

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 69/70 (1917)  
**Heft:** 23

**Artikel:** Von der Cykloide  
**Autor:** Kiefer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33985>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Von der Cykloide.

Von A. Kiefer in Zürich.

Die Cykloide wird von einem Punkte beschrieben, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise bewegt, wenn der Mittelpunkt des Kreises mit derselben Geschwindigkeit auf einer Geraden läuft.

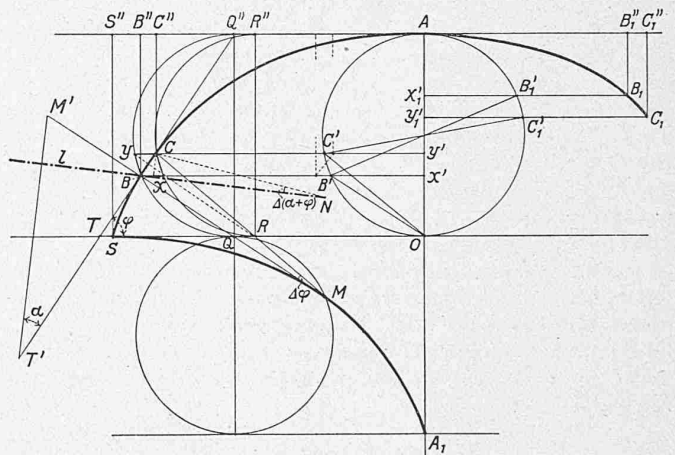
In der Abbildung sind die Kreise über  $QQ''$ ,  $RR''$  als Durchmesser, zwei benachbarte Lagen des beweglichen Kreises; der Kurvenpunkt  $B$  kommt infolge seiner zwei Teilbewegungen während einer sehr kleinen Zeit nach  $X$ , beziehungsweise nach  $Y$ , in Wirklichkeit nach  $C$ . Da, gemäss der Kurvendefinition,  $BX = BY$  ist, so muss  $BC$  den Winkel  $XY$  halbieren und daher geht die Tangente in dem Kurvenpunkte  $B$  durch  $Q''$ , d. i. der Berührungspunkt des beweglichen Kreises mit der Scheiteltangente  $AS''$ , und dem zufolge ist  $BQ$  die Normale und geht durch den Berührungspunkt des Kreises mit der Spitzengeraden  $OS$ . Die benachbarte Normale ist  $CR$ ;  $RX$  ist parallel  $QB$  und halbiert  $BC$  und daher ist der Krümmungsradius  $BM = 2BQ$ . Nimmt man den symmetrischen Kreis zum Kreis über  $QQ''$  in bezug auf  $Q$ , so geht derselbe durch  $M$ , weil  $QM = QB$ ; der benachbarte Kreis berührt in  $R$  und der Punkt  $M$  verschiebt sich um  $QR$  und bewegt sich auf dem Kreis um dieselbe Grösse wie  $C$ . Der Punkt  $M$  beschreibt also die Cykloide mit dem Scheitelpunkte  $S$  und der Spitze  $A_1$ . Das Bogenelement der Cykloide ist  $BC = 2(Q''B - Q''Y)$ ; durch Summation folgt, dass irgend ein Bogenstück der Cykloide gleich der doppelten Differenz der zu den Endpunkten gehörigen Sehnen des beweglichen Kreises ist, oder in dem Kreise über  $OA$  gleich der doppelten Differenz der Sehnen, die von  $A$  parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des Bogenstückes laufen. Der Cykloidenbogen  $BA$  ist gleich  $2B'A$ ; die ganze Cykloide hat die Länge  $8r$ , wenn  $r$  der Radius des beweglichen Kreises ist. Das Parallelogramm  $BXRQ$  ist doppelt so gross wie das Dreieck  $XRC$ ; folglich ist das Viereck  $BCRQ$ , wenn es unendlich klein ist, dreimal so gross wie das Dreieck  $RXC$  oder wie das Dreieck  $OB'C$ . Durch Summation folgt, dass das von einem beliebigen Cykloidenbogen  $BC$ , den Normalen  $BQ$ ,  $CR$  und der Strecke  $QR$  eingeschlossene Flächenstück dreimal so gross ist wie das Flächenstück  $OB'C$ , begrenzt von zwei Kreissehnen  $OB'$ ,  $OC'$  und dem Kreisbogen  $B'C'$ . Die von der Cykloide und der Spitzengeraden eingeschlossene Fläche misst  $3r^2\pi$ . Denkt man sich das Bogenelement  $BC$  parallel nach der Mitte von  $B'C'$  verschoben, so geht es durch  $A$  und man sieht, dass das Flächenelement  $BCC''B'' = B'X'Y'C'$  ist; durch Summation folgt, dass das Flächenstück, begrenzt von dem beliebigen Cykloidenbogen  $BC$ , den Loten  $BB''$ ,  $CC''$  auf die Scheiteltangente und der Strecke  $B''C''$ , gleich dem Flächenstück  $B'C'Y'X'$  ist, wo  $B'C'$  ein Kreisbogen ist, und ferner dass das Flächenstück zwischen der Cykloide, den Loten von den Spitzen auf die Scheiteltangente und der Strecke zwischen den Fusspunkten gleich  $r^2\pi$  ist. Es ist das Flächenelement  $BCC''B'' = B'X'Y'C' = B'_1X'_1Y'_1C'_1 = B'_1C'_1C''_1B''_1$ . Die beiden Flächenelemente  $BCC''B''$  und  $B'_1C'_1C''_1B''_1$  sind also gleich; ihre Schwerpunkte halbieren die Mittellinien und tragen gleiches Gewicht. Die halbe Summe der zwei Mittellinien ist gleich  $r$  und folglich hat der Schwerpunkt der zwei Flächenelemente  $BCC''B''$ ,  $B'_1C'_1C''_1B''_1$ , zusammen genommen von der Scheiteltangente den Abstand  $r/2$ . Das gleiche gilt für alle derartige Paare von Flächenelementen; also hat der Schwerpunkt der Fläche zwischen Cykloide, Scheiteltangente und den Loten von den Spitzen auf die Scheiteltangente vom Scheitelpunkt  $A$  den Abstand  $r/2$ . Das Rechteck, dessen Ecken die beiden Spitzen und ihre Projektionen auf die Scheiteltangente sind, wird von der Cykloide, wie gesehen, im Verhältnis von 3:1 geteilt; also teilt der Mittelpunkt des Rechteckes die Strecke zwischen den Schwerpunkten seiner zwei Teile im Verhältnis 1:3, d. h. der Schwerpunkt der Fläche zwischen Cykloide und Spitzengerade hat vom Mittelpunkt der Strecke  $OA$  den Abstand  $1/3 \cdot r/2 = r/6$  und er hat von  $A$  den Abstand  $7/6r$ .

Wie gesehen, ist das Bogenelement  $BC = 2(Q''B - Q''Y) = 2 \cdot \Delta AB'$ ; die halbe Cykloide hat die Länge  $4r$  und daher ist der Abstand ihres Schwerpunktes von der Scheiteltangente  $\frac{1}{4r} \sum 2 \cdot \Delta AB' \cdot AX'$ , oder, da  $AX' = \frac{AB'^2}{2r}$  ist,

$$\frac{1}{4r^2} \sum \overline{AB'}^2 \cdot \Delta AB' = \frac{1}{4r^2} \cdot \frac{\overline{AO}^3}{3} = \frac{2}{3}r.$$

Das gleiche gilt für die symmetrische Cykloidenhälfte; der Schwerpunkt der Cykloide hat von  $A$  den Abstand  $2/3r$ .

Die Abbildung gibt noch zu weiteren Beziehungen Anlass. Die Tangenten der Cykloide in  $B$  und  $B_1$  sind rechtwinklig zu einander gerichtet; ihre Abschnitte zwischen Berührungspunkt und Scheiteltangente sind gleich  $AB'$ ,  $AB'_1$  und es ist  $\overline{AB'}^2 + \overline{AB'_1}^2 = 4r^2$ . Die zu den Punkten  $B, B_1$  gehörigen Krümmungsradien messen  $2OB'$ ,  $2OB'_1$  und es ist  $2OB'^2 + 2OB'_1^2 = 4 \cdot 4r^2 = 16r^2$ . Die beiden Cykloidenbogen  $AB$ ,  $AB_1$  sind gleich  $2AB'$ ,  $2AB'_1$  und also ist die Summe ihrer Quadrate gleich  $16r^2$ . Aus der Gleichheit der Flächenelemente  $BCC''B''$ ,  $B'_1C'_1C''_1B''_1$  folgt durch Summation die Gleichheit der gemischtlinig Flächenstücke  $SS''B''B$ ,  $AB'_1B_1$ ; der Schwerpunkt der zwei Flächenstücke zusammen genommen hat von der Scheiteltangente den Abstand  $r/2$ , gemäss der Lage von den Schwerpunkten der zwei Flächenelemente, d. h.:



Wählt man auf der Cykloide zwei Punkte  $B, B_1$ , deren Tangenten senkrecht zu einander gerichtet sind, so ist für zwei solche Punkte die Summe der Quadrate der Tangentenabschnitte, zwischen Berührungspunkt und Scheiteltangente gemessen, konstant. Ferner ist für zwei solche Punkte die Summe der Quadrate der Krümmungsradien konstant und ebenso die Summe der Quadrate der Cykloidenbogen zwischen dem Scheitelpunkt und den beiden Punkten. Die zwei Flächenstücke  $SS''B''B$ ,  $AB'_1B_1$  sind gleich gross und der Schwerpunkt der zwei Flächenstücke zusammen genommen hat von der Scheiteltangente konstanten Abstand  $r/2$ . Es sei noch hinzugefügt, dass die Summe des gemischtlinig Flächenstückes  $SBB''Q''Q$  und des entsprechenden Flächenstückes auf der andern Seite des Scheitelpunktes konstant ist; ferner hat das Stück der Scheiteltangente, das von den Tangenten der Punkte  $B, B_1$  begrenzt wird, konstante Länge und die Subtangenten auf der Scheiteltangente sind gleich lang. Die Summe der zwei Flächenstücke ist nämlich in dem Kreis über  $OA$  gleich der dreifachen Summe der Segmente über  $OB'$ ,  $OB'_1$  und des Dreieckes  $OB'B'_1$ , d. i.  $3 \cdot r^2\pi/2$ ; das erwähnte Stück der Scheiteltangente ist  $r\pi$  und die zwei Subtangenten sind gleich  $B'X' = B'_1X'_1$ , gleich den Subnormalen auf der Spitzengeraden. Es ist ersichtlich, dass die angegebenen Sätze auch für zwei auf gleicher Seite von  $A$  gelegene Punkte gelten, die von der Scheiteltangente, beziehungsweise von der Spitzengeraden gleiche Abstände haben; dabei tritt indessen für das Stück auf der Scheiteltangente die Summe der von  $A$  aus gemessenen Tangentenabschnitte.

Nimmt man auf der Tangente  $BQ''$  irgend einen festen Punkt  $P$ , verschiebt den Kreis über  $Q''Q$  als Durchmesser längs der Scheiteltangente und verbindet man stets  $P$  mit

dem Berührungspunkt des Kreises auf der Scheiteltangente und schneidet die Verbindungslinie mit dem Kreis, so ist der Ort des Schnittpunktes eine Kurve, die durch den Berührungspunkt  $B$  der Cykloidentangente  $PB$  hindurch geht. Diese Kurve ist von der dritten Ordnung, denn auf eine beliebige Gerade durch  $P$  fällt ein Punkt des Ortes, weil im Schnittpunkt der Geraden mit der Scheiteltangente ein einziger Kreis des ganzen Systems von Kreisen berührt, und es kommt zweimal vor, dass ein Punkt des Ortes nach  $P$  fällt, weil durch  $P$  zwei Kreise des Systems gehen. Diese Kurve ändert sich nicht, wenn  $P$  festgehalten, aber die Cykloide durch irgend eine andere ersetzt wird, die entsteht, wenn die ursprüngliche Cykloide längs der Scheiteltangente parallel verschoben wird, d. h.:

*Zieht man von einem beliebigen Punkte Tangenten an eine Cykloide, so liegen die Berührungspunkte auf einer gewissen Kurve dritter Ordnung, die  $P$  zum Doppelpunkt hat. Verschiebt man die Cykloide parallel längs der Scheiteltangente und legt man von  $P$  an alle diese unendlich vielen Cykloiden Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf der gleichen Kurve dritter Ordnung.*

Schneidet eine beliebige Gerade die Cykloide in  $B$  und legt man in  $B$  die Cykloidentangente, so ist sie zur Sehne  $B'A$  des Kreises über  $OA$ , als Durchmesser, parallel; bewegt man  $B$  auf der Geraden, legt  $BB'$  immer parallel zur Scheiteltangente bis zum Kreis über  $OA$  und zieht durch  $B$  die Parallele zu  $B'A$ , so umhüllen diese Parallelen eine Kurve, die auch von der Cykloidentangente des Schnittpunktes  $B$  der Cykloide mit der Geraden berührt wird. Diese Enveloppe ist dritter Klasse; denn durch jeden Punkt der Geraden gehen zwei Tangenten der Enveloppe, indem die Parallele zur Scheiteltangente durch den Punkt den Kreis über  $OA$  zweimal schneidet, und es kommt einmal vor, dass die Tangente auf die Gerade fällt, indem es durch  $A$  eine einzige Sehne gibt, die zur Geraden parallel ist. Die Enveloppe ist auch deswegen von der dritten Klasse, weil zu jedem Punkt auf der Geraden zwei Tangentenrichtungen gehören, aber zu jeder Tangentenrichtung gehört eine Sehne durch  $A$  und daher ein Punkt der Geraden; aus diesem letzten Grund ist die unendlich ferne Gerade Doppeltangente der Enveloppe. Die Enveloppe bleibt die gleiche, wenn die Cykloide parallel zur Scheiteltangente verschoben wird, d. h.:

*Schneidet man eine beliebige Gerade mit der Cykloide und legt in den Schnittpunkten die Tangenten, so berühren sie eine gewisse Kurve dritter Klasse, die die Gerade zur einfachen und die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat. Verschiebt man die Cykloide parallel zur Scheiteltangente, schneidet alle diese Cykloiden mit der gleichen Geraden und legt in den Schnittpunkten die Tangenten, so berühren sie dieselbe Kurve dritter Klasse.*

Die Sätze lassen sich erweitern. Die Kurve dritter Klasse hat mit einer beliebig gewählten Kurve  $k^{\text{ter}}$  Klasse  $3 \cdot k$  Tangenten gemein, und die vorhin gefundene Kurve dritter Ordnung schneidet eine beliebig gewählte Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in  $3 \cdot n$  Punkten. Also:

*Verschiebt man eine Cykloide parallel zur Scheiteltangente und legt für jede dieser unendlich vielen Cykloiden und eine feste Kurve  $k^{\text{ter}}$  Klasse die gemeinsamen Tangenten, so liegen ihre Berührungspunkte mit den Cykloiden auf einer Kurve von der Ordnung  $3 \cdot k$ . Schneidet man jede Cykloide mit einer festen Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung und legt in den Schnittpunkten die Cykloidentangenten, so umhüllen diese eine Kurve von der Klasse  $3 \cdot n$ .*

Analoge Sätze gelten für die Cykloidennormalen und ihre Fusspunkte; an Stelle der Scheiteltangente tritt bei der Entstehung der Kurve dritter Ordnung und der Kurve dritter Klasse die Spitzengerade.

Der Krümmungskreis der Cykloide im Punkte  $B$  hat den Mittelpunkt  $M$ , den Radius  $MB$  und berührt die Cykloide dreipunktig. Im folgenden sollen die Parabeln und gleichseitigen Hyperbeln ermittelt werden, welche die Cykloide in  $B$  ebenfalls dreipunktig berühren, ferner die Kegelschnitte, die sie vier- und fünfpunktig berühren.

Hierzu dienen folgende Kegelschnitt-Eigenschaften (Steiner's ges. Werke, II. Band, Seite 342): Wenn man bei einer Parabel den Krümmungsradius über den Kurvenpunkt hinaus um sich selber verlängert, so liegt die Mitte der Verlängerung auf der Leitlinie; bei der gleichseitigen Hyperbel geht der Kreis über der Verlängerung des Krümmungsradius, als Durchmesser, durch ihren Mittelpunkt. Wählt man daher irgend eine Gerade durch  $M$ , wobei  $BM' = QB$  ist, als Leitlinie einer Parabel, die in  $B$  die Gerade  $TB$  berührt, so ist die Parabel bestimmt und sie berührt den Krümmungskreis und damit auch die Cykloide in  $B$  dreipunktig; wählt man irgend einen Punkt auf dem Kreis ( $M'$ ),  $B$  als Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, die in  $B$  die Gerade  $TB$  berührt, so ist die gleichseitige Hyperbel bestimmt, und sie berührt den Krümmungskreis und damit auch die Cykloide in  $B$  dreipunktig. Unter den unendlich vielen Parabeln, die in  $B$  dreipunktig berühren, gibt es eine, die vierpunktig berührt; ihre Leitlinie muss durch  $M'$  und den zu  $M'$  unendlich benachbarten Punkt gehen, der entsteht, wenn  $MQ$  unendlich wenig um  $M$  gedreht und die neue Lage von  $QB$  wieder um sich selber verlängert wird. Denkt man sich alle Geraden durch  $M$  gelegt und für jede die Verlängerungskonstruktion gemacht, so ist der Ort von  $M'$  eine Hyperbel, die durch  $M, M', T$  und die unendlich fernen Punkte von  $TQ$  und  $TB$  geht. Die Tangente der Hyperbel in  $M'$  kann mit dem Satz von Pascal konstruiert werden; wählt man  $TQ, MM'$  und die Parallelen durch  $M, M'$  zu  $TB$  und  $TQ$  als Gegenseitenpaare des Sechsecks, so sieht man, dass die Hyperbeltangente die Gerade  $BT$  so schneidet, dass  $TT' = 2TB$  ist. Die Gerade  $M'T'$  ist nun die Leitlinie der vierpunktig berührenden Parabel. Ausser dieser Parabel gibt es unendlich viele Kegelschnitte, die alle in  $B$  vierpunktig berühren; ihre Mittelpunkte liegen auf der Senkrechten  $l$  durch  $B$  zu  $M'T'$  und diese Kegelschnitte können als kollineare Figuren zur Parabel gefunden werden, mit  $B$  als Zentrum und  $TB$  als Axe. Unter diesen Kegelschnitten gibt es eine gleichseitige Hyperbel; ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt des Kreises ( $M'$ ),  $B$  mit der Geraden  $l$ . Unter den unendlich vielen vierpunktig berührenden Kegelschnitten muss es einen geben, der fünfpunktig berührt; sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt von  $l$  mit der zum benachbarten Cykloidenpunkt gehörigen Geraden  $l$ . Bezeichnet man den Winkel zwischen  $l$  und  $BQ$  mit  $\alpha$ , so ist auch  $\angle M'T'B = \alpha$ , und wenn man den Winkel  $BTQ$  noch mit  $\varphi$  bezeichnet, so ist der Winkel zwischen  $l$  und  $BB''$  gleich  $\alpha + \varphi$ . Also ist der Winkel zwischen der Geraden  $l$  und ihrer unendlich benachbarten Lage  $CN$  gleich  $\Delta\alpha + \Delta\varphi$ , und aus der Abbildung folgt

$$NB \cdot (\Delta\alpha + \Delta\varphi) = MB \cdot \Delta\varphi \cdot \cos \alpha,$$

$$NB = MB \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\varphi} + 1}{\cos \alpha}$$

aber ebenfalls aus der Abbildung

$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \varphi = \frac{M'B}{BT'} : \frac{QB}{BT} = 1 : 3$ , und somit durch eine elementare Ueberlegung

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\varphi} = \frac{1}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}. \quad \text{Eingesetzt}$$

$$NB = MB \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} + 1} = 3 MB \frac{\cos \alpha \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi}.$$

Damit ist der Mittelpunkt des fünfpunktig berührenden Kegelschnittes gefunden. Für den Scheitelpunkt  $A$  der Cykloide ist  $\varphi = \alpha = 0$ ; also hat der Mittelpunkt des in  $A$ , aus Symmetriegründen, sechspunktig berührenden Kegelschnittes von  $A$  den Abstand  $3/4 \cdot A_1A = 3/2 \cdot AO$ . Die Leitlinie der in  $A$  vierpunktig berührenden Parabel ist die symmetrische Gerade der Spitzengeraden in bezug auf die Scheiteltangente und der Mittelpunkt der in  $A$  vierpunktig berührenden gleichseitigen Hyperbel ist der symmetrische Punkt von  $A_1$ , in bezug auf  $A$ . Man kann noch fragen, ob es auf der Cykloide Punkte gebe, wo der fünfpunktig berührende Kegelschnitt Parabel oder gleichseitige Hyperbel wird. Im ersten Fall muss  $\cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi = 0$  sein

und im zweiten Fall —  $MB \cos \alpha = 3 MB \frac{\cos \alpha \cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi}$ , d. h.  $1 = \frac{3 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi}$ . Hieraus, in Verbindung mit der Gleichung  $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \varphi = 1 : 3$ , folgt im ersten Fall  $\operatorname{tg} \varphi = \pm i \sqrt{3}$  und im zweiten Fall  $\operatorname{tg} \varphi = \pm i \sqrt{\frac{21}{5}}$ .

Zusammengefasst:

In jedem Punkte  $B$  einer Cykloide gibt es unendlich viele dreipunktig berührende Parabeln und gleichseitige Hyperbeln; die Leitlinien der erstern gehen alle durch den Punkt  $M'$ , wobei  $BM' = QB$  ist, und die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln liegen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt  $M'$  und dem Radius  $M'B$ . In dem Punkte  $B$  gibt es eine vierpunktig berührende Parabel; ihre Leitlinie ist die Gerade  $M'T'$ , wobei  $TT' = 2 BT$  ist. Ausser dieser Parabel gibt es noch unendlich viele Kegelschnitte, die die Cykloide in  $B$  vierpunktig berühren; die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf der Geraden  $l$ , die durch  $B$  senkrecht zu  $M'T'$  läuft. Derjenige dieser Kegelschnitte, dessen Mittelpunkt im Schnittpunkt von  $l$  mit dem Kreis ( $M'$ ),  $B$  liegt, ist eine gleichseitige Hyperbel. Unter den Kegelschnitten gibt es einen, der die Cykloide fünfpunktig berührt; sein Mittelpunkt  $N$  hat von  $B$  den Abstand  $NB = 3 MB \frac{\cos \alpha \cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi}$ . Im Scheitelpunkt  $A$  berührt dieser Kegelschnitt aus Symmetriegründen sechspunktig; der Mittelpunkt hat von  $A$  den Abstand  $3/2 \cdot AO$ . Die Parabel, die in  $A$  vierpunktig berührt, hat als Leitlinie die symmetrische Gerade der Spitzengeraden in bezug auf die Scheiteltangente. Die in  $A$  vierpunktig berührende gleichseitige Hyperbel hat als Mittelpunkt den symmetrischen Punkt von  $A_1$  in bezug auf  $A$ . Auf der Cykloide gibt es keinen reellen Punkt, in dem eine fünfpunktig berührende Parabel, oder gleichseitige Hyperbel angebracht werden kann.

Ist ein Kegelschnitt und auf ihm ein Punkt  $B$  gegeben, so kann man nach den Cykloiden fragen, die den Kegelschnitt in  $B$  drei- oder vierpunktig berühren. Durch Umkehrung hat man:

Es gibt unendlich viele Cykloiden, die den Kegelschnitt in  $B$  dreipunktig berühren. Die Kreise, welche die Cykloiden erzeugen, bilden ein Büschel mit  $B$  und der Mitte  $Q$  des Krümmungsradius  $BM$  als Grundpunkten, und mit den Tangenten in  $Q$  als zugehörigen Spitzengeraden. Unter diesen Cykloiden gibt es eine vierpunktig berührende; ihre Spitzengerade ist  $QT$ , wobei  $T$  gefunden wird, indem man  $B$  mit dem Mittelpunkt des Kegelschnittes verbindet, zu dieser Geraden durch  $M'$  die Senkrechte  $M'T'$  zieht und dann  $BT'$  im Verhältnis  $BT : TT' = 1 : 2$  teilt. Bewegt man  $B$  auf dem Kegelschnitt, so umhüllt  $TQ$  die Kurve, die von den Mitten aller Krümmungsradien gebildet wird.

### Miscellanea.

**Elektrische Traktoren für Lastwagenbeförderung.** Der durch den Krieg hervorgerufene Mangel an kräftigen Pferden hat die städtische Verwaltung in Wiesbaden veranlasst, zur Förderung der verschiedenartigsten Lastfuhrwerke kleine Akkumulatoren-Schleppwagen anzuschaffen. Dabei sind zwei von einander verschiedene Typen in Anwendung gekommen. Die von den Hansa-Lloyd-Werken in Bremen gelieferten Traktoren sind zweiachsig mit 1870 mm Achsabstand und 3900 mm Wagenlänge. Die 40 Zellen umfassende Batterie wiegt 1600 kg und hat 500 Ah Kapazität. Sie ist über der Vorderachse angeordnet, die dadurch mit 2730 kg belastet ist, während die Hinterachse nur 960 kg zu tragen hat. Jedes Vorderrad wird mit einfacher Zahnradübersetzung 1:11,6 von einem 5 PS-Seriemotor angetrieben. Der Fahrschalter besitzt zwei Anfahrstellungen und drei Fahrtstellungen, die bei belastetem Wagen Geschwindigkeiten von 6 bis 7, 9 bis 10 und 11 bis 12 km/h (bei leerem Wagen bis 15 km/h) auf wagrechter Bahn entsprechen; daneben hat der Fahrschalter Stellungen für Rückwärtsgang und elektrische Bremsung. Die Zugkraft dieser Wagen ist bei dem Adhäsionsgewicht von nur 2730 kg und der durch die einfache Uebersetzung bedingten etwas zu hohen Geschwindigkeit nicht gross genug, um schwere Lasten dauernd auf starken Steigungen zu ziehen.

Demgegenüber gestattet der andere, von der Firma Hentschel & Cie. in Berlin gebaute Traktortyp auch eine Ausnützung eines Teils des Gewichts der Ladung für die Adhäsion; dafür ist sie nur in Verbindung mit einachsigen Anhängewagen verwendbar. Dieser ebenfalls zweiachsige, über der Hinterachse plattformartig ausgebildete Traktor hat 2800 mm Achsstand und 4150 mm Wagenlänge. Jedes der vier Räder wird mittels einer doppelten Zahnrad-Uebersetzung 1:3,2 und 1:7,2 von einem 4 PS-Seriemotor angetrieben. Die Batterie ist die gleiche, wie bei den andern Wagen. Das Adhäsionsgewicht beträgt für die Vorderachse 1800 kg, für die Hinterachse 2360 kg. Wenn der Anhängewagen auf der Plattform über der Hinterachse aufgeprotzt ist, steigt das nutzbare Reibungsgewicht auf 5000 bis 5500 kg. Mit belastetem Anhänger sind Geschwindigkeiten von 4 bis 5,5, 6 bis 8 und 7,5 bis 11 km/h, mit leerem solche bis 12 km/h auf horizontaler Bahn erreichbar.

Nach den bisherigen Betriebserfahrungen, über die Baurat Berlitz in der „Z. d. V. D. L.“ Näheres berichtet, haben beide Wagenarten im wesentlichen die Anforderungen erfüllt, die man zur Zeit berechtigterweise an eine derartige, noch selten verwendete Bauart stellen kann.

**Die Verwertung der Brennessel-Faser in der Textil-Industrie.** Einem Vortrag „Einiges über die chemische Technologie der Bekleidung“, den Dr. Adolf Jolles vor der Fachgruppe für Gesundheitstechnik des Oesterr. Ingenieur- und Architekten-Vereins hielt<sup>1)</sup>, entnehmen wir über die Verarbeitung von Brennesselfasern zu Garn die folgenden Einzelheiten: Die Nesselstengel werden in Dörröfen bis zu einem bestimmten Feuchtigkeitsgrad getrocknet, hierauf auf Knickmaschinen gebrochen, mittels Schüttelmaschinen von den Holzteilchen befreit und sodann, falls feineres, weiches Garn erzeugt werden soll, in einem 2%igen Seifenbade gekocht und schliesslich noch gehechelt. Die Ausbeute an verspinnbare Faser ist ungefähr so gross wie beim Hanf, wird sich aber zweifellos durch Kultivierung der Pflanze bedeutend erhöhen lassen. Bei der Verspinnung des Nesselwerges ergaben sich zuerst Schwierigkeiten, die aber durch Anpassung der vorhandenen Spinnmaschinen an die besondern Eigenschaften der Nesselfaser grösstenteils bereits gehoben sind. Das Nesselwerg gelangt zuerst auf die Leinenkarden, wo es in langfaseriges und kurzfasriges Material getrennt wird; das erstere wird mit 50% Flachswergzusatz auf Nesselleinenmischgarn verarbeitet, das zu Plachen, Deckenstoffen, Sack- und Zwillischzeug gut geeignet ist. Das kurzfasrige Material wird entweder für sich allein oder besser mit Zusatz von Baumwolle (der jedoch weit geringer sein kann, als der Flachszusatz bei der Verarbeitung nach Leinenart) nach Baumwollart versponnen. Diese Garne besitzen eine grosse Festigkeit und eignen sich zu den verschiedensten Geweben (Wäsche, Monturstoffe); insbesondere können sie auch zur Erzeugung der Auerstrümpfe anstelle der bisher für diesen Zweck allein brauchbaren „Ramie“-Faser (die Faser einer Nesselpflanze, die in China und Indien in immer stärker zunehmendem Umfange gezogen wird) verwendet werden.

**Die Verkürzung der Anheizzeit von Dampfkesseln.** Um die Reservekessel im Dampfkraftwerk der Union Electric Light and Power Co. in St. Louis in Betriebsbereitschaft zu haben, wird das Kesselwasser dauernd auf einer Temperatur von 100° C gehalten. Die Kessel stehen zu diesem Zwecke, wie Wilkens in den „Mitteil. der Vereinig. der El.-Werke“ berichtet, mit einem tiefer gelegenen Wasserbehälter in Verbindung, dessen Inhalt durch eine mit Frischdampf gespeiste Heizschlange dauernd auf 100° C erhitzt wird. Die zwei Verbindungsrohre zwischen dem Behälter und dem Kessel sind derart angeordnet, dass ein stetiger Wasserumlauf und somit eine Warmhaltung des Kesselwassers auf etwa 100° C stattfindet. Ausserdem sind die Kettenroste der betreffenden Kessel mit hochwertiger gasreicher Nusskohle bedeckt, wobei in der Kohlschicht Längs- und Querschlitzungen gezogen sind, die mit in Oel getränkten Putzlappen und Holzsplitteln ausgefüllt sind; die Kohlenfläche selbst ist ebenfalls mit Oel bespritzt. Auf diese Weise vorbereitete Reservekessel waren 16 Minuten nach Entzündung des Feuers imstande, Dampf abzugeben. Die zur Warmhaltung des Wassers erforderliche Kohlenmenge ist nur etwa 10% derjenigen, die bei dauernder Unterhaltung eines kleinen Feuers auf dem Rost zur Erhitzung des Kesselwassers auf dauernd 100° C nötig wäre; ausserdem braucht in letztgenanntem Falle der Kessel bis zur vollen Dampferzeugung 32 Minuten.

<sup>1)</sup> Der Vortrag ist im Wortlaut in der Zeitschrift des Vereins veröffentlicht.