Band 63. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 18.**

Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern.

Von Professor *A. Stodola*, Zürich.

Die Schwierigkeiten der sogenannten kritischen Umlaufzahl sind bekanntlich vom praktischen Turbinenbau durch immer sorgfältigere Auswuchtung der rotierenden Teile in so weitgehendem Masse überwunden worden, dass ein Uebergang über den kritischen Wert der Geschwindigkeit stellenweise ohne jede wahrnehmbare Erschütterung vor sich geht, ja, dass Turbinen schon dauernd auf der kritischen Drehzahl in Betrieb erhalten werden konnten. Mit der Steigerung der Einheitsgrösse und der fortschreitenden Erhöhung der Umlaufzahlen hat sich indessen hin und wieder eine andere Störung rein dynamischer Natur eingestellt, indem die Laufrad-Scheiben quer zur Achse in Schwingung geraten. Die Auslenkungen können so erheblich werden, dass der Scheibenrand an den festen Scheidewänden zum Streifen kommt. Dass hierbei die streifenden Teile im Nu auf Gluttemperatur erhitzt werden und ein gefahrdrohender Zustand eintritt, ist selbstverständlich. Nachdem neuerdings auf dem europäischen Festland die Dampfturbinenbau-Firmen mindestens als erste Turbinenstufe sozusagen ausnahmslos ein Scheibenlaufrad zu verwenden pflegen, erhält die Frage nach dem Grund der Schwingungen und ihren kritischen Werten ein allgemeines praktisches Interesse.

Den Hauptgrund für die Entstehung der Schwingungen bildet die teilweise Beaufschlagung oder Fehler in der Ausführung, wenn z. B. der Dampf an gewissen Stellen periodisch gegen den Radkranz oder die Bandage stösst. Die Axialkräfte dieser Strahlsplitter und selbst der gesamte axiale Schub in einem teilweise beaufschlagten Segment eines Rades sind indessen so klein, dass sie an sich keine gefährliche Auslenkung des Rades bewirken könnten. Eine Gefahr besteht nur dann, wenn die Periode der Kraftwirkung zusammenfällt mit einer der möglichen Eigenschwingungszahlen des Rades, d. h. wenn *Resonanz* vorhanden ist.

I. Die Periode der Kraftwirkung.

Es sei der ungünstigte Fall vorausgesetzt, dass die Beaufschlagung auf einem Bogen vom Zentriwinkel φ_o stattfindet, während der Winkel $2\pi - \varphi_o$ frei bleibt. Ist die axiale Kraft auf die Winkeleinheit bezogen a_o, so ist ihr Mittelwert auf den ganzen Umfang bezogen $a_m = a_o \varphi_o : 2\pi$, und man kann die Kraftwirkung zerlegen in den konstanten Bestandteil a_m, der der Scheibe eine unmerklich kleine und unveränderliche Biegung erteilt und gemäss Abbildung 1 in einen periodischen Bestandteil $+a$ für den Winkel φ_o und $-b$ für den Winkel $2\pi - \varphi_o$, wobei $a\varphi_o = (2\pi - \varphi_o)\, b$ sein muss (und $b = a_m$ ist). Drücken wir diese aus zwei Geraden bestehende Funktion nach den Regeln der Infinitesimalrechnung durch eine Fourriersche Reihe aus, so erhalten wir:

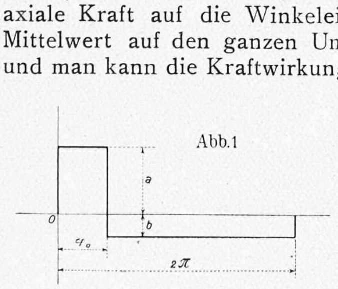

Abb. 1

$$f(\varphi) = \frac{2b}{\varphi_o}\Big[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \ldots$$
$$-\sin(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2}\sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{3}\sin 3(\varphi - \varphi_0) - \ldots\Big]$$

Betrachten wir nun einen Punkt des Scheibenumfanges, der zur Zeit $t = 0$ auf demjenigen Halbmesser liegt, der im Sinne der Drehung um den *festen* Winkel φ gegen den Anfang des Zeitradsegmentes geneigt ist. Dieser Halbmesser wird zur Zeit t den Winkel $\varphi + \omega t$ mit der Anfangslage bilden, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Demnach ist die axiale Kraft, die auf jenen Punkt wirkt

$$f(\varphi + \omega t) = \frac{2b}{\varphi_o}\Big[\sin(\varphi + \omega t) + \frac{1}{2}\sin 2(\varphi + \omega t) + \ldots$$
$$-\sin(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \frac{1}{2}\sin 2(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \ldots\Big]$$

Lösen wir das allgemeine Glied auf als $\sin k(\varphi + \omega t) = \sin k\varphi \cdot \cos k\omega t + \cos k\varphi \sin k\omega t$, so erkennen wir (da φ hier einen Festwert bedeutet, der den betreffenden Umfangspunkt kennzeichnet), dass die von diesem Gliede stammende Teilkraft aus zwei mit der Zeit periodisch wechselnden, stehenden Feldern besteht, deren Summe das in Wahrheit rotierende Kraftfeld ausmacht.

Das ganze Kraftfeld setzt sich aus einer Summe von Gliedern zusammen, in welchen $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\sin 2\,\omega t$, $\cos 2\,\omega t$, $\sin 3\,\omega t$, $\cos 3\,\omega t \ldots$ die Faktoren sind. Die sekundlichen Schwingungszahlen der Kraftwirkung sind also $\frac{\omega}{2\pi}, \frac{2\omega}{2\pi}, \frac{3\omega}{2\pi}, \ldots$ Diejenige davon, welche mit einer natürlichen Eigenschwingung zusammenfällt, wird gesteigert und ruft Resonanz hervor. Die nächste Aufgabe besteht daher in der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der Turbinenscheiben.

II. Die Kirchhoff'schen Ergebnisse.

Ueber die Eigenschwingungen einer kreisrunden Platte liegt eine klassische Untersuchung vor von Kirchhoff in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, 40. Band, 1850, Seite 51 u. f., über die er abgekürzt in seiner „Mechanik", zweite Auflage, Seite 460 u. f. berichtet. Kirchhoff findet für die Zahl der Vollschwingungen in der Sekunde die Formel

$$N_{sek} = \beta \frac{h'}{R^2}\sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad \ldots \ldots \quad 1$$

worin β die aus nachstehender Zahlentafel zu entnehmende Beizahl,
R den Halbmesser der Scheibe,
h' die halbe Dicke der Scheibe,
E den Elastizitätsmodulus,
μ die Masse der Volumeneinheit

bedeuten (Einheiten beliebig, z. B. für *kg, cm, sek* ist für Stahl $E = 2\,200\,000$; $\mu \cong 8 \cdot 10^{-6}$).

Die Scheiben schwingen so, dass sich entweder eine Anzahl gleiche Winkel einschliessender Durchmesser oder einige konzentrische Kreise oder beide zugleich als Knotenlinien ausbilden. Diesen „Klangfiguren" entsprechend erhält die Beizahl β folgende Werte:

Zahlentafel 1. Die Beizahl β.

Anzahl der Knotendurchmesser $k =$	0	1	2	3
Anzahl der Knotenkreise				
0	—	—	0,5114	1,1902
1	0,8840	1,998	3,432	5,153
2	3,751	5,830	—	—

Hierbei ist das Verhältnis der Knotenkreis-Halbmesser zum Halbmesser der Scheibe das folgende: