Band 76. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23.**

Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte.

Von Dr. Ing. *A. Nádai*, Göttingen.

1. Der Spannungszustand in einer dünnen elastischen Platte, die durch ein System von zu ihrer Ebene senkrechten Kräften nur wenig verbogen ist, hängt in erster Näherung von der Gestalt ab, nach der sie sich verbiegt. Die kleinen Verschiebungen, die ihre Punkte in der Richtung ihrer Ebene erfahren, sowie die Spannungen in ihrem Innern lassen sich auf eine Funktion der Koordinaten, nämlich die transversale Verschiebung der Mittelebene oder ihre Durchbiegung zurückführen. Wenn die Oberflächenkräfte an einzelnen Stellen der beiden Begrenzungsebenen der Platte konzentriert sind, ist der Formänderungszustand in der Umgebung dieser Stellen von komplizierterer Art. Man wird auf einen derartigen Fall von praktischer Bedeutung geführt, wenn die Spannungen der Platte in der Nähe der Angriffstelle einer Last bestimmt werden sollen.[1]) In dem kürzlich erschienenen ersten Band von „Drang und Zwang" haben *A.* und *L. Föppl* am Beispiel der kreisförmigen Platte die eigenartigen Verhältnisse auseinandergesetzt, die für die Ermittlung der grössten Inanspruchnahme in einer durch eine Einzelkraft belasteten Platte massgebend sind, und unter anderm darauf hingewiesen, dass bei der Bestimmung der Spannungen im Innern des Gebietes, das durch einen zylindrischen Schnitt begrenzt ist, den man sich entlang der Randkurve der Druckfläche durch die Platte geführt denken kann, das Verhältnis ihrer linearen Abmessungen zur Dicke der Platte eine Rolle spielt. Wenn die Abmessungen der Druckfläche grösser als die Dicke der Platte sind, können die Druckspannungen, mit der sich die äussren Kräfte auf sie übertragen, mit einer für die Anwendungen hinreichenden Genauigkeit neben den übrigen Spannungen vernachlässigt und die letzteren in der Umgebung der Angriffstelle der Last nach dem Vorgang von *Grashof* und *A. Föppl* aus den Formeln der Plattenbiegung bestimmt werden. Die Angabe der Durchbiegung reicht zur Beschreibung des Spannungszustandes in der Nähe der Druckfläche nicht aus bei starker Konzentration der Kraft in einer Platte von beliebiger Dicke. Dieses ist auch der Fall bei weniger stark konzentrierter Belastung, wenn die Dicke der Platte vergleichbar mit ihren übrigen Abmessungen ist. Im Folgenden sollen die Spannungen der Platte in diesen Fällen und bei kreissymmetrischer Gestaltsänderung in der Umgebung der Druckfläche und in dieser selbst angegeben werden.

Die elastischen Verzerrungen, die die Punkte eines Rotationskörpers unter der Wirkung eines zu seiner Axe symmetrisch verteilten Systems von Oberflächenkräften erfahren, sind durch die Angabe der kleinen Strecken ϱ und ζ beschrieben, um die sich die Punkte im Innern in radialer und in axialer Richtung verschieben. Die radiale und axiale Verschiebung ϱ und ζ eines Punktes, dessen Abstand von der Axe r und von einer zur letzteren senkrechten festen Ebene z ist und die Volumänderung $e = \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ genügen den Gleichungen[1])

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial r} + (1 - 2\nu)\left(\Delta\varrho - \frac{\varrho}{r^2}\right) = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\ &\frac{\partial e}{\partial z} + (1 - 2\nu)\,\Delta\zeta = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

wo mit ν das Verhältnis der Querverkürzung zur Längsdehnung bezeichnet ist. Ist ferner G die Schubziffer des Materials, so sind die Spannungskomponenten in Zylinder-Koordinaten r, z ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G\left(\frac{\partial\varrho}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \\ \sigma_t &= 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \qquad \tau = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \end{aligned} \tag{2}$$

2. *Die Oberflächenspannungen in einem durch eine Ebene einseitig begrenzten Körper.* Das System partikulärer Lösungen der Gleichungen (1)

$$\begin{aligned} \varrho &= \int_0^\infty A\,[1 - 2\nu - \alpha z]\,e^{-\alpha z} J_1(\alpha r)\,d\alpha \qquad (z > 0) \\ \zeta &= -\int_0^\infty A\,[2(1-\nu) + \alpha z]\,e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\,d\alpha \\ e &= 2(1-2\nu)\int_0^\infty A\alpha e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\,d\alpha \quad {}^{2)} \end{aligned} \tag{3}$$

gibt die Verschiebungskomponenten und die Volumänderung in einem Punkte (r, z) des von der Ebene $z = 0$ begrenzten Körpers wieder, der auf dieser Ebene durch axensymmetrisch verteilte Normalspannungen belastet ist. In den bestimmten Integralen hängt A von α ab, J_0 und J_1 sind die Besselschen Funktionen der Ordnung 0 und 1.[3]) Zur Bestimmung von A dient die Gleichung für die Spannung σ_z in der Ebene $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_z = -p = f(r) &= 2G\int_0^\infty A\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha = \\ &= \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha \int_0^\infty f(n)\,J_0(\alpha n)\,n\,dn \end{aligned} \tag{4}$$

woraus

$$2GA = -\int_0^\infty p\,n\,J_0(\alpha n)\,dn \tag{5}$$

Hier und im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der äussere Druck p bekannt und eine gegebene integrable Funktion von r ist. Wie schon *Boussinesq* und *H. Hertz* bemerkt haben, ist die Volumänderung e in der Ebene $z = 0$

$$e = 2\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{1-2\nu}{G}p \tag{6}$$

dem äusseren Druck p proportional. Für ein Verteilungsgesetz $\sigma_z = -p = f(r)$ des Normaldruckes lassen sich die Spannungen in der Ebene $z = 0$ leicht angeben. Um dies zu zeigen, braucht ausser e, dessen Wert aus (6) folgt, die Radialverschiebung ϱ aus (3) und (5) für $z = 0$ ausgerechnet zu werden. Sie ist

$$\varrho = (1 - 2\nu)\int_0^\infty A J_1(\alpha r)\,d\alpha = -\frac{1-2\nu}{2G}\int_0^\infty J_1(\alpha r)\,d\alpha \int_0^\infty p J_0(\alpha n)\,n\,dn$$

oder

---

[1]) Ich verdanke einer vor längerer Zeit gemachten gütigen Bemerkung von Herrn Prof. *L. Prandtl* den Hinweis auf gewisse in der Theorie der Plattenbiegung nicht berücksichtigte Verzerrungen (s. weiter unten Gl. (22a) und den anschliessenden Text), deren Einfluss sich in der Umgebung der Angriffstelle konzentrierter Kräfte stärker bemerkbar macht. Zur Durchführung der Rechnung wurde ich neuerdings durch Besprechungen mit ihm über Fragen der Berührung aneinander gedrückter elastischer Körper angeregt.

[1]) *A. Föppl*, Vorlesungen ü. techn. Mechanik Bd. 5. S. 212.

[2]) *Riemann-Weber*, Bd. 2. S. 184.

[3]) *Schafheitlin*, die Theorie der Besselschen Funktionen (Teubner).