Band 72. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

Von Prof. Dr. *E. Meissner* in Zürich-Zollikon.

Im Stangengetriebe elektrischer Lokomotiven treten bekanntlich bei gewissen Fahrgeschwindigkeiten Schüttel-Erscheinungen auf, die sich u. U. sehr unangenehm bemerkbar machen. Sie sind deshalb Gegenstand mehrerer technischer (z. T. noch im Erscheinen begriffener) Arbeiten geworden. Dabei zeigt es sich, dass mit der üblichen Schwingungs-Theorie nicht mehr auszukommen ist, und es soll Zweck dieser Zeilen sein, die neuen Begriffe, die dort gelten, auseinander zu setzen.

Man denke sich bei einer elektrischen Lokomotive die mit dem elastischen Getriebe verbundene Ankermasse des Motors um die Motorwelle bei festgestelltem Getriebe elastische Schwingungen ausführend. Je nach der Stellung des Getriebes wird die Schwingungszahl eine andere sein, weil die Stärke der Elastizität (die Nachgiebigkeit) von jener Stellung abhängt. Was geschieht nun aber, wenn das Getriebe nicht feststeht, sondern etwa gleichförmig umläuft? Von einer eigentlichen Schwingungszahl kann jetzt offenbar gar nicht mehr gesprochen werden, ja der Schwingungsvorgang wird gar nicht mehr streng periodisch sein. Bleiben überhaupt die auftretenden Schwingungen in endlichen Grenzen, und wie verhält sich ein solches System gegenüber störenden Kräften (Erzwungene Schwingungen, Resonanz)?

Dies sind die Fragen, die im folgenden am einfachsten Fall eines ungedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad erörtert werden sollen.[1])

1. Die Differential-Gleichung.

An Stelle der gewöhnlichen Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$y'' + k^2 y = P \quad ^{2)}$$

(k^2 = Elastizitätstärke, P = störende Kraft) tritt die folgende:

$$y'' + p(t) \cdot y = P(t) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Es ist die Konstante k^2 durch die periodisch veränderliche, „pulsierende“ Elastizitätstärke $p(t)$ ersetzt, für welche

$$p(t+T) = p(t) \qquad p(t) > 0 \quad \ldots \quad (2)$$

gilt. T soll *Pulsationsperiode* der elastischen Kraft heissen. $P(t)$ ist auch hier die störende Kraft, von der wir annehmen, dass sie ebenfalls die Periode T habe.

$$P(t+T) = P(t) \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

Ist $P = 0$, so sprechen wir von *Eigenschwingungen* des Systems. Für sie gilt also

$$y'' + p(t)\, y = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

2. Struktur der Lösung.

Das Integral von (1) setzt sich, wie man weiss, aus einer Partikularlösung von (1), $y = E(t)$, der sog. *erzwungenen Schwingung* und aus der allgemeinen Lösung von (3), der *Eigenschwingung* additiv zusammen.

Es seien jetzt $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ die zwei Lösungen von (3), welche die Anfangsbedingungen

$$\eta_1(0) = 1 \quad \eta'_1(0) = 0 \quad \eta_2(0) = 0 \quad \eta'_2(0) = 1 \quad (4)$$

erfüllen. Das allgemeine Integral von (3) ist

$$y = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 \,. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei $\alpha_1\, \alpha_2$ Integrationskonstanten sind mit der mechanischen Bedeutung

$$\alpha_1 = y_1(0) \qquad \alpha_2 = y'_1(0) \quad \ldots \quad (5')$$

Ist $e(t)$ irgend eine Lösung von (1), so ist die allgemeine Lösung von der Form

$$y = e(t) + \alpha_1 \eta_1(t) + \alpha_2 \eta_2(t) \quad \ldots \quad (6)$$

Wenn man in den Gleichungen (1), (3) überall statt t nun $t+T$ setzt, so ändern sie sich wegen (2), (2′) nicht. Es sind daher auch $\eta_1(t+T)$ und $\eta_2(t+T)$ Integrale von (3), also von der Form (5). Somit gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(t+T) &= a\, \eta_1(t) + b\, \eta_2(t) \\ \eta_2(t+T) &= c\, \eta_1(t) + d\, \eta_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

wobei

$$a = \eta_1(T) \quad b = \eta'_1(T) \quad c = \eta_2(T) \quad d = \eta'_2(T) \quad (7')$$

Die vier Konstanten a, b, c, d können angegeben werden, sobald man die Integrale η_1, η_2 im Intervall $0 \leq t \leq T$ ermittelt hat. Das ist durch Annäherung, z. B. mittels eines graphischen Verfahrens[1]) stets möglich. Alsdann lehren die Formeln (7) aus den Werten der Lösung im Intervall $(0\,..\,T)$ den Verlauf im folgenden Intervall $(T\,..\,2T)$ berechnen, und da sich das Verfahren beliebig oft wiederholen lässt, so wird es grundsätzlich möglich, den Verlauf der Lösung ganz zu überblicken. Bevor dies ausgeführt wird, erledigen wir

die erzwungene Schwingung

durch folgenden Satz:

Ist $\frac{a+d}{2} \neq 1$, *so existiert stets eine rein periodische erzwungene Schwingung mit der Periode T der Pulsation.*

In der Form (6) wird freilich $e(t)$ nicht gerade diese Lösung sein. Wir suchen durch Verfügen über α_1 und α_2 in

$$E(t) = e(t) + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2$$

$E(t)$ periodisch zu machen. Dies ist schon der Fall, wenn nur

$$E(T) = E(0) \quad E'(T) = E'(0) \quad \ldots \quad (8)$$

gemacht wird, weil dann aus Gleichung (1) und deren Ableitungen folgt, dass auch alle höhern Ableitungen von E in $t = 0, T$ übereinstimmen. Aber

$$E(t+T) = e(t+T) + \alpha_1 \eta_1(t+T) + \alpha_2 \eta_2(t+T)$$

somit

$$\begin{aligned} E(T) &= e(T) + \alpha_1 a + \alpha_2 b \\ E'(T) &= e'(T) + \alpha_1 c + \alpha_2 d \end{aligned}$$

Bedingung (8) erfordert

$$\begin{aligned} -e(T) + e(0) &= \alpha_1 (a-1) + \alpha_2 b \\ -e'(T) + e'(0) &= \alpha_1 c + \alpha_2 (d-1) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben eindeutig

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\Delta}\Big\{(d-1)\big[e(0) - e(T)\big] - b\big[e'(0) - e'(T)\big]\Big\} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\Delta}\Big\{-c\big[e(0) - e(T)\big] + (a-1)\big[e'(0) - e'(T)\big]\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\Delta = (a-1)(d-1) - bc$$

sobald nur $\Delta \neq 0$ ausfällt. Nun folgt aus

$$\left.\begin{aligned} \eta_1'' + p\,\eta_1 &= 0 \\ \eta_2'' + p\,\eta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\eta_1 \eta_2'' - \eta_2 \eta_1'' = 0 \\ \text{oder } &\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = \text{konst.} \end{aligned}$$

und für $t = 0, T$

$$\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = 1 = \eta_1(T)\, \eta_2'(T) - \eta_2(T)\, \eta_1'(T) = ad - bc \quad (10)$$

daher ist

$$\Delta = (a-1)(d-1) - bc = 2 - (a+d)$$

und es ist $\Delta \neq 0$ wenn

$$\frac{a+d}{2} \neq 1 \quad \ldots \ldots \quad (10')$$

ausfällt.

Die so gefundene Schwingung $E(t)$ bleibt, weil periodisch, in endlichen Schranken. Ob dies auch für den Schwingungsvorgang (1) der Fall ist, wird davon abhängen, ob es für die zu E hinzutretende Eigenschwingung zutrifft.

---

[1]) Das vorliegende mathematische Problem ist zunächst in der sog. Störungstheorie der Planetenbewegungen aufgetreten. Die hier gegebene Darstellung sucht sich technischen Bedürfnissen anzupassen.

[2]) Akzente bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

[1]) Vergl. hierüber des Verfassers Aufsatz: Ueber graph. Integration. Diese Zeitschrift Bd. LXII, Nr. 15/16 (11./18. Oktober 1913).