zylinders von der Symmetrieebene  $x = 0$  ab sich ungefähr unter den gleichen Bedingungen befindet, wie der Zylinder in dem hier betrachteten Falle. Genau trifft dies freilich nicht zu, weil in der Symmetrieebene  $x = 0$  des früheren Falles zwar keine Schubspannungen, wohl aber Axialspannungen  $\sigma_x$  auftreten, die hier fehlen. Immerhin wird man diese Abweichung nicht als so wesentlich anzu sehen haben, dass dadurch eine schätzungsweise Uebertragung des früheren Ergebnisses unmöglich gemacht würde. Andernfalls würde aber auch nichts im Wege stehen, die frühere Untersuchung mit den entsprechenden sinngemässen Abänderungen von Anfang an nochmals durchzuführen.

#### Zweite Berechnungsart.

Die zweite Berechnungsart bezieht sich auf Schrumpfringe von solcher Breite, die gegenüber den andern Abmessungen nicht mehr vernachlässigt werden kann, und gründet sich auf die von A. & L. Föppl abgeleiteten Formeln für den Spannungs- und Deformationszustand einer unendlich langen Welle, die in der Mitte auf eine Länge  $l$  ringsum gleichmässig mit einer konstanten spezifischen Flächenpressung  $p_0$  belastet ist<sup>2)</sup>. In diesem Falle lauten

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Stodola „Dampf- und Gasturbinen“, 6. Aufl., 1924, S. 314, sowie A. & L. Föppl „Drang und Zwang“, Bd. I, 2. Aufl., 1924, S. 46 bis 48 und „Lehrbuch der technischen Mechanik“, Bd. V, S. 19 bis 28.

<sup>2)</sup> A. & L. Föppl „Drang und Zwang“, Band II, 1920, Seiten 178 und 179, Formeln (38) bis (40).

die Ausdrücke für die Spannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$ , sowie die elastische Zusammendrückung  $w$  an einer beliebigen Stelle  $(x, r)$  innerhalb der Belastungstrecke  $l$  folgendermassen ( $m$  wiederum  $= \infty$  gesetzt):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -0,280 p_0 \frac{a-r}{a} \left( 2 - e^{-4,04(l-2x)/2a} - e^{-4,04(l+2x)/2a} \right) - p_0 \\ \sigma_t &= 0,2476 \frac{p_0}{a^3} [1,13 a^2 (2r-a) - 17,0 r^2 (a-r)] \times \\ &\quad \left( 2 - e^{-4,04(l-2x)/2a} - e^{-4,04(l+2x)/2a} \right) - p_0 \\ \sigma_x &= 0,257 p_0 \frac{2a-r}{a} \left( 2 - e^{-4,04(l-2x)/2a} - e^{-4,04(l+2x)/2a} \right) \\ \tau &= 1,04 p_0 \frac{r(a-r)}{a^2} \left( e^{-4,04(l-2x)/2a} - e^{-4,04(l+2x)/2a} \right) \\ w &= -0,140 a \frac{p_0}{E} \left( 2 - e^{-4,04(l-2x)/2a} - e^{-4,04(l+2x)/2a} \right) - \frac{f_0 a^2}{E} \end{aligned} \right\} (9)$$

Da die Ausdrücke für die Radial- und Tangentialspannung  $\sigma_r^*$  und  $\sigma_t^*$ , sowie für die elastische Verschiebung  $u$  beim scheibenförmigen Mantelkörper die selben bleiben und auch die Anschluss- und Randbedingungen sich gegenüber dem Fall 1 nicht ändern, so ergeben sich entsprechend den Formeln (7) folgende Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der drei unbekanntenen Grössen  $p_0$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} E \left( B - \frac{C}{R_2^2} \right) &= 0 \\ B R_1 + \frac{C}{R_1} - \frac{p_0 a}{E} (1,280 - 0,280 e^{-2,02 l/a}) &= \Delta \\ E \left( B - \frac{C}{R_1^2} \right) &= p_0 \end{aligned} \right\} (10)$$

Ersetzt man wiederum  $R_1$  durch  $a$ , was in Anbetracht der Kleinheit des Schrumpfmasses  $\Delta$  ohne weiteres zulässig ist, so ergibt die Auflösung der Gleichungen (10):

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{a \Delta}{(R_2^2 + a^2) + (R_2^2 - a^2) (1,280 - 0,280 e^{-2,02 l/a})} \\ C &= \frac{a \Delta R_2^2}{(R_2^2 + a^2) + (R_2^2 - a^2) (1,280 - 0,280 e^{-2,02 l/a})} \\ p_0 &= -\frac{E \Delta}{a (R_2^2 + a^2) + (R_2^2 - a^2) (1,280 - 0,280 e^{-2,02 l/a})} \end{aligned} \right\} (11)$$

Zum Zwecke des Vergleiches seien dem folgenden Zahlenbeispiel die selben Daten zugrunde gelegt wie dem ersten Beispiel, mit Ausnahme der Ringbreite, die hier doppelt so gross angenommen sei.

#### Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} a &= R_1 = 20 \text{ cm}, R_2 = 40 \text{ cm}, l = 2h = 2 \text{ cm} \\ \Delta &= 1,5\% \text{ von } a = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,03 \text{ cm} (m = \infty; \\ &\quad \frac{1}{m} = \nu = 0) \end{aligned}$$

$$E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

Daraus berechnen sich die massgebenden Grössen:

$$\begin{aligned} B &= \frac{20 \cdot 0,03}{(1600 + 400) + (1600 - 400) (1,280 - 0,280 e^{-0,202})} = \\ &= \frac{20 \cdot 0,030}{3261,44} = 1,84 \cdot 10^{-4} \\ C &= R_2^2 B = 1600 \cdot 1,84 \cdot 10^{-4} = 0,294 \\ p_0 &= -E C \frac{R_2^2 - a^2}{a^2 R_2^2} = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,294 \cdot \frac{1600 - 400}{400 \cdot 1600} = \\ &= -1210 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_r^*_{\max} = 2,2 \cdot 10^6 \left( 1,84 \cdot 10^{-4} - \frac{0,294}{400} \right) = -2,2 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4} = -1210 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_t^*_{\max} = 2,2 \cdot 10^6 \left( 1,84 \cdot 10^{-4} + \frac{0,294}{400} \right) = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 9,2 \cdot 10^{-4} = 2020 \text{ kg/cm}^2$$

Somit beträgt die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  in diesem Falle

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t^*_{\max}}{2} = 2020 : 2 = 1010 \text{ kg/cm}^2,$$

überschreitet also auch schon etwas die im Maschinenbau im allgemeinen zulässige Grenze.

Nach Ermittlung der Grössen  $B$ ,  $C$  und  $p_0$  lassen sich jetzt auch die verschiedenen Spannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$  an einer beliebigen Stelle der Welle sowohl innerhalb wie ausserhalb des Belastungstreifens be-



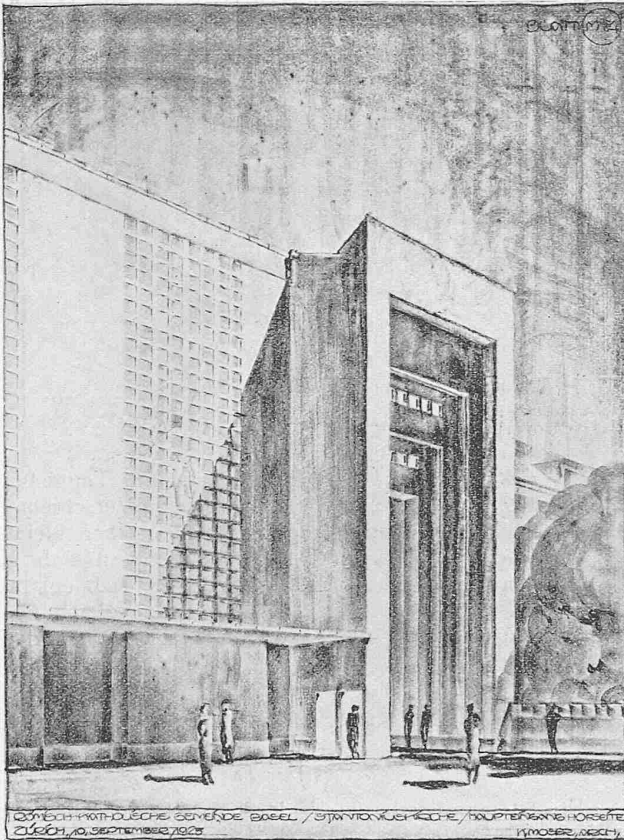


Abb. 5. Haupteingang vom grossen Hof her.

DIE SANKT ANTONIUS - KIRCHE  
DER RÖMISCH-KATHOLISCHEN GEMEINDE BASEL.

Arch. Prof. Dr. K. Moser, Zürich, und G. Doppler & Sohn, Basel.

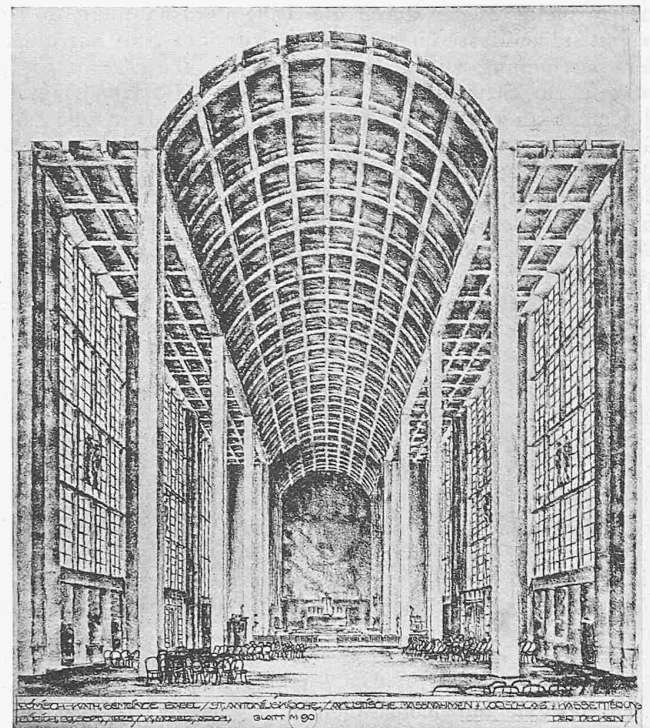


Abb. 6. Innenansicht der Kirche.

stimmen, sowie auch alle Dehnungskomponenten in irgend einem Punkt der Welle ermitteln, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

Zum Vergleich sei das gleiche Zahlenbeispiel noch nach dem zweiten der in der Einleitung erwähnten Näherungsverfahren durchgerechnet, bei dem sowohl der Mantel, als auch der Kernkörper als scheibenförmige Gebilde aufgefasst werden und somit für beide die Scheibentheorie zur Anwendung gelangt. In diesem Falle lauten die Formeln (für  $m = \infty$ ) für die elastischen Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  und die tangentialen und radialen Spannungen  $\sigma_{r1}$ ,  $\sigma_{r2}$  und  $\sigma_{t1}$ ,  $\sigma_{t2}$  beider Konstruktionselemente folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a_1 r + \frac{b_1}{r}; \quad \sigma_{r1} = E \left( a_1 - \frac{b_1}{r^2} \right); \\ &\quad \sigma_{t1} = E \left( a_1 + \frac{b_1}{r^2} \right) \\ u_2 &= a_2 r + \frac{b_2}{r}; \quad \sigma_{r2} = E \left( a_2 - \frac{b_2}{r^2} \right); \\ &\quad \sigma_{t2} = E \left( a_2 + \frac{b_2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} (12)$$

wobei die Integrationskonstanten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  folgende Werte haben:

$$a_1 = \frac{\Delta (R_1^2 - R_2^2)}{2 R_1 R_2}; \quad b_1 = 0; \quad a_2 = \frac{\Delta R_1}{2 R_2^2}; \quad b_2 = \frac{\Delta R_1}{2} \quad (13)$$

Zahlenbeispiel: Führt man die Rechnung für die Werte  $a = R_1 = 20$  cm,  $R_2 = 40$  cm,  $\Delta = 1,5 \cdot 10^{-3}$  von  $a$  durch, so findet man:

$$a_1 = - \frac{0,03 (1600 - 400)}{2 \cdot 20 \cdot 1600} = - 5,625 \cdot 10^{-4}; \quad b_1 = 0; \\ a_2 = 1,875 \cdot 10^{-4}; \quad b_2 = 0,3$$

$$\sigma_{r1 \max} = \sigma_{r2 \max} = 2,2 \cdot 10^6 \left( 1,875 \cdot 10^{-4} - \frac{0,3}{400} \right) = - 1239 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{t1 \max} = \sigma_{t2 \max} = 2,2 \cdot 10^6 \left( 1,875 \cdot 10^{-4} + \frac{0,3}{400} \right) = + 2064 \text{ kg/cm}^2$$

Vergleicht man die maximale Radial- und Tangentialspannung im Schrumpfring mit den Ergebnissen der beiden ersten Zahlenbeispiele, so sieht man, dass in beiden

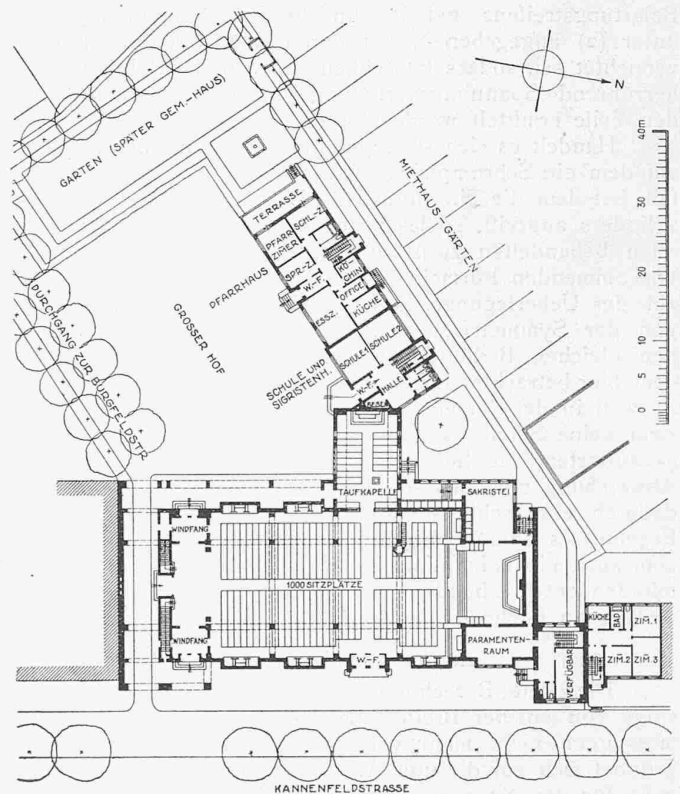


Abb. 1. Lageplan der Kirche und der angebauten Wohnhäuser. — 1 : 1000.

Fällen die Ergebnisse sehr gut übereinstimmen. Führt man die Rechnung nach dem zweiten der hier abgeleiteten Verfahren (Formelgruppe 11) unter sonst gleichen Verhältnissen für eine Breite des aufzuschumpfenden Gegenstandes von  $l = 10$  cm durch, so findet man für  $\sigma_{r \max}^*$  und  $\sigma_{t \max}^*$  folgende Werte:

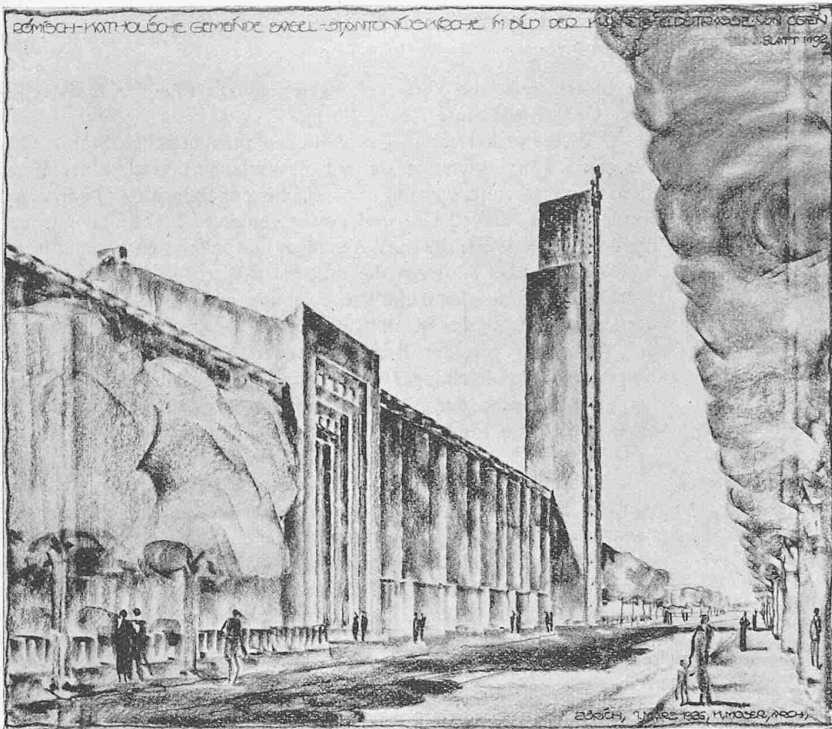


Abb. 3. Fassade der St. Antonius-Kirche an der Kannenfeldstrasse, aus Osten gesehen.

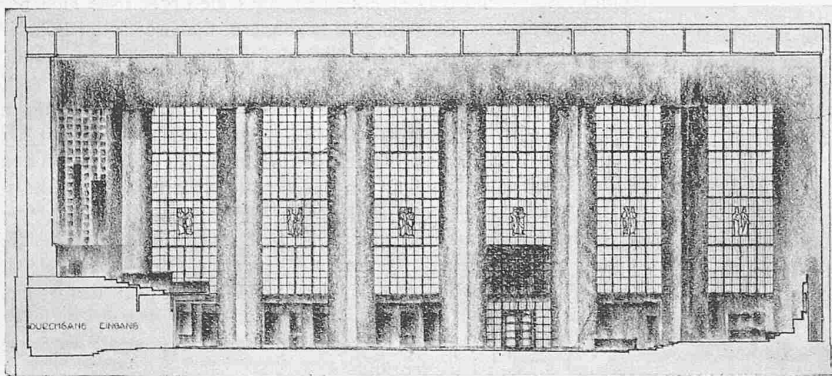


Abb. 2. Längsschnitt durch die Kirche. — Masstab 1 : 500.

$$\sigma_r^{*max} = - 1166 \text{ kg/cm}^2; \sigma_l^{*max} = + 1938 \text{ kg/cm}^2$$

also  $\tau_{max}^{*} = \frac{\sigma_l^{*max}}{2} = 969 \text{ kg/cm}^2$

während sich für  $l = 40 \text{ cm}$  die Werte ergeben:

$$\sigma_r^{*max} = - 1122 \text{ kg/cm}^2; \sigma_l^{*max} = + 1870 \text{ kg/cm}^2,$$

also  $\tau_{max}^{*} = \sigma_l^{*max/2} = 935 \text{ kg/cm}^2$

Aus diesen Zahlenbeispielen ist somit deutlich ersichtlich, dass die für die Beanspruchungsgefahr massgebenden Schrumpfspannungen nur in sehr geringem Grade von der Breite des Mantelkörpers abhängen, und dass es daher im allgemeinen sehr gut zugänglich ist, nach den bisher üblichen Näherungsverfahren unter Vernachlässigung der Ringbreite zu rechnen.

Die hier durchgeführten Betrachtungen und Ueberlegungen beziehen sich auf ruhende Schrumpfverbindungen. Befindet sich das ganze System in Rotation, so überlagern sich über die Schrumpfspannungen noch die durch die Fliehkräfte hervorgerufenen Zusatzspannungen und sind diesen algebraisch beizufügen<sup>1)</sup>. Dazu kommen noch die Biegungsspannungen des Eigengewichtes, unter Umständen diejenigen durch die Wellenschwingung verursachten, sowie

<sup>1)</sup> Siehe Stodola „Dampfturbinen“, 6. Auflage, 1924, Seite 344 und Dr. E. Honegger, a. a. O., sowie: Ausgleich der Beanspruchung einer rasch rotierenden Radscheibe durch passenden Vorspannungszustand, „BBC-Mitteilungen“, November 1919, Seiten 273 bis 276.

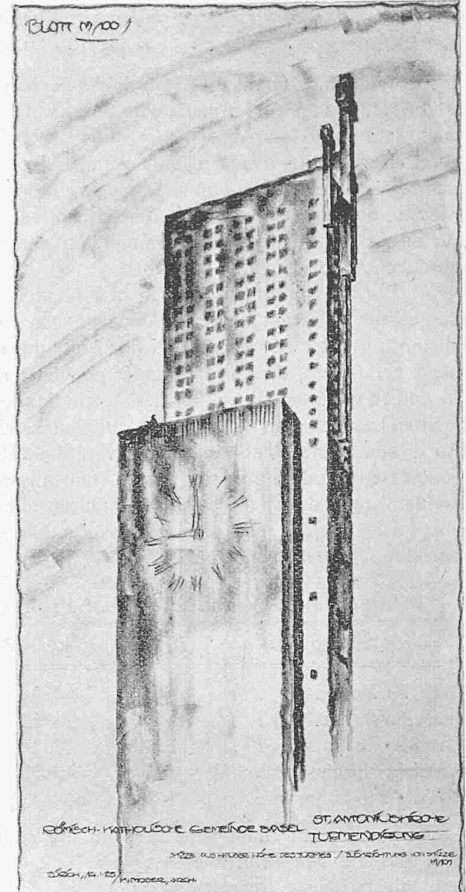


Abb. 4. Der Turm, aus halber Höhe.

allfällige Torsionsspannungen, die sich zu den Schrumpfschubspannungen algebraisch addieren. Im fernern ist der Einfluss allfälliger Wärmespannungen, die im Falle bedeutender Temperatur-Unterschiede auftreten, gebührend zu berücksichtigen, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll, sondern nur auf die weiter oben angeführte Arbeit von Böhm und Krescy verwiesen sein möge.

### Röm.-kath. Sankt Antonius-Kirche in Basel.

Arch. Prof. Dr. K. MOSER, Zürich und G. DOPPLER & SOHN, Basel.

Abweichend von der Gewohnheit der „S. B. Z.“, ausser Wettbewerbsprojekten nur Aufnahmen fertiger Bauten zu bringen, seien hier einige Zeichnungen der im Bau befindlichen St. Antonius-Kirche in Basel wiedergegeben, die uns Prof. Dr. K. Moser zur Verfügung gestellt hat. Ohne einer Würdigung vorgreifen zu wollen, kann jetzt schon gesagt werden, dass die ungewöhnliche Auffassung der Aufgabe, die das Beispiel der Eisenbeton-Kirche von Le Raincy in grosszügiger Weise weiterentwickelt, hohes Interesse verdient, sodass die Besucher der Basler Internationalen Ausstellung nicht versäumen werden, den seiner Vollendung entgegengehenden Gussbeton-Neubau an der Kannenfeldstrasse anzusehen, sofern sie sich für Architektur interessieren. — Vielleicht ist es auch unbewusst der Tatsache zu verdanken, dass infolge der grossen Rheinschiffahrts- und Umschlagshafen-Diskussionen der Begriff des „Silo“ populär geworden ist, wenn die Basler — bekanntlich wegen ihres „bösen Maules“ berüchtigt — der neuen Erscheinung gegenüber das erlösende Wort gefunden, und selbige „Seelen-Silo“ getauft haben. Was natürlich nur eine familiäre Vertraulichkeit, und keine Wertung bedeutet. P. M. (auch ein Basler).