Beitrag zur Theorie der Torsionsfestigkeit zylindrischer Hohlwellen mit variabler Wandstärke

Autor(en): **Janicki, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **85/86 (1925)**

Heft 9

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40182

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Beitrag zur Theorie der Torsionsfestigkeit zylindrischer Hohlwellen mit variabler Wandstärke. — Lange oder kurze Schwellen? — Diplom-Arbeiten an der E. T. H. — Projekt für ein neues deutsches Forschungsinstitut für Wasserbau und Wasserkraft. — Miscellanea: Schäden an Strassenbelägen infolge der federnden Wirkung der Gummibereifung. Beobachtung elektrischer Störungen, wie Windungsschluss und dergleichen, unter Benützung von Hochfrequenz-Erscheinungen. Schwerer, hölzerner Dachstuhl. Zur Kritik der Widerstandsformeln, insbesondere für Schmalspur. Der Verband Deutscher Elektrotechniker. Automobil-Linien in Schweden. Die neue reformierte Kirche in Solothurn. — Konkurrenzen: Gewerbeschulhaus in Zürich. Lory-Spital in Bern. Ausgestaltung des Marktplatzes in Heerbrugg. — Literatur. — S. T. S.

Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 9

Beitrag zur Theorie der Torsionsfestigkeit zylindrischer Hohlwellen mit variabler Wandstärke.

Von Dipl.-Ing. W. JANICKI, Zürich-Baden, gew. Assistent für technische Mechanik an der E. T. H.

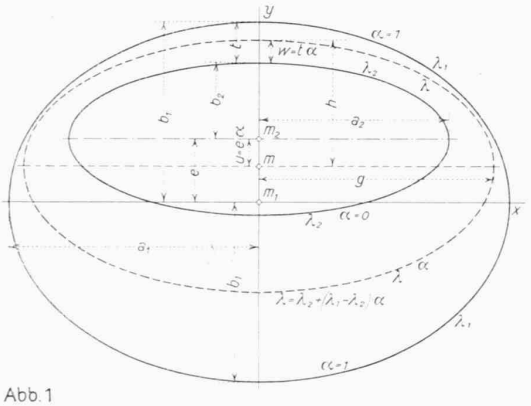


Abb. 1

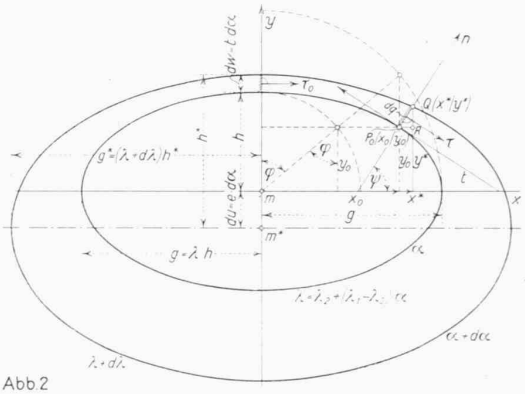


Abb. 2

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in *erster Annäherung* mit der Aufgabe der Torsionsbeanspruchung einer zylindrischen Hohlwelle von einseitig ellipsenringförmigem Querschnitt (Mittelpunkte der beiden Grenzellipsen exzentrisch gelegen, Abbildung 1), nach dem Verfahren des hydrodynamischen Analogons von Thomson und Tait[1]) unter Benützung des Stokeschen Satzes in der Fassung, wie sie von Bredt[2]) zum ersten Male aufgestellt worden ist. Es handelt sich demnach um das Problem, eine zwischen den beiden Grenzkurven des Querschnittes verlaufende zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zu ermitteln, deren Wirbelstärke (Zirkulation) in *jedem* Flächenelement *annähernd* konstant ist, was sich bei Uebertragung auf das Torsionsproblem durch die Bedingung

$$\int \tau \, ds = 2 \, G \, \vartheta \, S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ausdrückt. Dabei bedeutet $\int \tau \, ds$ das Linienintegral der Schubspannung τ längs einer beliebig herausgegriffenen, vollständig in sich selbst geschlossenen Kurve, die im Innern des ins Auge gefassten Querschnittes verläuft, in dem die Schubspannung τ wirkt, S den Flächeninhalt des von der Kurve begrenzten Teiles des Querschnittes, G den Schubmodul des Materials und ϑ den Torsionswinkel, bezogen auf die Längeneinheit der verdrehten Welle.

Unsere Entwicklungen stützen sich auf vier Annahmen:

1. Alle Strömungslinien seien *angenähert* Ellipsen, was für die beiden Grenzkurven genau zutrifft (siehe Abbildung 1, Zwischenellipse α).

2. Das Axenverhältnis $\lambda = g : h$ einer beliebigen Zwischenellipse verändere sich derart *linear*, in Abhängigkeit eines willkürlichen Parameters α, dass sich für die beiden Umfangsellipsen, wie erforderlich, die Werte $\lambda_1 = a_1 : b_1$ und $\lambda_2 = a_2 : b_2$ ergeben, was sich durch den Ansatz ausdrückt:

$$\lambda = \lambda_2 + \mu\alpha \qquad [\mu = \lambda_1 - \lambda_2; \; 0 \leq \alpha \leq 1] \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Die Exzentrizität u der Zwischenellipse α variiere beim Uebergang von einer Stromlinie zur benachbarten *proportional* mit dem ursprünglichen Mittelpunktsabstand e, genüge also der Beziehung

$$u = e\,\alpha \qquad [0 \leq \alpha \leq 1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4. Um die Gestalt der Zwischenellipse *eindeutig* festzulegen, sei vorausgesetzt, dass die jeweilige Exzentrizität u und die Breite w an der engsten Stelle (siehe Abbildung 1) in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, das durch den Wert dieses Verhältnisses für die Ausgangsgrössen $t\,[= b_1 - b_2 - e]$ und e (Abbildung 1) bestimmt ist; es sei also der Ansatz gemacht:

$$w : u = t : e, \text{ also}$$

$$w = \frac{u}{e}\, t = t\,\alpha \qquad [0 \leq \alpha \leq 1]^{3}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mit diesen Annahmen folgt aus der Abbildung 1 für die Halbaxen g und h der Zwischenellipse (α)

$$\left.\begin{aligned} h &= b_2 + u + w = b_2 + (e + t)\,\alpha \\ g &= \lambda h \qquad\quad = \lambda\,[b_2 + (e + t)\,\alpha] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

und für jene der unendlich benachbarten Zwischenellipse $(\alpha + d\alpha)$ (siehe Abbildung 2):

$$\left.\begin{aligned} h^* &= h + du + dw = h + (e + t)\,d\alpha \\ g^* &= \lambda^* h^* = h^*\,(\lambda + d\lambda) = [h + (e + t)\,d\alpha]\,(\lambda + \mu\,d\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Um nun die Kontinuitätsgleichung der wirbelfreien, viskositätslosen, inkompressiblen Flüssigkeit aufstellen zu können, derer wir für die Durchführung des hydro-dynamischen Analogons unseres Torsionsproblems bedürfen, müssen wir die Weite dq des in Abbildung 2 dargestellten Stromfadens an einer beliebigen Stelle (φ) bestimmen. Nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie findet man dafür unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter und höherer Ordnung den Ausdruck:

$$dq = \frac{[e\,(1 - \cos\varphi) + t]\,\lambda + \mu\, h \sin^2\varphi}{\sin\varphi \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}\, d\alpha \quad . \quad . \quad (7)$$

Die an der Stelle $\varphi = 0$, also im engsten Querschnitt des Stromfadens übertragene *mittlere* Schubspannung sei mit τ_0, die an einer beliebigen Stelle φ auftretende mit τ bezeichnet. Dann lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\tau_0\, dw = \tau\, dq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und hieraus ergibt sich das Linienintegral J der Schubspannung τ längs der Stromlinie (α):

[1]) *Thomson* und *Tait:* Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, Braunschweig 1874, I. Band, 2. Teil, Seite 228.

[2]) *R. Bredt:* Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, „Z. V. D. I.", Jahrgang 1896, Seite 785.

[3]) Es sei noch hervorgehoben, dass unter Verzicht auf die Uebereinstimmung der drei Proportionalitätsfaktoren α in den Formeln (2), (3), (4) und die lineare Abhängigkeit der Grössen λ, u, w von diesen Parametern sich allgemeinere Ansätze für die Veränderlichkeit dieser drei Grössen in Funktion dreier willkürlicher Parameter aufstellen lassen, die dann zu einer beliebig weit getriebenen Steigerung der Genauigkeit des hier verwendeten Näherungsverfahrens benützt werden können. Eine andere Möglichkeit zur Aufstellung brauchbarer Näherungsformeln liefert das bekannte Ritzsche Verfahren. Wenn man die Rechenarbeit nicht scheut, kann man für die sogenannte Airysche Spannungsfunktion F einen möglichst einfachen Ansatz mit einigen verfügbaren Freiwerten aufstellen, der nur den Grenzbedingungen an beiden Rändern zu genügen hat, hierauf die Formänderungsarbeit berechnen und dann die disponiblen Konstanten aus der Bedingung bestimmen, dass die Deformationsarbeit ein Minimum sein muss

$$J = 2\int_0^{\pi} \tau\, ds = 2\,h\,t\,\tau_0 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,(1+\lambda^2\operatorname{ctg}^2\varphi)}{[e\,(1-\cos\varphi)+t]\,\lambda+\mu h\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi\tau_0}{\mu\lambda\sqrt{\Delta\left(1+2\frac{e}{t}\right)}}\left\{\left[(c-du)\sqrt{v^2-1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.(c-dv)\sqrt{u^2-1}\right]\mu h-(\lambda^2-1)\,\lambda\,t\sqrt{\Delta\left(1+2\frac{e}{t}\right)}\right\} \quad (9)$$

wobei c, d, u, v, Δ folgende Abkürzungen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} c &= \lambda(\lambda^2-1)(e+t)+\lambda^2\mu h \\ d &= \lambda(\lambda^2-1)\,e \\ \Delta &= (\lambda e+2\mu h)^2+4\,\mu h\,\lambda\,t \\ u &= \frac{-\lambda e+\sqrt{\Delta}}{2\mu h},\quad v=\frac{-\lambda e-\sqrt{\Delta}}{2\mu h} \\ \sqrt{u^2-1} &= \frac{1}{2\mu h}\sqrt{(\sqrt{\Delta}-\lambda e)^2-4\mu^2h^2} \\ \sqrt{v^2-1} &= \frac{1}{2\mu h}\sqrt{(\sqrt{\Delta}+\lambda e)^2-4\mu^2h^2} \\ \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)} &= \frac{\lambda t}{\mu h}\sqrt{1+2\frac{e}{t}} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Den Wert dieses Linienintegrales setzt man in die Formel (1) ein, in der in unserem Falle S den Flächeninhalt der Zwischellipse bedeutet, also durch den Ausdruck $S=\pi g h=\lambda\pi h^2$ gegeben ist. Alsdann ergibt sich für τ_0, unter Berücksichtigung dass $ds = h\sin\varphi\sqrt{1+\lambda^2\operatorname{ctg}^2\varphi}\,d\varphi$ der Ausdruck:

$$\tau_0 = \frac{\mu\lambda^2h^2\sqrt{\Delta\left(1+2\frac{e}{t}\right)}\,\vartheta G}{\mu h\left[(c-du)\sqrt{v^2-1}-(c-dv)\sqrt{u^2-1}\right]-\lambda t(\lambda^2-1)\sqrt{\Delta\left(1+2\frac{e}{t}\right)}} \quad (11)$$

Hiermit ist τ_0 als eine irrationale algebraische Funktion der Variablen λ oder auch α bestimmt, in der alle vorkommenden Grössen als gegeben anzusehen sind, mit Ausnahme des noch einstweilen unbekannten spezifischen Verdrehungswinkels ϑ. Mit τ_0 kennt man jetzt auch nach Gleichung (8) die an jeder anderen Stelle des Querschnittes auftretende Schubspannung τ, womit die gesamte Spannungsverteilung als bekannt anzusehen ist.

Speziell interessant ist es, die maximale Schubspannung τ_{max} zu berechnen, die, wie man leicht nachweisen kann, in dem einen Scheitel der kleinen Axe der äussern Umrissellipse auftritt und aus der Formel (11) unmittelbar hervorgeht, wenn man $\alpha=1$, $h=b_2+e+t=b_1$ und $\lambda=\lambda_1$ setzt.

Um den Verdrehungswinkel ϑ pro Längeneinheit der Welle zu ermitteln, steht uns noch die statische Gleichgewichtsbedingung zur Verfügung, die aussagt, dass das Moment der Schubspannung für jeden Momentenpol gleich dem vorgeschriebenen, verdrehenden Kräftepaar M sein muss. Die mathematische Formulierung dieser Tatsache liefert für das Drehmoment den Ausdruck:

$$M = 2\pi t\mu\vartheta G\times\int_0^1 \frac{Z}{N}\,d\alpha$$

worin

$$Z=[\lambda_2+\mu\alpha]^3\,[b_2+(e+t)\alpha]^4\sqrt{\left(1+2\frac{e}{t}\right)\Delta} \quad (12)$$

und

$$N=\mu\,[b_2+(e+t)\alpha]\left[(c-du)\sqrt{v^2-1}-(c-dv)\times\sqrt{u^2-1}\right]-[\lambda_2+\mu\alpha]\,t\,[(\lambda_2+\mu\alpha)^2-1]\sqrt{\left(1+2\frac{e}{t}\right)\Delta}$$

Wie man sich durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für c, d, u, v, Δ in die Gleichung (12) leicht überzeugt, treten im Integranden von M Quadratwurzeln aus ganzen rationalen Funktionen vierten Grades von λ, bezw. α auf, womit sich das Integral als elliptisches erweist. Nach der allgemeinen Theorie der elliptischen Integrale lässt es sich auf die Summe von rationalen Integralen und elliptischen Normalintegralen erster, zweiter und dritter Gattung zurückführen, wobei dann die letztgenannten durch elliptische Funktionen ausgedrückt werden können, für deren numerische Berechnung Tabellen vorliegen. Da aber das Ergebnis sehr verwickelt und unübersichtlich würde und in keinem Verhältnis zum Rechenaufwande stünde, verzichten wir auf die Auswertung und explizite Darstellung des Ausdruckes für ϑ im allgemeinen Falle und beschränken uns im nachfolgenden darauf, die Ergebnisse der Integration für einige interessante Spezialfälle anzuführen.

Vorher sei aber noch mit einigen Worten bei der allgemeinen Lösung unseres Problems verweilt, die durch die Formeln (11) und (12) gegeben ist. Falls der Mittelpunktsabstand e der beiden den Querschnitt begrenzenden Ellipsen nicht zu gross ist, wird man die Lösung auch als hinlänglich genau für die praktische Anwendung betrachten dürfen. Das erhaltene Resultat genügt jedoch keineswegs der Bedingung der „strengen" Theorie, dass die Wirbelstärke *überall denselben Wert* haben soll, was man übrigens billigerweise von ihm auch nicht verlangen kann, da die Lösung in diesem Falle *im mathematischen Sinn* sogar streng richtig wäre. Wenn man die verschiedenen Stromfäden miteinander vergleicht, so ist zwar der *durchschnittliche* Wert der Wirbelstärke für alle gleich, da diese Bedingung schon der Ableitung der Formel (1) zugrunde liegt [1]). Aber innerhalb des einzelnen Stromfadens wird die Wirbelstärke umso kleiner, je mehr die Weite des Stromfadens zunimmt, weil mit wachsender Stromfadenweite die Durchflussgeschwindigkeit sich vermindert und somit auch die davon abhängige Wirbelstärke sich verkleinert. Sobald daher die Exzentrizität e ziemlich gross wird gegenüber der kleinsten Weite t ($t=b_1-b_2-e$), darf man den aufgestellten Formeln nicht mehr allzuviel Vertrauen entgegenbringen. Wie weit man darin gehen darf, hängt zunächst von den Anforderungen ab, die man an die Genauigkeit der Lösung stellt, ausserdem aber auch von dem Ergebnisse eines Vergleiches der Formeln entweder mit Versuchsresultaten, oder auch mit einer besser begründeten Formel, falls man über eine solche verfügt. (Siehe Fussnote 3 auf Seite 105.)

Spezialfälle.

1. Konzentrischer, symmetrisch-ellipsenringförmiger Querschnitt ($e=0$, λ variabel).

a) λ_2 *sehr gross* (Fall einer Vollwelle, deren Querschnitt durch feinen Riss oder langgestreckten Hohleinschluss (Lunker) infolge fehlerhaften Gusses geschwächt ist). In diesem Falle findet man:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &\sim \frac{5}{2\pi}\,\frac{1-\delta}{b_1^4(1-\delta^5)}\,\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\,\frac{1}{G}\,M_t; \\ \tau_{max} &\sim \frac{5}{2\pi}\,\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-1}\,\frac{M_t}{b_1^3(1-\delta^5)}\quad\left(\delta=\frac{b_2}{b_1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Bezeichnet man den im Falle eines ellipsenringförmigen *Voll*querschnittes auftretenden spezifischen Verdrehungswinkel mit ϑ^* und die maximale Schubspannung mit τ_{max}^*, für welche Grössen Formeln aus der Literatur bekannt sind [2]), so entstehen zwischen den beiden Fällen die Beziehungen:

$$\vartheta \sim \frac{5}{2}\,\frac{\lambda_1^3}{(\lambda_2-\lambda_1)(1+\lambda_1^2)}\,\vartheta^*;\quad \tau_{max}\sim\frac{5}{4}\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2-1}\,\tau_{max}^* \quad (14)$$

Anhand einiger *Zahlenbeispiele* lässt sich der Einfluss eines feinen Risses auf den Querschnitt sehr leicht und überzeugend nachweisen. Für $\lambda_1=1{,}001$, also einen fast kreisförmigen Querschnitt, erhält man für die maximale Beanspruchung τ_{max} angenähert den 626-fachen Betrag der entsprechenden Torsionsbeanspruchung τ_{max}^* beim Vollquerschnitt; für $\lambda_1=1{,}0001$ steigt dieser Wert bereits auf den 6251-fachen Betrag und für den genauen kreisförmigen Querschnitt [$\lambda_1=1$] ergäbe die Formel (14) für τ_{max} sogar den Wert unendlich, was natürlich physikalisch eine Unmöglichkeit bedeutet. Es wird eben schon lange vor dem Auftreten dieser ausserordentlich hohen Beanspruchung die Welle so stark deformiert, dass die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und somit auch die Gültigkeit der darauf beruhenden, von uns abgeleiteten Gleichungen aufhört. Immerhin weisen diese Ueberschlagsrechnungen darauf hin, dass beim Vorhandensein eines Materialfehlers in Form

[1]) Vergl. z. B. A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, S. 92 u. ff.

[2]) Vergl. z. B. A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, S. 65 u. 66.

eines feinen Risses die Torsionsbeanspruchungen ausserordentlich schnell und stark anwachsen, sodass das Auftreten eines feinen Risses genügt, um die Zerstörung der Welle in kürzester Frist herbeizuführen. Für Wellen mit ausgesprochen ellipsenförmigem Querschnitt (λ_1 sehr verschieden von 1) ist die Bruchgefahr infolge eines feinen, *in der grossen Axe* der Ellipse gelegenen Spaltes nicht so gross wie bei einer nahezu kreisförmigen Welle. So erhält man z. B. für $\lambda_1 = 2$ den Wert $\tau_{max} = 5/3\ \tau_{max}^{*}$, für $\lambda_1 = 10$ den Wert $\tau_{max} = 1{,}26\ \tau_{max}^{*}$, woraus ersichtlich ist, dass das Material in diesen Fällen keine besonders hohe Mehrbeanspruchung erleidet. Dagegen ergibt sich aus der zweiten Formel (13) für einen feinen Spalt in *der kleinen Axe* ($\delta = 1$) eine unzulässig hohe Torsionsbeanspruchung, sodass in diesem Falle auch sehr schnell ein Bruch der Welle eintreten wird [1]).

b) λ_2 *von der gleichen Grössenordnung wie* λ_1. In diesen Fällen findet man für die beiden charakteristischen Grössen ϑ und τ_{max} folgende Ausdrücke:

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi(\lambda_2 - \lambda_1) G J} M_t, \quad \tau_{max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - 1} \frac{b_1}{2\pi(1-\delta) J} M_t \quad (15)$$

wobei

$$J = \frac{b_1^5}{5t}(1-\delta^5) + A + B \ln \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - 1} - C \ln \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} \quad (16)$$

und A, B, C, folgende Abkürzungen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\mu^2 t^2 [t^2 + 6 b_2 (t + 3 b_2)] - 3 \mu \lambda_2 t^3 (t + 8 b_2) + 3 t^4 (3 \lambda_2 + 1)}{3 \mu^4} \\ B &= \frac{\mu^4 b_2^4 - \sigma t \left\{ 4 \mu^3 b_2^3 - \sigma t [6 \mu^2 b_2^2 - \sigma t (4 \mu b_2 - \sigma t)] \right\}}{\mu^5} \\ C &= \frac{\mu^4 b_2^4 - \varrho t \left\{ 4 \mu^3 b_2^3 - \varrho t [6 \mu^2 b_2^2 - \varrho t (4 \mu b_2 - \varrho t)] \right\}}{\mu^5} \end{aligned}\right\} (17)$$

wobei $t = b_1 - b_2$, $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, $\sigma = \lambda_2 - 1$, $\varrho = \lambda_2 + 1$.

2. *Einseitig ellipsenringförmiger Querschnitt mit konstantem Axenverhältnis und variabler Wandstärke.*

($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = $ konst., also $\lambda_1 - \lambda_2 = \mu = 0$; $e \neq 0$).

In diesem Falle findet man:

$$\tau_{max} = \frac{2(1+\nu)}{\pi a_1 b_1^2 (1-\delta^4)} M_t; \quad \vartheta = \frac{2(1+\nu) K}{\pi a_1^2 b_1^2 (1-\delta^4) G} M_t \quad (18)$$

wobei $\nu = e/t$ und

$$K = \frac{(1+\nu^2)\lambda^2 - (1+2\nu) - (1+\nu)(\lambda^2 - 1)\sqrt{1+2\nu}}{\lambda \nu^2 \sqrt{1+2\nu}} \quad (19)$$

Zum Schluss sei noch hervorgehoben, dass für $\lambda = 1$ die Formeln (18) in jene für den *einseitig kreisringförmigen Querschnitt* übergehen, die schon aus der Literatur bekannt sind [2]). Es ergibt sich somit eine indirekte Bestätigung der von uns abgeleiteten Gleichungen; auf eine eingehende Diskussion der erhaltenen Resultate muss aus Raumrücksichten verzichtet werden.

[1]) Die hier erhaltenen Ergebnisse finden im grossen und ganzen ihre Bestätigung in den Arbeiten von *Greenhill* („Fluid motion between elliptic cylinders and confocal ellipsoids", Quarterly Journal, Vol. 16 (1879), S. 227) und *A. N. Dinnik* („Die Analogie von Prandtl, der Einfluss eines radialen Risses bei Torsion der kreis- und kreisringförmigen Welle", erschienen in russischer Sprache in den „Mitteilungen des Donschen polytechnischen Institutes", Nowo-Tscherkask, 1912, I Bd., II. Teil, S. 309), die beide auf andern Wegen den Einfluss feiner Risse auf die Torsionsbeanspruchung von Wellen untersucht haben. Greenhill gelangt z. B. in dem Sonderfalle eines von zwei konfokalen Ellipsen begrenzten Ringes, bei dem die innere Randkurve zu einem engen Spalt zwischen den beiden Brennpunkten der äusseren Ellipse ausartet, zu dem Ergebnis, dass z. B. für Ellipsen mit dem Axenverhältnis $\lambda = 1{,}2$ die maximale Schubspannung auf den sechsfachen Betrag derjenigen der Vollellipse ansteigt, was mit dem von uns gefundenen Ergebnis ziemlich gut übereinstimmt.

[2]) A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Band II, Seite 117.

Lange oder kurze Schwellen?

Von Prof. Dr.-Ing. e. h. ALFRED BIRK, Techn. Hochschule, Prag.[3])

I. Die wichtigsten der in der Literatur niedergelegten Anschauungen.

Seitdem Dr. H. Zimmermann in seinem 1888 erschienenen Werke über die Berechnung des Eisenbahnoberbaues das Verhalten kurzer und langer Schwellen (240 bis 270 cm) unter den Einwirkungen des Betriebes eingehend untersucht hat, ist diese wirtschaftlich wichtige Frage nicht mehr zur Ruhe gekommen.

Zimmermann vergleicht Schwellen von 240, 255 und 270 cm Länge bei nachgiebiger und fester Bettung und bei gleichmässiger Unterstopfung auf die ganze Länge hinsichtlich der Druckverteilung und der Senkungen und findet (§ 26), dass die Schwellenenden gegenüber der Schwellenmitte umso früher und um so stärker sich senken, je kürzer die Schwelle ist. Wird nun nicht häufig und gut nachgestopft, so können bleibende Verbiegungen der Schwellen und mithin auch Spurerweiterungen eintreten. Um diesem Uebel bei kürzern Schwellen abzuhelfen, unterstopft man die Schwellen in der Mitte weniger fest als an den Enden. Dadurch wird, wie Zimmermann rechnerisch nachweist, das Ueberwiegen der Senkung und des Druckes unter den äussern Teilen der Schwelle zwar beseitigt, aber der Druck auf die vorher weniger belasteten Teile gesteigert und namentlich der Grösstwert der Drücke bedeutend erhöht. Da überdies die ungleichmässige Unterstopfung das seitliche Ausweichen der stark gedrückten Bettungsteile nach der weniger belasteten Mitte hin fördert und dadurch die dauernde Erhaltung der richtigen Höhenlage erschwert, hält Zimmermann dieses Verfahren nur für einen Notbehelf und empfiehlt, den Schwellen die Länge von 270 cm zu geben.

In seinem Berichte über den Bau der Geleise für die V. Session des Internationalen Eisenbahnkongresses (1895) äusserte sich Baudirektor Ast über die Schwellenfrage in nachstehender Weise: „Ein geeignetes Mittel, die gegebene Last auf eine möglichst grosse Zahl von Schwellen und auf eine möglichst grosse Schotterbettfläche zu verteilen, besteht in der Verminderung der Schwellenentfernung und in der Vergrösserung der Schwellenauflagerfläche im Schotterbette. Diese zwei Massnahmen haben jedoch ihre Grenze; die erste, weil die Möglichkeit der Unterstopfung gewahrt bleiben muss; die zweite, weil einerseits die Schwellenbreite nicht zu gross sein darf, wenn man gut unterstopfen können will, und weil anderseits die Länge von der Spurweite abhängt. Die Verlängerung der Schwelle kann sich natürlich nur auf die Teile erstrecken, die ausserhalb der Schienenstränge liegen; wenn diese Verlängerung eine gewisse Grenze überschreitet, erzeugen die Schienenbelastungen, die auf die Strecke innerhalb der Spurweite einwirken, eine Ueberhöhung der Schwellenenden und die überflüssig langen Schwellenteile tragen nicht mehr."

In seiner Abhandlung über die Eisenbahnschwelle und ihr Auflager (Bulletin de la Commission Internationale du Congrès des chemins de fer 1895) spricht Ast die Anschauung aus, das der Bettungsdruck 2 kg/cm² nicht überschreiten dürfe und dass für Geleise, die grössern Anforderungen ausgesetzt sind, statische Bettungsdrücke zwischen 1,66 und 1,80 kg/cm², wie die Schwelle von 22 cm Breite und 270 cm Länge sie ergibt, noch hoch genannt werden müssen, weshalb er die 22 cm breite Schwelle beim Geleisebau für Bahnen mit lebhaftem und beschleunigtem Verkehr für wirtschaftlich nicht verwendbar hält. Als wirksamstes Mittel zur Verminderung des Bettungsdruckes und mithin der Erhaltungs- und Regelungskosten der Geleise erklärt Ast auf Grund seiner Berechnungen und Beobachtungen die Verwendung langer Querschwellen (270 cm) an Stelle der kurzen Schwellen (240 cm). Die mittlere Schwelle von 250 cm Länge ist — sagt Ast — je nach der Breite verschieden verwendbar. Bei der Breite von 22 cm entstehen Bettungsdrücke, die dem Grenzwerte von 2 kg/cm² sehr nahe sind und daher von dem Geleise der Hauptbahnen auszuschliessen seien; die Schwelle von 26 cm Breite wird bei Fahrzeugen mit grossen Radständen und steifer Geleiseanordnung, die höchstens 4,2 t Schienendruck her-

[3]) Das Erscheinen dieser Arbeit hat sich ohne Schuld des Verfassers unliebsam verzögert. Red.