

# Das Kräftespiel im Kreuzgelenk

Autor(en): **Thoma, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **75/76 (1920)**

Heft 17

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36448>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Das Kräftespiel im Kreuzgelenk. — Die Wasserkraftanlage „Gösgen“ an der Aare. — Ideen-Wettbewerb für die Bebauung des Elfenau- und Mettlen-Gebiets in Bern und Muri. — L'application du frein à vide aux trains de marchandises. — Miscellanea: Ueber Neuerungen an Dampfkesseln mit Oberflächen-Verbrennung. Eine neue Schaltung zur Umformung von Zweiphasen- in Dreiphasen-Wechselstrom und um-

gekehrt. Die Kanalisierung der Mosel. Schweizerische Mustermesse. Das neue Stadthaus in Locle. Kraftwerk Eglisau. Eidgenössische Technische Hochschule. — Konkurrenzen: Erweiterung der Regierungsgebäulichkeiten in St. Gallen. — Literatur. — Berichtigung. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. St. Gallischer Ingenieur- und Architekten-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung.

Band 75.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 17.

### Das Kräftespiel im Kreuzgelenk.

Von Dr. Ing. D. Thoma, Gotha.

Die Kreuzgelenk-Kupplung dient, wie bekannt, zur Verbindung zweier Wellen, deren Axen sich unter einem beliebigen Winkel  $\alpha < 90^\circ$  schneiden. Wenn die Wellen kein Torsionsmoment übertragen, setzt das Kreuzgelenk einer Veränderung des Schnittwinkels der beiden Wellen keinen Widerstand entgegen, es gestattet das freie Schwenken der einen Wellenaxe relativ zur andern um den Mittelpunkt des Kreuzes. Die unmittelbare Evidenz dieses Satzes verführt leicht dazu, zu übersehen, dass diese widerstandslose Schwenkbarkeit aufhört, sobald die Wellen ein Torsionsmoment übertragen und dass, wenn der Schnittwinkel der beiden Wellenaxen von null verschieden festgelegt ist, im allgemeinen vom Kreuzgelenk ausser dem Torsionsmoment notwendigerweise auch Biegemomente übertragen werden. Dass das Kreuzgelenk tatsächlich Biegemomente auf die Wellen ausübt, lässt sich schon aus einer oberflächlichen Betrachtung entnehmen: wie die Axe des durch Vermittelung des Gelenkes zwischen den Wellen ausgetauschten Momentes auch sein mag, so schliesst sie mindestens mit der Axenrichtung einer der beiden Wellen einen Winkel gleich oder grösser als  $\alpha/2$  ein, sodass das Moment immer mindestens hinsichtlich einer Welle eine Komponente senkrecht zur Wellenaxe — ein Biegemoment — aufweist. Da die Verhältnisse, sofern man nicht gerade eine bestimmte Stellung der Wellen innerhalb eines Umlaufes betrachtet, hinsichtlich beider Wellen symmetrisch sind, werden im allgemeinen beide Wellen Biegemomente aufzunehmen haben.

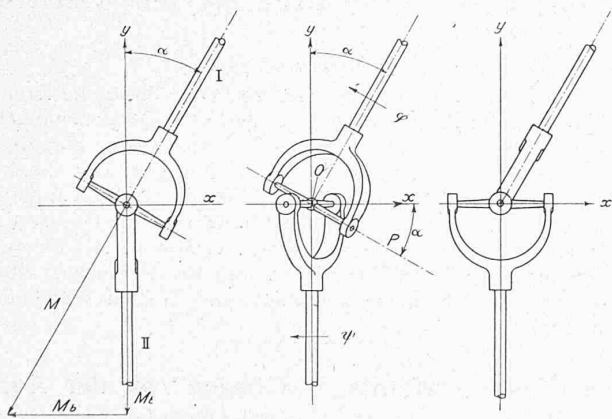


Abb. 1. Hauptlage A.

Abb. 2. Zwischenlage.

Abb. 3. Hauptlage B.

Die Kreuzgelenk-Kupplung ist ein häufig verwendetes Maschinenelement, und es lohnt sich deswegen, das soeben nur annähernd dargelegte Kräftespiel genauer zu untersuchen; das Ergebnis wird auch für die Beurteilung gewisser über die kritische Drehzahl rasch umlaufender Wellen angestellter Versuche, bei denen das Kreuzgelenk eine wichtige Rolle spielte, wertvoll sein.

#### Der kinematische Zusammenhang.

Die Untersuchung des Kräftespiels setzt die Kenntnis der Bewegungen der Kupplung und der Wellen voraus. Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem nach Abb. 1 angenommen, bei dem beide Wellen in der  $x-y$ -Ebene liegen; die positive  $z$ -Axe soll senkrecht zur Zeichnungsebene nach oben gehen. Die Drehwinkel der Wellen

sollen von der in Abbildung 1 gezeigten Lage aus, die Hauptlage A genannt sei, gerechnet werden. Abbildung 2 zeigt eine allgemeine Lage der Kupplung: die Welle I hat sich von der Hauptlage A um den Winkel  $\varphi$ , die Welle II um den Winkel  $\psi$  im Sinne der Pfeile gedreht. Wir betrachten  $\varphi$  als unabhängige Veränderliche und bestimmen  $\psi$  als Funktion von  $\varphi$ .

P sei irgend ein Punkt auf der Axe des zu der Welle I gehörigen Kreuzarmes und l seine Entfernung von O, dem gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Wellen-Axen und Armachsen. Die in Abbildung 2 erscheinende Projektion der Strecke OP ist dann gleich  $l \cos \varphi$  und die Koordinaten des Punktes P sind dementsprechend

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \cos \alpha \\ y &= -l \cos \varphi \sin \alpha \\ z &= l \sin \varphi \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Cosinus der Winkel  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\gamma_1$ , welche die Axe des zur Welle I gehörigen Armes mit den Koordinatenachsen einschliesst, zu

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \varphi \cos \alpha \\ \cos \beta_1 &= -\cos \varphi \sin \alpha \\ \cos \gamma_1 &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

In ähnlicher Weise findet man die Cosinus der Winkel  $\alpha_2, \beta_2$  und  $\gamma_2$ , die die Axe des zur Welle II gehörigen Kreuzarmes mit den Koordinatenachsen einschliesst, zu

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= -\sin \psi \\ \cos \beta_2 &= 0 \\ \cos \gamma_2 &= \cos \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Die Richtungen der beiden Kreuzarme sind aber nicht unabhängig von einander, die Arme sind mit einander fest verbunden, derart, dass sie immer senkrecht aufeinander stehen. Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie des Raumes besteht deswegen die Beziehung

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

Indem man in diese Formel die Werte aus den Gl. (1) und (2) einführt, erhält man nach kurzer Umrechnung

$$\sin^2 \psi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \varphi} \dots \dots (3)$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf die Form

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \varphi \dots \dots (4)$$

bringen, die im Folgenden gebraucht wird und zudem sehr einfach ist.

#### Die Kraftwirkungen.

Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass die Kupplung nur Momente überträgt, aber keine Einzelkraft; diese Annahme ist meistens erfüllt, wenigstens wenn Herstellung und Montage genau sind oder wenn die Zapfen der Arme in den Lagern axial genügend Spiel haben, um die Ungenauigkeiten auszugleichen, und ausserdem mindestens eine der beiden Wellen axial verschiebbar ist und keine in die Axenrichtung fallende Kraft aufzunehmen hat. Die Wirkungen einer unter abweichenden Verhältnissen etwa hinzukommenden Einzelkraft lassen sich zudem leicht gesondert ermitteln. Das Kreuz wird als masse- und gewichtslos angesehen.

Um die Vorstellung festzulegen, sei angenommen, dass die Welle I die treibende ist. Das Kreuz der Kupplung gibt dann das Moment, welches es von der Welle I empfängt, nach Grösse und Richtung unverändert an die Welle II weiter. Die Arme des Kreuzes sind in den auf den Wellen sitzenden Gabeln drehbar und zwar, wie wir annehmen wollen, reibungslos drehbar gelagert; die Axe des Momentes, welches das Kreuz von der Welle I und der auf dieser

sitzenden Gabel aufnimmt, steht deswegen senkrecht auf dem in dieser Gabel gelagerten Arm; die Axe des nach Grösse und Richtung gleichen Moments, welches das Kreuz an die auf der Welle II sitzende Gabel und damit auf Welle II selbst weitergibt, steht umgekehrt senkrecht auf dem in in dieser Gabel gelagerten Arm des Kreuzes. Somit ist die Axe des von der Kupplung übertragenen Momentes bestimmt als die Normale auf beiden Kreuzarmen oder, wie man anschaulicher sagen kann, als Normale auf der durch beide Arme gelegten Ebene. In der Hauptlage B (Abbildung 3) fällt diese Normale mit der Axe der Welle II zusammen, und die Kreuzgelenk-Kupplung überträgt auf die Welle II ein reines Torsionsmoment. In der Hauptlage A (Abbildung 1) weicht die Normale am stärksten von der Wellenaxe II ab, nämlich um den Winkel  $\alpha$ . Neben dem Torsionsmoment  $M_t$  wird in dieser Stellung der Kupplung noch das Biegemoment  $M_b = M_t \operatorname{tg} \alpha$  auf die Welle II übertragen. Die Beanspruchung der Welle I in den beiden Hauptlagen ist gerade umgekehrt.

Um die in den Zwischenlagen auftretenden Momente zahlenmässig zu bestimmen, bezeichnen wir die Winkel, die die Normale auf den Kreuzarmen mit den Koordinaten-Axen bildet, mit  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$ . Bezeichnet man ferner das gesamte auf die Welle II übertragene Moment mit  $M$ , die in die  $x$ -Richtung fallende Komponente von  $M$  mit  $M_x$  (= Biegemoment um die  $x$ -Axe) und die (in den Zwischenlagen auftretende) Komponente in der  $z$ -Richtung mit  $M_z$  (= Biegemoment um die  $z$ -Axe), so ist offenbar

$$M_t = M \cos \mu, \quad M_x = M \cos \lambda, \\ M_z = M \cos \nu.$$

Ausser dem Torsionsmoment  $M_t$ , dessen Uebertragung Zweck der Kupplung ist und das als bekannt angesehen werden kann, werden somit auf die Welle II noch die Biegemomente

$$\text{und } \left. \begin{aligned} M_x &= \frac{\cos \lambda}{\cos \mu} M_t \\ M_z &= \frac{\cos \nu}{\cos \mu} M_t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

übertragen.

Es handelt sich nun darum, die Werte  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$  und  $\cos \nu$  zu berechnen.  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  sind die Winkel, die die Normale auf den Kreuzarmen ( $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ) mit den Koordinatenachsen einschliesst; sie sind somit bestimmt durch die bekannten Gleichungen der analytischen Geometrie:  $\cos \lambda = \cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1$  und entsprechend für  $\mu$  und  $\nu$ , wobei schon berücksichtigt ist, dass die beiden durch  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  gegebenen Richtungen selbst senkrecht aufeinander stehen. Setzt man in diese Gleichungen die Werte aus den Gl. (1) und (2) ein, so erhält man

$$\cos \lambda = -\cos \varphi \cos \psi \sin \alpha \\ \cos \mu = -\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \alpha \\ \cos \nu = -\cos \varphi \sin \psi \sin \alpha$$

wobei zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  noch die Beziehung Gl. (4) besteht. Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (5) ergeben sich die verhältnismässig einfachen Formeln

$$M_x = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi} M_t \quad (6)$$

$$M_z = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi} M_t \quad (7)$$

*Beispiel.*

Als Beispiel möge das in Abbildung 4 gezeichnete System untersucht werden, das besonderes Interesse bietet wegen der Beobachtungen, die O. Föppl angestellt und in der „Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure“ 1919, S. 867 veröffentlicht hat. Das Trägheitsmoment der Antrieb-Riemenscheibe soll gegenüber dem Trägheitsmoment  $\Theta$

der kleinen Schwungscheibe so gross sein, dass die Winkelgeschwindigkeit der Welle I,  $\omega_1$ , als unveränderlich angesehen werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle II ist  $\omega_2 = \omega_1 \frac{d\psi}{d\varphi}$  und ihre Winkelbeschleunigung

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\psi}{d\varphi} \right) = \omega_1 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt}$$

und wegen  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1^2 \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}$$

Das Torsionsmoment, das von der Kupplung auf die Welle II übertragen werden muss, um die Bewegung zu erzwingen, ist dementsprechend

$$M_t = \Theta \frac{d\omega_2}{dt} = \Theta \omega_1^2 \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \quad (3)$$

Die Biegemomente  $M_x$  und  $M_z$  ergeben sich dann aus den Gl. (6) und (7). Um die Rechnung auszuführen, muss man zunächst  $\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}$  durch zweimalige Differentiation von Gl. (3) oder (4) bestimmen. Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (8) und durch Einsetzen des damit erhaltenen Wertes von  $M_t$  in Gl. (6) und (7) erhält man zunächst für  $M_t$ ,  $M_x$  und  $M_z$  ziemlich verwickelte Ausdrücke, die sich aber bedeutend vereinfachen lassen, wenn der Winkel  $\alpha$  nicht gross ist, sodass man  $(1 - \cos \alpha)^2$  vernachlässigen darf. Dies ist übrigens noch bei ziemlich grossen Winkeln zulässig; so ist z. B.  $(1 - \cos 8,5^\circ)^2 = 0,00012$ . Man erhält dann

$$M_t = -2 \Theta \omega_1^2 (1 - \cos \alpha) \sin 2 \varphi \\ M_x = -\Theta \omega_1^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) (\sin 2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 4 \varphi) \\ M_z = -\frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) (1 - \cos 4 \varphi)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen geht hervor, dass die Welle II durch die Kreuzgelenk-Kupplung kräftige auf Biegung wirkende Impulse mit der doppelten und mit der vierfachen Frequenz der Drehzahl erhält, die Veranlassung zu neuen kritischen Drehzahlen sein und andere Wirkungen, die man beobachten will, leicht ganz überdecken können.

*Zusammenfassung.*

Es wird darauf aufmerksam gemacht, dass eine Kreuzgelenk-Kupplung auf die Wellen neben dem Torsionsmoment notwendigerweise auch periodisch wechselnde Biegemomente überträgt, sobald die Richtungen der beiden Wellen von einander abweichen. Der durch die Kupplung gegebene kinematische Zusammenhang und die Grösse der Biegemomente werden allgemein ermittelt. Als Beispiel wird eine Anordnung betrachtet, die bei Versuchen über kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen verwendet worden ist.

**Die Wasserkraftanlage „Gösgen“ an der Aare der A.-G. „Elektrizitätswerk Olten-Aarburg“.**

Mitgeteilt von der A.-G. «Motor» in Baden.

(Fortsetzung von Seite 181.)

Allgemein wurde danach getrachtet, nebst einer guten Wasserführung die Kosten des baulichen Teiles auf ein Minimum herabzusetzen durch Anpassung des Querschnittes für den Unterbau an den Felsuntergrund, um den Fels-Aushub möglichst gering zu halten und damit auch an Beton zu sparen. Bei dem vorhandenen Wasserüberdruck bis 17,0 m musste für einen soliden Anschluss des Fundament-Betons an den Felsen gesorgt werden. Es wurden daher in den Felsen einbindende Rippen erstellt und daneben nur die Pfeiler zwischen den Turbinenkammern in den Felsen eingelassen (Abbildungen 85 und 86, S. 190), während im übrigen der Felsen unter der Einlaufspirale und dem Saugkrümmer mit einer minimal 70 cm starken Betonschicht verkleidet wurde (Abbildung 87, S. 189).

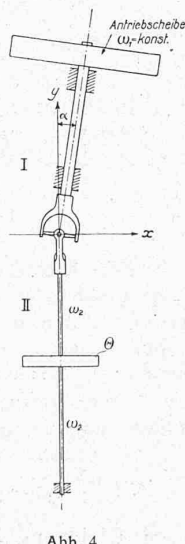


Abb. 4.