

Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen

Autor(en): **Meissner, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **61/62 (1913)**

Heft 16

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-30798>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

räumigkeit und vornehmer Einfachheit. Einzig die schönen Glasgemälde, die Leuchtkörper und die fein gearbeiteten Beichtstühle, sowie die steinerne Kanzel schmücken das Schiff. Der Taufstein war eine der letzten Arbeiten des kürzlich verstorbenen Bildhauers K. Leuch in Zürich. Die Altäre, die Tympanonreliefs der Portale, sowie die Nischenfiguren über den letztern wurden von den Bildhuern Payer & Wipplinger in Einsiedeln angefertigt.

Das Aeussere der massiv in warm gelblich leuchtendem Jurakalk erbauten Kirche ist in modern-romanischen Formen gehalten. Das Querschiff, so breit wie das Hauptschiff, liegt mit den Seitenschiffen und auf der Nordseite sogar mit dem Turm in einer Flucht, womit bezweckt war, dem Ganzen monumentale Ruhe zu verleihen. Die Vorhalle ist in die Hauptfassade mit drei grossen, reich skulptierten Arkaden hineingebaut; die Seitenportale am Querschiff sind der Fassade wenig vorgestellt und massiv mit Stein überdacht. Der Turm ist bis zur Kreuzspitze 70 m hoch.

Die Kirche fasst im Schiff 1054, in der Taufkapelle 18 und auf der Empore 56, im ganzen 1128 Sitzplätze. Der Vorschlag für den ganzen Neubau mit Umgebungsarbeiten, Glocken, Orgel, Innenausstattung, Architektenhonorar und Bauführungskosten aber ohne Gemälde und Statuen betrug 560 000 Fr. Die Ausführung blieb um 2500 Fr. darunter, obwohl eine Glocke mehr aufgehängt wurde und die prächtige Orgel mit 36 Registern von Kuhn in Männedorf grösser gewählt wurde, als vorgesehen war. Zu erwähnen ist noch das herrlich klingende Geläute von sechs Glocken von Glockengiesser Robert in Porrentruy. Die Warmluftheizung nach System Drevet & Lebigre, in einem eigenen Heizraum unter der Sakristei untergebracht, wurde von Balzardi & Cie. in Basel erstellt. Als Bauführer fungierte zur besten Zufriedenheit der Behörde und des Architekten Herr A. Metzler von Balgach.

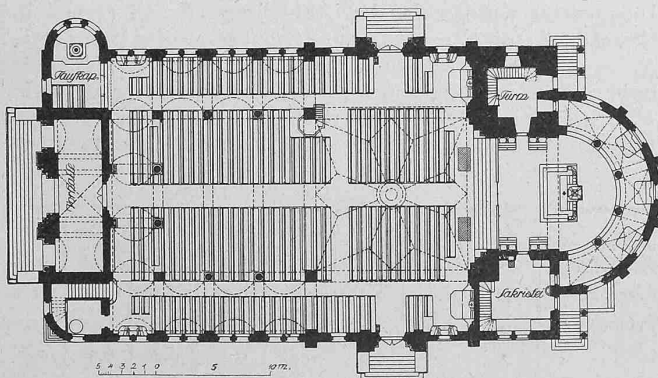


Abb. 1. Grundriss der kath. Kirche Romanshorn. — 1:600.

Die neue katholische Kirche Romanshorn beherrscht vermöge ihrer erhöhten prachtvollen Lage die ganze Gemeinde, den Hafen und den Bodensee weithin, vereint mit der neuen Schwesterkirche am gegenüberliegenden Ende des grossen Dorfes Zeugnis gebend von dem Opfermut und der Grosszügigkeit seiner Bewohner. G.

Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen.

Von Prof. Dr. Ernst Meissner, Zürich.

(Schluss von Seite 202.)

9. Gedämpfte harmonische Schwingung. (Abbildung 10, 11).

Hier soll einmal an einem rechnerisch kontrollierbaren Beispiel erprobt werden, welche Genauigkeit etwa erreichbar ist, wenn das Intervall, in dem die Funktion bestimmt werden soll, gross ist, und wenn die Funktion darin stark schwankt.

Es handelt sich um die Integration der Differential-Gleichung $q'' + \lambda q' + q = 0$ wo $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt wurde. Sie beschreibt bekanntlich einen Schwingungsvorgang, in dem eine Dämpfung proportional der Geschwindigkeit ein Erlöschen der Schwingungen bewirkt.

Damit keine Spitzen im Liniendiagramm auftreten, wurde q ersetzt durch die Funktion

$$p(u) = q(u) + 15 \text{ cm}$$

die der Differentialgleichung

$$p'' + \frac{1}{4} p' + p - 15 = 0 \tag{9}$$

genügt. Für den Krümmungsradius ihres Diagramms C hat man

$$\rho(u) = p + p'' = 15 - \frac{p'}{4} \tag{10}$$

Als Anfangsbedingungen wurden gewählt für

$$u = 0 \quad q_0 = 45 \text{ cm} \quad q'_0 = -15 \text{ cm} \\ \text{also } p_0 = 60 \text{ cm} \quad p'_0 = -15 \text{ cm} \tag{11}$$

und für den Differenzenwinkel α wurde 5° genommen. Für die konstruierte Funktion $q(u)$ ergibt die Rechnung

$$q(u) = A \cdot e^{-ru} \cos(su + \beta)$$

Hier sind $-r \pm is$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x^2 + \frac{x}{4} + 1 = 0$$

d. h. man hat $r = \frac{1}{8}, s = \frac{\sqrt{63}}{8}$,

und A und β sind Integrationskonstanten. Diese bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen (11). Man erhält

$$A = 45,98 \text{ cm} \quad \text{tg } \beta = \frac{5}{3\sqrt{63}} \quad \beta = 11^\circ 51' 31''$$

dementsprechend wird

$$p(u) = 15 + 45,98 e^{-\frac{u}{8}} \cos\left(\frac{\sqrt{63}}{8} u + \beta\right)$$

Das Liniendiagramm C von $p(u)$ besteht daher aus Schleifen, die sich mit wachsendem u mehr und mehr um den Kreis K vom Radius 15 cm legen, der O zum Mittelpunkte hat. In Abb. 10 (auf $\frac{1}{3}$ verkleinert) sind die ersten dieser Schleifen gezeichnet. Sie entsprechen den stärksten Schwankungen von $p(u)$. Der gestrichelt gezeichnete Teil des Diagrammes C macht auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch mehr, da dort mit $\alpha = 15^\circ$ konstruiert wurde.

Zur Kontrolle sind die Extrema von $p(u)$ bzw. $q(u)$ gemessen worden. Sie treten für u -Werte auf, die aus

$$\text{tg}(su + \beta) = -\frac{r}{s} = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

gefunden werden. Ist u_1 die kleinste positive Lösung dieser Gleichung, so sind alle folgenden Lösungen derselben in der Formel

$$u_k = u_1 + k \frac{\pi}{s}$$

enthalten. Man erhält durch Rechnung $\frac{\pi}{s} = 181,42^\circ$ und

$$u_1 = 162,23^\circ \quad u_2 = 343,65^\circ \quad u_3 = 525,07^\circ$$

Aus der Zeichnung der Abbildung 10 können diese Werte gefunden werden, indem man von O aus die Normalen an C , oder, was damit gleichbedeutend ist, die Tangenten an die Evolute C' zieht. Man erhält so die Linien OE_1, OE_2, OE_3, \dots die mit der Axe $u = 0$ die resp. Winkel u_1, u_2, u_3, \dots einschliessen. Die Zeichnung in Naturgrösse gab für:

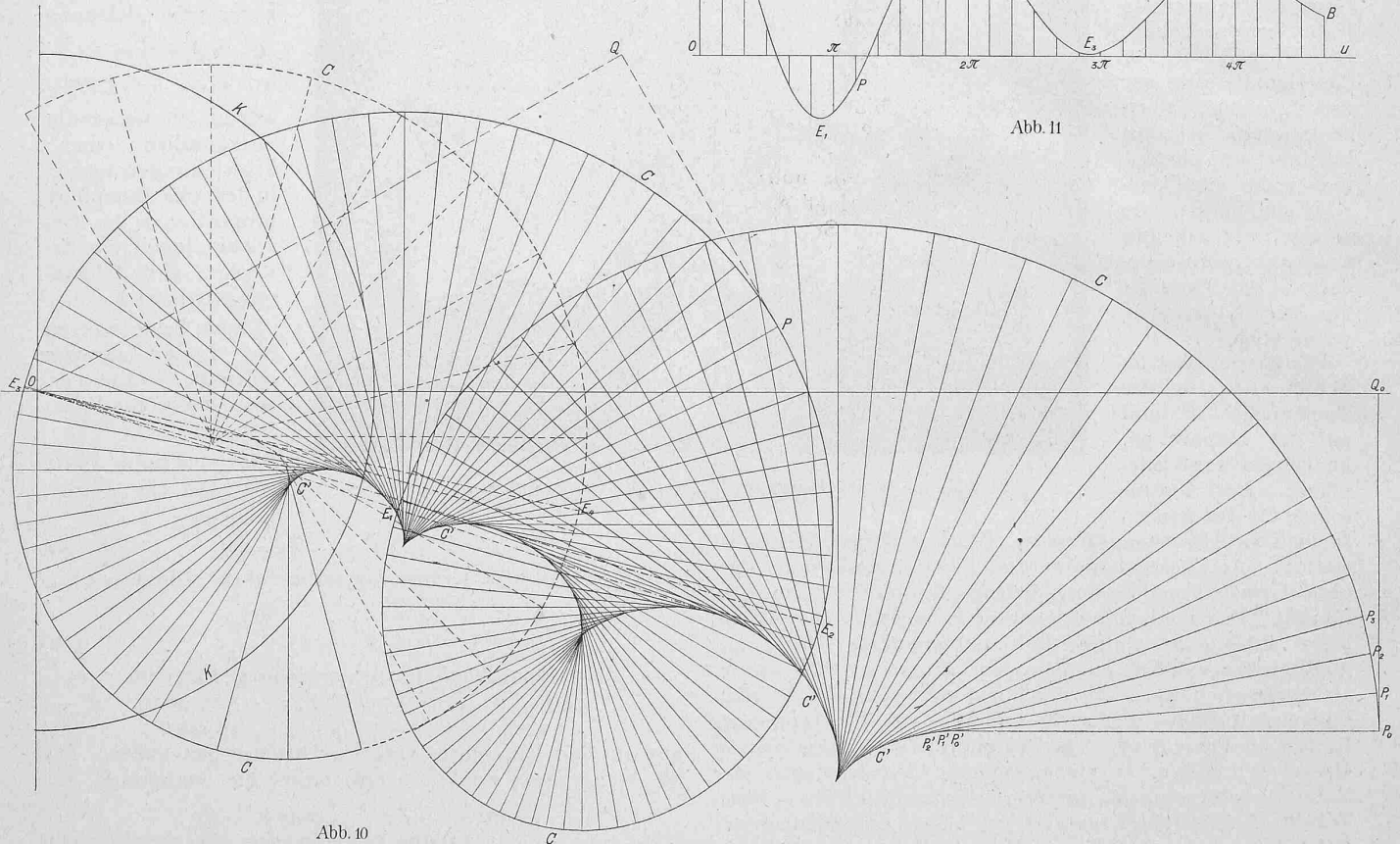


Abb. 10

Abb. 11

	$u_1 = 161,97^\circ$	$u_2 = 343,45^\circ$	$u_3 = 525,28^\circ$
Fehler	- 0,26°	- 0,20	+ 0,21°
in %	- 0,16	- 0,06	- 0,04

Man kann somit eine überraschend grosse Genauigkeit feststellen.

Für die Werte $p_1 = OE_1 = p(u_1)$ $p_2 = OE_2 = p(u_2)$ usw. ergibt sich folgende Zusammenstellung:

Gemessen in cm:	$p_1 = -16,87$	$p_2 = +36,48$	$p_3 = +0,70$	$p_4 = +24,75$
also	$q_1 = -31,87$	$q_2 = +21,48$	$q_3 = -14,30$	$q_4 = +9,75$
Berechnet:	$q_1 = -32,02$	$q_2 = +21,55$	$q_3 = -14,51$	$q_4 = +9,76$
Fehler in q:	+ 0,15	- 0,07	+ 0,21	- 0,01
in %:	0,5	- 0,3	1,5	- 0,1

Das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Werte

hat, genau genommen, den Wert $-e^{\frac{\pi}{63}} = -1,485$. Man findet aus der angeschriebenen Tabelle

$$\frac{q_1}{q_2} = -1,48 \quad \frac{q_2}{q_3} = -1,50 \quad \frac{q_3}{q_4} = -1,47 \quad \text{Mittel: } -1,484$$

Die Abweichung des Mittelwertes vom wahren ist also kleiner als 1/100. Wiederum zeugen diese Ergebnisse für die Brauchbarkeit der Methode. In Abbildung 11 ist noch das Punktdiagramm der ermittelten Funktion $p(u)$ dargestellt im Masstab 1: 1/6.

10. Graphische Quadratur.

(Abbildung 12).

Es soll graphisch das Integral ermittelt werden:

$$p(u) = A \int_0^u \text{tg } u \cdot du = -A \lg \cos u = A \lg \frac{1}{\cos u},$$

wo $A = 30 \text{ cm}$ gesetzt ist.

Man hat $p'(u) = A \text{tg } u$. $p'_0 = 0$.

Demgemäss wurden in der Abbildung 12 von O aus die Strecken $p'_0 = 0$ $p'_1 = A \text{tg } 7,5^\circ = OQ'_1$; $p'_2 = A \text{tg } 15^\circ = OQ'_2$; $p'_3 = A \text{tg } 22,5^\circ = OQ'_3$ usw. unter $0, 7\frac{1}{2}, 15, 22,5^\circ$ usw. zur y -Axe aufgetragen, und die zugehörigen Punkte P_1, P_2, P_3 usw. der Reihe nach von P_0 aus konstruiert. Folgende Tabelle gibt über die erhaltenen Resultate Auskunft: ($p_i = P_i Q'_i$).

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
Gemessen in cm	0,24	1,04	2,39	4,32	6,95	10,43	14,96	20,89
Berechnet	0,258	1,040	2,375	4,315	6,944	10,397	14,890	20,795
Fehler	- 0,02	0,0	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,07	+ 0,09
in %	8	0	0,4	0,2	0,2	0,3	0,5	0,5

Trotz der Kürze und Einfachheit der Konstruktion ist die erreichte Genauigkeit derart, dass das Quadraturverfahren den Vergleich mit andern wohl aushalten dürfte. Dies umso mehr, als damit nicht etwa nur der Wert eines bestimmten Integrals, sondern die Integralfunktion $A \lg \frac{1}{\cos u}$ überhaupt für jedes u zwischen 0° und 60° ermittelt worden ist.

11. Erzwungene Schwingungen.

(Abbildungen 13, 14).

In diesem Beispiel wird die graphische Methode angewendet auf einen Fall, der rechnerisch nicht mehr kontrollierbar ist. Es sei ein mechanisches System gegeben, das harmonische Schwingungen ausführen kann, und dem Einfluss einer periodisch störenden Kraft unterliegt, die im übrigen einem ganz willkürlichen Gesetz unterliegt. Die Differentialgleichung, die die eintretende Bewegung beschreibt, kann dann auf die Form gebracht werden 1):

$$p'' = -p + f(u)$$

wo $f(u)$ wesentlich das Gesetz der störenden Kraft darstellt. Es handelt sich daher um die Ermittlung des Liniendiagramms C von $p(u)$, dessen Krümmungsradius ρ gegeben ist durch

$$\rho(u) = p + p'' = f(u).$$

Abbildungen 13 und 14 zeigen die Konstruktion. Abbildung 13 enthält in rechtwinkligen Koordinaten das Diagramm $ABDSE$ der willkürlich gegebenen Funktion $f(u)$. Es ist angenommen worden, die Störung setze in $u = 0$ plötzlich ein, und höre in $u = \pi$ ebenso plötzlich wieder auf. Demgemäss sind die Ordinaten $f(0)$ und $f(\pi)$ von null verschieden. Vor und nach der Störung schwingt p nach einem Sinusgesetz harmonisch. Zu Beginn der Störung sei

$$p = p_0 = OP_0 \quad p' = 0$$

Abbildung 14 enthält die hier sehr einfache Konstruktion des Liniendiagramms C . In Abbildung 13 ist nachträglich rückwärts das gewöhnliche Punktdiagramm der Funktion $p(u)$ in der Kurve $P_0W_1KNW_2M$ eingezeichnet worden. α ist gleich 15° gewählt. Die Krümmungsradien von C können jeweilen direkt im Schaubild von $f(u)$ (Abb. 13) abgegriffen werden. Die Kurve C hat der Nullstelle von $f(u)$ entsprechend eine Spitze S . Es gibt eine Normale OK an C (Tangente an C') von O aus; ihr entspricht das Maximum K (Abb. 13) von $p(u)$. Ferner geht eine (strichpunktierte) Tangente ON von O an C ; sie liefert die Nullstelle N (Abb. 13) von $p(u)$. Endlich können von O aus zwei (punktierte) Normalen an C' gezogen werden; damit übereinstimmend hat das Punktdiagramm der Abb. 13 in W_1 und W_2 Wendepunkte.

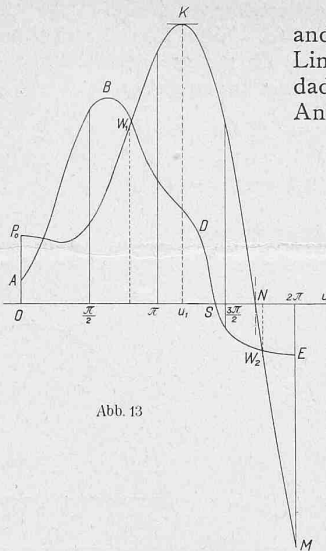


Abb. 13

Zu bemerken bleibt noch, dass das zu andern Anfangsbedingungen gehörige Liniendiagramm in diesem Beispiel einfach dadurch gefunden wird, dass man den Anfangspunkt O passend verlegt.

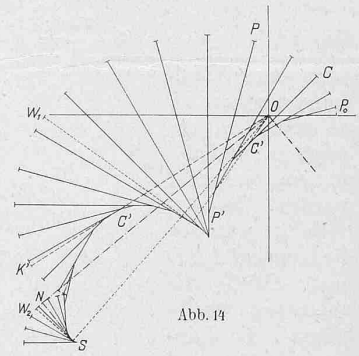


Abb. 14

12. Bahnkurve des sphärischen Pendels.

(Abbildung 15 bis 18).

Wenn ein gewöhnliches Fadenpendel von der Länge l unter allgemeinen Anfangsbedingungen in Schwingungen versetzt wird, so beschreibt sein Endpunkt m eine Bahnkurve, die auf einer Kugel gelegen ist. Bedeutet δ die vom tiefsten Punkt dieser Kugel aus gemessene geogr. Breite, φ die von einem beliebigen Anfangsmeridian aus gerechnete Länge, t die Zeit, so liefert für die Bewegung des Pendels der Flächensatz die Gleichung

$$\sin^2 \delta \cdot \frac{d\varphi}{dt} = c \quad (1)$$

und der Energiesatz gibt

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \delta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \lambda \cos \delta = k \quad (2)$$

Hier ist $\lambda = \frac{2g}{l}$ und die Integrationskonstanten c und k hängen von den Anfangsbedingungen ab.

$$\text{Man setze} \quad \cos \delta = z \quad (3)$$

$$\text{Dann folgt} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z) = (1-z^2)(k + \lambda z) - c^2 \quad (4)$$

als Differentialgleichung für die Funktion $z(t)$. Die Gleichung der Bahnkurve ist eine Beziehung zwischen z und φ . Für sie erhält man aus (4) und (1) wegen (3)

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = (1-z^2) \sqrt{\frac{f(z)}{c^2}} \quad (5)$$

Diese Differentialgleichung ist graphisch zu integrieren. Wir nehmen die Anfangsbedingungen so, dass

$$c = k = \frac{\lambda}{10} = \frac{g}{5l}$$

ist. Es wird dann

$$f(z) = \lambda z \left(1 - \frac{z}{10} - z^2 \right)$$

und diese Funktion verschwindet für

$$z = 0 \quad z = z_1 = 0,9513 \quad z = z_2 = -1,0513$$

Daraus folgt, dass die Bahnkurve zwischen den Breitenkreisen $z = 0$ und $z = z_1$ hin und her läuft. Wir können den Anfangsmeridian so legen, dass für $\varphi = 0$ $z = 0$ wird, und haben unter dieser Voraussetzung Gleichung (5) zu lösen, die übergeht in

$$\frac{dz}{d\varphi} = (1-z^2) \sqrt{z(10-z-10z^2)} \quad (5')$$

woraus
$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right) \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dz} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \right] =$$

$$(1-z^2) [5(1-z^2)(1-7z^2) + z(3z^2-1)] \quad (6)$$

Im Intervall von $z = 0$ bis $z = z_1$ schwankt der Ausdruck auf der rechten Seite sehr stark, und damit auch die Krümmung des Liniendiagramms von $z(\varphi)$. Es ist daher einige Genauigkeit nur zu erzielen, wenn man den Masstab gross, und die Winkeldifferenz α klein nimmt. Beides ist

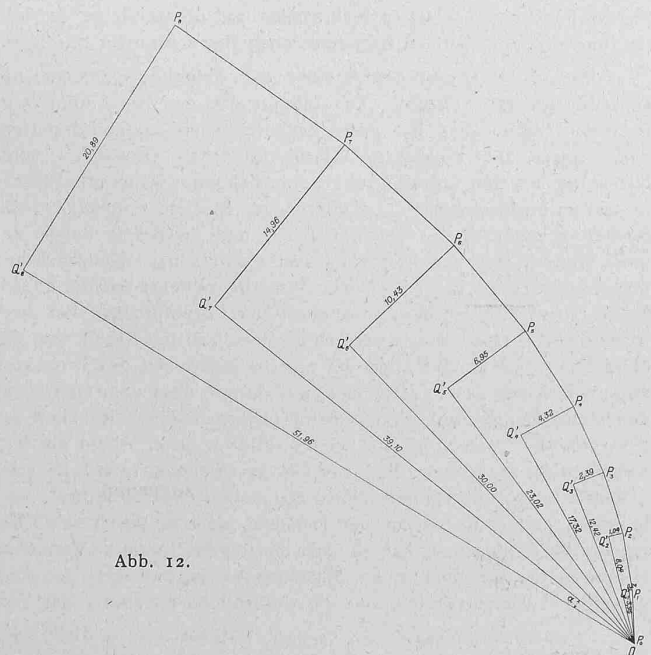


Abb. 12.

¹⁾ Dieselbe Differentialgleichung tritt auch auf bei der Bestimmung der Form eines ursprünglich kreisförmig gebogenen Stabes unter dem Einfluss gegebener Kräfte.

unbequem, weshalb hier zu dem früher erwähnten Mittel der Argumenttransformation gegriffen wird. Wir führen demnach die neue Veränderliche $u = 3 \varphi$ ein; $z(\varphi)$ geht über in eine Funktion $p(u)$, für die die Gleichungen gelten:

$$\frac{dp}{du} = \frac{1-p^2}{3} \sqrt{p(10-p-10p^2)} = F_1(p)$$

$$\frac{d^2 p}{du^2} = \frac{1-p^2}{g} [5(1-p^2)(1-7p^2) + p(3p^2-1)] = F_2(p)$$

also auch $q = p + \frac{d^2 p}{du^2} = p + F_2(p) = F_3(p)$.

In den Abbildungen 15 bis 18 ist die Längeneinheit gleich 20 cm gemacht worden. In Abbildung 15 stellen die Kurven ABD und EFG die oben angeschriebenen Funktionen $F_1(p)$ und $F_3(p)$ dar. Abbildung 16 zeigt die Konstruktion des Liniendiagrammes C von $p(u)$. Die Anfangswerte sind $p_0 = 0$ $p'_0 = 0$ und es fällt daher P_0 nach O . Der Abstand p' der Normalen von O kann für jeden Punkt P , dessen p gefunden worden ist, aus der Abbildung 15 jeweils entnommen werden; ebenso der Krümmungshalbmesser ρ . Eine Interpolation ist unnötig, da ausserdem a klein, nämlich gleich 5° gewählt wurde. Aus der gefundenen Funktion $p(u)$ bzw. $z(\varphi)$ ist endlich in Abbildung 17 und 18 auf eine leicht erkennbare Weise Aufriss und Grundriss der Bahnkurve des Pendels gezeichnet worden. Der Masstab dieser zwei Figuren wurde auf die Hälfte verkleinert. Sie zeigen die aus der Literatur bekannte Form der Bahnkurve. (Vergl. etwa Enzykl. der math. Wissenschaften Bd. IV 1. (6) P. Stäckel. Pg. 505.)

Zum Schluss möge noch eine Andeutung über die Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung gemacht werden. Auch auf sie ist unsere Methode anwendbar. Ein Beispiel einer solchen hat geradezu die Veranlassung zur Entwicklung dieses Verfahrens gegeben. Es handelte sich dort um die Ermittlung der Spannungen in Kugelschalen, also um ein Problem, das in dieser Zeitschrift jüngst behandelt wurde¹⁾. Ich habe gezeigt²⁾, dass man es auf die Lösung von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen kann, die die Form besitzen:

$$p_1 = f_1(p_2, p_2', p_2'')$$

$$p_2 = f_2(p_1, p_1', p_1'')$$

Sie sind einer Differentialgleichung vierter Ordnung gleichwertig. Nennt man ρ_1, ρ_2 die Krümmungshalbmesser der Liniendiagramme C_1, C_2 von $p_1(u)$ bzw. $p_2(u)$, so folgen hieraus Ausdrücke von der Form:

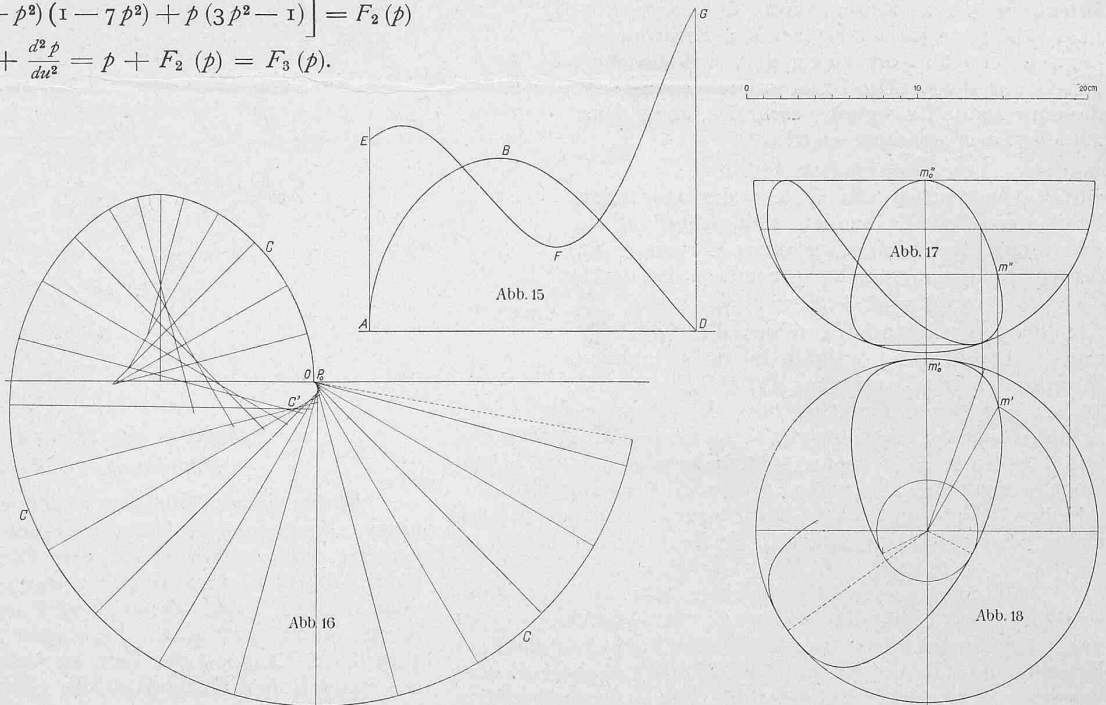
$$\rho_1 = F_1(p_1, p_1', p_2)$$

$$\rho_2 = F_2(p_2, p_2', p_1)$$

und es ist wohl sofort verständlich, wie durch diese Gleichungen die graphische Konstruktion der zwei Kurven C_1, C_2 nun gleichzeitig und schrittweise vollzogen werden kann.

Aehnlich lässt sich bei Differentialgleichungen höherer Ordnung allgemein vorgehen, indem man sie durch simultane Systeme niederer Ordnung ersetzt.

Zürich, 15. August 1913.



Rudolf Diesel.

Die kurz vor dem rätselhaften Verschwinden des vielgefochtenen Erfinders erschienene Schrift „Die Entstehung des Dieselmotors“ von Rudolf Diesel, Dr.-Ing. h. c.¹⁾ würde, auch abgesehen von diesen tragischen Begleitumständen, das Interesse jedes Maschineningenieurs in höchstem Masse fesseln. Der Werdegang eines der wichtigsten Wärmemotoren wird hier vom ersten Aufdämmern des Erfindungsgedankens durch die tastenden Anfänge, Scheinerfolge, Fehlgriffe, Entmutigungen hindurch bis zum zähe, nach langjähriger Arbeit errungenem Siege vom handelnden Ingenieur selbst in meisterhafter Weise geschildert. Und ist die Schrift, wie wir das von Diesel nicht anders erwarten konnten, Geschichtsdokument und Kampfmittel zugleich, so werden wir ihm nicht minder dankbar sein müssen für die Fülle von Tatsachen technischer und menschlicher Art, die für Jung und Alt Stoff zu nachdenklichen Betrachtungen darbieten.

Schon wie Diesel den Anstoss zum Erfindungsgedanken beschreibt, ist sehr reizvoll. Er stammt aus der Bemerkung von Professor Linde, dass bei einer isothermischen Zustandsänderung eines Gases alle zugeführte Wärme in Arbeit verwandelt wird. Daher die aus den Tagesblättern schon bekannte Randnotiz Diesels in seinem Vorlesungsheft: „Studieren, ob es nicht möglich ist, die Isotherme praktisch zu verwirklichen“, und im Buche heisst es: „Der Wunsch der Verwirklichung des Carnotschen Idealprozesses beherrschte fortan mein Dasein“. Wir, die es heute leichter haben, besser zu wissen, würden einwenden: Der Carnotprozess hat zwei Isothermen, und die zweite vernichtet einen Teil der Arbeit, den die erste liefert; es kommt nicht auf die besondere Art des Prozesses an, sondern auf das Endergebnis; nur darauf, dass vom Gewinn in den obern Temperaturregionen beim unvermeidlichen Rücklauf auf dem tiefern Niveau möglichst wenig verloren gehe. Allein die teilweise schiefe Auffassung, die in der 1893 erschienenen Schrift Diesels: „Theorie und Konstruktion eines rationellen Wärmemotors“, vorherrscht, ändert nichts an der Tatsache, dass er durch seine Begeisterung Veranlassung gab zu einer der folgenschwersten Versuchsreihen in der Geschichte des Maschinenbaues, und dass der Ausgangspunkt seines Verfahrens: die wesentliche Erhöhung der Ver-

¹⁾ Von Dr.-Ing. Huldreich Keller in Bd. LXI, S. 111 u. ff.
²⁾ Physikalische Zeitschrift, Bd. 14. 1913. S. 343—349.

¹⁾ Berlin 1913, Verlag von Jul. Springer. Preis geh. 5 M., geb. 6 M. (siehe Band LXII, Seite 212).