Band 72. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 19.

Note sur la vitesse critique des arbres et la Formule de Dunkerley.

Par *E. Hahn*, Professeur à l'Université de Nancy.

1. Soit ω_c la vitesse critique d'un arbre reposant sur un nombre quelconque d'appuis de nature quelconque (appuis libres ou encastrements) et portant un certain nombre de roues de masses $m_1, m_2, \ldots m_n$; soit m_a la masse propre de l'arbre; soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ les vitesses critiques que prendrait l'arbre, supposé dépourvu de masse, s'il était sollicité successivement par chacune des masses agissant isolément, soit ω_a la vitesse critique due à la masse propre de l'arbre; on peut, d'après Dunkerley, formuler la proposition suivante: *L'inverse du carré de la vitesse critique du système est égale à la somme des inverses des carrés des vitesses critiques élémentaires*, et écrire par conséquent:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_a^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2} \qquad (1)$$

Dunkerley a indiqué cette relation à la fin d'un mémoire important [1]) où, après avoir tenté l'intégration de l'équation générale de la ligne élastique de l'arbre dans divers cas et reconnu l'impossibilité de tirer aucune conclusion pratique des résultats (sauf dans le cas de l'arbre consideré seul), il constate l'accord très satisfaisant qui existe entre les résultats expérimentaux qu'il communique et ceux calculés à l'aide de la formule (1). Il n'en donne d'ailleurs aucune démonstration et se borne à en justifier la forme et à la rendre plausible par des considérations basées sur la théorie des vibrations.

Je me propose de montrer comment on peut établir rigoureusement la formule de Dunkerley et calculer l'erreur qu'elle comporte, car, comme on le sait et comme s'en rendait compte son auteur, cette relation ne donne qu'une solution approchée du problème.

2. Négligeons pour commencer l'influence de l'obliquité des roues et des couples de redressement qui en résultent; supposons en outre que les roues sont rigoureusement centrées, enfin, faisons abstraction de la masse propre de l'arbre. Nous reprendrons plus loin l'étude de ces points spéciaux.

Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les forces centrifuges développées par les masses $m_1 \ldots, m_n$ en raison du fléchissement de l'arbre, soient $y_1, y_2, \ldots y_n$ les inflexions mesurées au droit des disques. Nous pouvons écrire:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\, C_1 + a_{12}\, C_2 + \ldots + a_{1n}\, C_n\,, \\ y_2 &= a_{21}\, C_1 + a_{22}\, C_2 + \ldots + a_{2n}\, C_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}\, C_1 + a_{n2}\, C_2 + \ldots + a_{nn}\, C_n\,, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

où les coefficients a sont les coefficients d'influence tels qu'on les considère dans la théorie de la flexion des poutres droites.

Mais nous avons d'autre part:

$$C_1 = y_1\, m_1\, \omega^2\,,\ C_2 = y_2\, m_2\, \omega^2\,,\ \ldots\ C_n = y_n\, m_n\, \omega^2$$

et, par suite, le système d'équations (2) devient:

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}\, m_1\, \omega^2 - 1)\, y_1 + a_{12}\, m_2\, \omega^2 y_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + a_{1n}\, m_n\, \omega^2 y_n = 0\,, \\ &a_{21}\, m_1\, \omega^2\, y_1 + (a_{22}\, m_2\, \omega^2 - 1) y_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + a_{2n}\, m_n\, \omega^2 y_n = 0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\,, \\ &a_{n1}\, m_1\, \omega^2\, y_1 + a_{n2}\, m_2\, \omega^2\, y_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (a_{nn}\, m_n\, \omega^2 - 1)\, y_n = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

[1]) Philosophical Transactions London. Vol. 185, ann. 1894 p. 279.

Les valeurs critiques de la vitesse sont celles qui rendent nul le déterminant des coefficients des quantités y, on arrive donc à l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, m_1\, \omega^2 - 1, & a_{12}\, m_2\, \omega^2 & , \ldots & a_{1n}\, m_n\, \omega^2 \\ a_{21}\, m_1\, \omega^2 & , a_{22}\, m_2\, \omega^2 - 1, & \ldots & a_{2n}\, m_n\, \omega^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\, m_1\, \omega^2 & , a_{n2}\, m_2\, \omega^2 & , \ldots & a_{nn}\, m_n\, \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

3. Ce déterminant est de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} + z, & a_{12} & , \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} + z, & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \ldots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$

qui, ainsi qu'on en trouvera la démonstration dans les traités d'algèbre peut s'écrire:

$$A_n + A_{n-1}\, z + A_{n-2}\, z^2 + \ldots + A_2\, z^{n-2} + A_1\, z^{n-1} + z^n$$

où

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

$$A_2 = \left[\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12} \\ a_{21}\,, & a_{22} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{1n} \\ a_{n1}\,, & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}\,, & a_{23} \\ a_{32}\,, & a_{33} \end{vmatrix} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \begin{vmatrix} a_{22}\,, & a_{2n} \\ a_{n2}\,, & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1}\,, & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & , a_{nn} \end{vmatrix} \right]$$

$A_3 = \Sigma$ de tous les déterminants du 3^e ordre que l'on peut former avec les termes de la diagonale principale et les autres coefficients des lignes et colonnes correspondantes, $A_4 = \Sigma$ de tous les déterminants de 4^e ordre, etc. ...

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Appliquons cette propriété au déterminant qui forme le membre de gauche de l'équation (3); nous avons ici $z = -1$; en remarquant de plus que tous les termes d'un même coefficient A contiennent le facteur ω à la même puissance, (3) s'écrira:

$$A'_n\, \omega^{2n} - A'_{n-1}\, \omega^{2(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + A'_2 (-1)^{n-2}\, \omega^4 + A'_1 (-1)^{n-1}\, \omega^2 + (-1)^n = 0 \quad (3')$$

où, entre autres:

$$A'_1 = a_{11}\, m_1 + a_{22}\, m_2 + \ldots + a_{nn}\, m_n\,.$$

Mais on a évidemment[1]):

$$a_{11}\, m_1 = \frac{1}{\omega_1^2}\,,\ a_{22}\, m_2 = \frac{1}{\omega_2^2}\,,\ \ldots\ a_{nn}\, m_n = \frac{1}{\omega_n^2} \qquad (4)$$

donc:

$$A'_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots \frac{1}{\omega_n^2}\,,$$

et (3) s'écrit par conséquent aussi

$$A'_n\, \omega^{2n} - A'_{n-1}\, \omega^{2(n-1)} + \ldots + A'_2\, (-1)^{n-2}\, \omega^4 +$$
$$+ (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2} \right] + (-1)^n = 0 \quad (3'')$$

Si dans cette équation on néglige les termes contenant les puissances de ω supérieures à la seconde, on obtient la relation

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots \frac{1}{\omega_n^2} \quad . \ . \quad (5)$$

c. a. d. la formule de Dunkerley. Nous pouvons donc dire:

La formule de Dunkerley est le résultat approché que l'on obtient quand dans l'équation générale qui donnerait les valeurs de la vitesse critique, on néglige les termes contenant les puissances de ω supérieures à la seconde.

[1]) Il suffit pour l'établir d'appliquer les équations (2) au cas où l'arbre n'est chargé que par une roue seulement.