Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 14**

Analytische Bestimmung des Schwankungsverhältnisses im Kraftbedarf elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen.

Von Prof. Dr. W. KUMMER, Ingenieur, Zürich.

In einer Arbeit „Neuere Studien über die Schwankungen des Kraftbedarfs elektrischer Bahnen", die wir auf Seite 199 und 214 von Band 67 (im April 1916) dieser Zeitschrift veröffentlichten, haben wir gezeigt, wie sich die Eigenart der Schwankung im Kraftbedarf elektrischer Bahnen aus Projektierungsarbeiten entnehmen lässt; die Diskussion der Eigenart dieser Schwankungen führte dann auf die Aufstellung einer Kurve des Schwankungsverhältnisses des Kraftbedarfs in Abhängigkeit vom Jahresverkehr elektrischer Bahnen (Abbildung 3 auf Seite 215 von Band 67), die demnach mittels eines reinen Probierverfahrens gewonnen worden war. Handelt es sich darum, diese Kurve analytisch zu bestimmen, so muss offenbar die Theorie des Zufalls, bezw. die Wahrscheinlichkeitslehre, zu Hilfe genommen werden. Zu diesem Schritt hat man heute umsoweniger Bedenken zu hegen, als seit einigen Jahren die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Probleme des Telephonwesens zu praktisch wertvollen analytischen Berechnungsmethoden geführt hat. Natürlich können diese Berechnungsmethoden nicht ohne weiteres auch auf unsern Fall übertragen werden, da hier andere Begriffe und Ueberlegungen in Betracht kommen.

Bekanntlich ist die Theorie des Zufalls nur dann anwendbar, wenn man von einem rechnerisch zu erfassenden Ereignisse zum Voraus nicht entscheiden kann, ob es eintreten werde oder nicht, wenn also sein Eintreten nur als möglich, in keiner Weise aber als notwendig erscheint. Für die Ermittlung des Kraftbedarfs elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen spielt nun die in irgend einem Zeitpunkt spontan eintretende Häufung von Einzelleistungen zu einer kumulierten Maximalleistung die Rolle des der Theorie des Zufalls zu unterwerfenden Ereignisses. Wenn in der Einheitszeit (*ein Tag* bezw. *ein Jahr*) auf einem Bahnnetz N Züge verkehren, wobei jeder Zug als eine fortwährend variierende Effektgrösse aufgefasst wird, und wenn wir die Einheitszeit in lauter Teile vom Zeitmass t teilen, so kann t nicht nur die durchschnittliche Fahrzeit eines Zuges, sondern zugleich auch die Wahrscheinlichkeit dafür darstellen, dass ein bestimmter Zugseffekt gerade auf ein Zeitteilchen entfällt; im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dann t die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Einzelereignisses, während $1 - t$ die Wahrscheinlichkeit seines Nichteintretens darstellt. Eine x-fache Kumulation dieses Einzelereignisses verzeichnet nun:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . x \ldots . (N - x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots . N}$$

mögliche Fälle, denen

$$t^x (1 - t)^{N-x}$$

günstige Fälle gegenüber stehen. Die Wahrscheinlichkeit w_x der Kumulation von x Einzelereignissen, bezw. einzelnen Zugseffekten, beträgt somit:

$$w_x = \frac{t^x (1 - t)^{N-x}}{\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . x \ldots . (N - x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . N}}$$

$$= \frac{N!}{x!\,(N - x)!}\, t^x (1 - t)^{N-x}$$

oder, in kürzerer Form geschrieben:

$$w_x = \binom{N}{x} t^x (1 - t)^{N-x} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

womit die bekannte Gleichung von *J. Bernoulli* hergeleitet ist. Die Wahrscheinlichkeit w_x erscheint als eine Zeit, und zwar als diejenige Zeit, während der gerade x Einzelereignisse (Zugseffekte) kumuliert sind. Der maximale Wert w_x', den w_x annehmen kann, erfolgt für ein x' gleich dem Produkt Nt. Wir schreiben:

$$x' = Nt = y.$$

Andererseits gibt es auch einen Wert w_x'', der gleich derjenigen äusserst kurzen Zeit τ ist, bei der gerade noch x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) sich gemäss den mechanischen und elektrischen Verlusten, die auftreten, kumulieren können. Da die x' Einzelereignisse (Zugseffekte), die sich mit der maximalen Wahrscheinlichkeit w_x' kumulieren, dem tatsächlichen Leistungsdurchschnitt, die x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) aber dem tatsächlichen Leistungsmaximum entsprechen, so stellt der Quotient:

$$K = \frac{x''}{x'} = \frac{x''}{y} = \frac{x''}{Nt}$$

das gesuchte Schwankungsverhältnis dar. Diesen, mit Hülfe der Formel von Bernoulli festzustellenden Wert von K verwenden wir für die Schwankung im *täglichen Betrieb,* wobei N und t sich auf die Zeiteinheit *„ein Tag"* beziehen, und wobei w_x und τ in derselben Zeiteinheit gemessen erscheinen.

Wenn man aber N und t auf die Zeiteinheit *„ein Jahr"* bezieht, wobei der Zahlenwert:

$$y = Nt$$

zwar ungeändert bleibt, strebt für

$$\lim N = \infty, \; \lim \frac{1}{t} = \infty$$

die Gleichung (1) einer Form:

$$w_x = \frac{e^{-y} y^x}{x!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

zu, die der bekannten Gleichung von *S. D. Poisson* entspricht. Auch in diesem Fall erlangt w' seinen maximalen Wert bei:

$$x' = Nt = y$$

und weist w'' wiederum die gleiche, äusserst kurze Zeit τ aus (die nun aber mit der Einheit „ein Jahr", also nicht mehr mit der Einheit „ein Tag", gemessen wird), bei der gerade noch x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) zur Kumulation gelangen; analog stellt der Quotient:

$$K = \frac{x''}{x'} = \frac{x''}{y} = \frac{x''}{Nt}$$

wieder das gesuchte Schwankungsverhältnis dar, nun aber für den *Jahresbetrieb*, statt für den Tagesbetrieb.

Die Grösse y, die sowohl für den Tagesbetrieb, als auch für den Jahresbetrieb als der Nenner des Schwankungsverhältnisses auftritt, und die als Mass des Leistungs-Durchschnitts eingeführt erscheint, stellt zugleich auch das Mass des im Tage, bezw. im Jahre bewältigten Verkehrs dar; sie dient uns deshalb als *Verkehrsmasstab.* Indem man sich ein bestimmtes Bahnnetz mit einem von Jahr zu Jahr wachsenden oder überhaupt veränderlichen Verkehr belegt denkt, gelangt man zur Frage nach der Abhängigkeit der zwei Schwankungsverhältnisse K vom Verkehrsmasstab y, bezw., soweit als es sich um K im Jahresbetrieb handelt, zur Frage nach der analytischen Bestimmung derjenigen Kurve, die wir in unserer Abhandlung von 1916 auf Grund des Probierverfahrens ermittelt hatten. Für ein gegebenes y und für ein sachgemäss gewähltes $w_x'' = \tau$ können die Kurven:

$$K = f(y)$$