

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 53/54 (1909)
Heft: 19

Artikel: Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Tätigkeitsmoment
Autor: Ritter, Max
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28143>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Hebelarm somit Null ist. Wird ausserdem der Rahmen *ABCD* so gross ausgeführt, dass das Stück *CD* so weit vom Feld kommt, um von diesem nicht mehr beeinflusst zu werden, dann wird einzig die auf das Element *AB* ausgeübte Kraft *K* ein nützlich Drehmoment *Kl* erzeugen, wobei *l* den mittlern Radius der beiden Kreisbogen bedeutet. Durch Zusetzen oder Wegnehmen von Gewichten *G* auf der am andern Ende des Wagbalkens hängenden Schale kann das Gleichgewicht wieder hergestellt werden. Ist der Hebelarm, an dessen Ende diese Gewichte wirken, gleich *l*, so werden sie direkt die Kraft *K* angeben, die wie folgt ausgedrückt werden kann:

Sei *H* (c.g.s.) die Feldstärke, *s* die Länge des Elementes *AB*, *i* die Stromstärke des durch *AB* gehenden Stromes in Ampères; es ist dann $K = \frac{H \cdot s \cdot i}{10 \cdot g}$ wobei *g* (in c.g.s.) die Erdbeschleunigung am Versuchsorte bedeutet.

Die Feldstärke wird aus folgender Formel bestimmt werden können: $H = \frac{10 \cdot g \cdot G}{s \cdot i}$.

Die Wage kann auf zwei verschiedene Weisen benutzt werden, je nachdem die eine oder die andere der beiden Grössen *G* und *i* als konstant angenommen wird. Es ist jedenfalls bedeutend einfacher von vornherein ein konstantes Gewicht *G* auf die Schale zu legen und den Strom *i* mittelst eines Regulierwiderstandes zu regulieren, als mit einem konstanten Strom zu operieren und solange Gewichte zuzulegen oder wegzunehmen, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist.

Die mittelst der Wage von Cotton zu messenden magnetischen Felder müssen eine Dicke von mindestens 2 cm haben, eine Bedingung, die sehr oft mit einer genügenden Genauigkeit erfüllt ist. Sollen Felder sehr grosser Intensität in Zwischenräumen von nur wenigen Millimetern gemessen werden, so besteht die praktischste Methode darin, mit der elektromagnetischen Wage von Cotton ein Vergleichsfeld von 10000 bis 20000 Gauss zu messen, was sehr genau erfolgen kann. Man vergleicht es sodann mit dem zu messenden Felde mittelst eines ballistischen Galvanometers unter Verwendung einer gleichen Induktionsspule von 2 bis 3 mm Durchmesser. Man vermeidet auf diese Art die direkte Messung des Wirkungskreises dieser kleinen Spule, was andernfalls nötig wäre.

Im Gegensatz zu der heute zur Messung von magnetischen Feldern noch häufig gebrauchten Wismut-Spirale hat die elektromagnetische Wage von Cotton den grossen Vorteil, dass sie auch bei Gebrauch durch völlig unerfahrene Hände eine Genauigkeit von 1/2 % ergibt. Die Wismut-Spirale hingegen hat, infolge des sehr hohen Temperaturkoeffizienten dieses Metalls von 1 % auf 1 °C, schon zu ganz erheblichen Fehlern Anlass gegeben.

Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment.

Von Dipl.-Ing. Max Ritter.

(Schluss.)

Die für die Praxis wichtigste Anwendung der Theorie des elastisch eingespannten Stabes bezieht sich auf den kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren, starren Stützen. Wird irgend ein Balkenfeld belastet, so bestimmt sich die Schlusslinie der Momentenfläche dieser Oeffnung mit Hilfe der aus Abbildung 4 (S. 234) ersichtlichen Konstruktion, und zwar, wie gezeigt, auch bei veränderlichem Trägheitsmoment; für alle Felder links davon tritt Gl. (4 a), für alle Felder rechts davon Gl. (4 b) in Kraft. Man erkennt in einfachster Weise den altbekannten Satz, dass das Biegemoment in allen *J*-Punkten links der belasteten Oeffnung und in allen *K*-Punkten rechts der belasteten Oeffnung gleich Null ist.

Wir nehmen wieder an, das Trägheitsmoment jeder Oeffnung variere nach dem allgemeinen Gesetze (8), so zwar, dass der Koeffizient *r* für alle Felder denselben Wert habe, wogegen *n* und *J_m* für jedes Feld verschieden seien. Um die Lage der Fixpunkte zu bestimmen, betrachten wir zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen *l* und *l'* (Abb. 5).

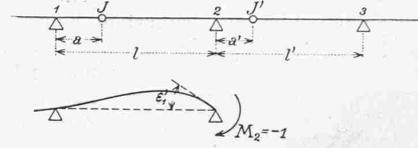


Abbildung 5.

Für den Fixpunkt *J'* in der Oeffnung *l'* liefert Gl. (14)

$$a' = \frac{3n' + r(r+4)}{3(r+3)} \left[n' + r + 2r + 1 \right] \varepsilon'_1 \frac{EJ'_m}{l'} \cdot l';$$

hierin ist ε'_1 der Winkel, der an der Stütze 2 nach Wegnahme des Balkenstückes *l'* infolge $M = -1$ entsteht. Man findet ihn leicht aus Gl. (1 b), indem man dort $\beta_0 = 0$, $M_2 = -1$ und darnach $M_1 = \frac{a}{l-a}$ setzt. Das gibt zunächst

$$\varepsilon'_1 = -\beta = -\beta_1 \frac{a}{l-a} + \beta_2$$

und mit Berücksichtigung der Gl. (9)

$$\varepsilon'_1 = \frac{l}{6(r+1)(r+3)EJ'_m} \left[3n(r+2) + r(2r+5) - \frac{3n+r(r+4)}{l-a} \cdot a \right].$$

Setzt man den Wert für ε'_1 oben ein, so ergibt sich

$$a' = \frac{l'}{c_1 + c_2 \mu - c_3 \mu \frac{a}{l-a}},$$

worin

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{3(n'+r)(r+3)}{3n'+r(r+4)}, & c_2 &= \frac{3n(r+2) + r(2r+5)}{3n'+r(r+4)}, \\ c_3 &= \frac{3n+r(r+4)}{3n'+r(r+4)}, & \mu &= \frac{lJ'_m}{l'J_m}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, die einfacher ist, als sie aussieht, lässt sich die Lage jedes Fixpunktes *J'* aus der des benachbarten linken *J* berechnen. Man beginnt am linken Trägerende. Ist dieses frei drehbar, so wird für die erste Oeffnung $a = 0$; ist es vollkommen eingespannt ($\varepsilon_1 = 0$), so wird nach Gl. (14) für die erste Oeffnung

$$a = \frac{3n+r(r+4)}{3(n+r)(r+3)} l. \quad (16)$$

Sind elastisch drehbare Endstützen vorhanden, so braucht man nur ε_1 zu ermitteln und Gl. (14) anzuwenden. Gl. (15) lässt sich übrigens mit Leichtigkeit derart erweitern, dass sie auch für kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Zwischenstützen anwendbar ist. Wir verzichten des Raumes wegen, näher darauf einzugehen.

Ganz ebenso wie die Punkte *J* werden die Fixpunkte *K* ermittelt; man ersetzt in Gl. (15) *a* durch *b* und beginnt am rechten Trägerende.

In den meisten Fällen wird man mit $n = n'$ rechnen. Auch ist es sehr oft gestattet, $r = 2$ zu setzen, was weiter unten noch näher begründet wird. Die Konstanten in Gl. (15) lauten dann:

$$c_1 = \frac{5(n+2)}{n+4}, \quad c_2 = \frac{2(2n+3)}{n+4}, \quad c_3 = 1, \quad \mu = \frac{l}{l'}.$$

Es erübrigt noch, Charakter und Anwendbarkeit des Gesetzes (8), das wir der Querschnittänderung zu Grunde legten, näher zu erörtern. Dieses Gesetz ist insofern ganz allgemeiner Natur, als die Koeffizienten *n* und *r* beliebig gewählt und den jeweiligen Verhältnissen angepasst werden können. Um die Abhängigkeit der Schnittmomente von *n* und *r* klarzulegen, betrachten wir im folgenden zwei einfache Beispiele.

Als *erstes Beispiel* diene der in Abb. 6 skizzierte, an beiden Enden vollständig eingespannte Balken mit gewölbter Untersicht, der die gleichmässig verteilte Belastung p pro Längeneinheit tragen möge. Die Schlusslinie der Momentenfläche ist horizontal; das Stützenmoment ergibt sich daher nach Gl. (11) zu

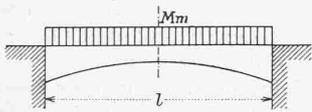


Abb. 6.

$$M_a = -\frac{p a l}{4},$$

und das Moment in Balkenmitte zu

$$M_m = \frac{p l^2}{8} - \frac{p a l}{4} = \frac{p l^2}{8} \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right).$$

Setzen wir für a den Ausdruck (16) ein, so erhalten wir

$$M_m = \frac{(3n+r)(r+1)}{(n+r)(r+3)} \cdot \frac{p l^2}{24},$$

und hiernach die folgende Tabelle.

$n =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
$M_m = \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ r = 2 \\ r = 3 \end{array} \right\} \cdot p l^2$	0,0417	0,0347	0,0278	0,0255	0,0240
	0,0417	0,0350	0,0295	0,0279	0,0270
	0,0417	0,0357	0,0312	0,0300	0,0293

Die Tabelle lehrt, dass bei eingespannten Balken mit gegen die Auflager zunehmendem Trägheitsmoment die Momente in Balkenmitte stets kleiner ausfallen, als im Falle konstanten Querschnitts, was übrigens von vorneherein zu erwarten war. Der Unterschied kann ziemlich beträchtlich werden. Ist z. B. $n = \frac{1}{8}$, $r = 2$, so ergibt sich

$M_m = 0,0279 p l^2 = \frac{p l^2}{35,8}$, also ein um volle 33 % kleineres Moment, als die Näherungsmethode mit $n = 1$ geliefert hätte. Dafür steigt allerdings das Stützenmoment, und zwar von

$M_a = -\frac{p l^2}{12}$ auf $M_a = -\frac{p l^2}{10,3}$, d. h. um 16,6 %. Das

Gesetz, das der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes zugrunde liegt, spielt jedoch eine ziemlich nebensächliche Rolle. Sobald $n < \frac{1}{5}$ ist, kommt es auf dessen genauen Wert gar nicht mehr an, und auch die Grösse des Koeffizienten r ist nur von geringer Bedeutung. Diese Erkenntnis ist besonders wertvoll zur Berechnung kontinuierlicher und eingespannter Träger in Eisenbeton. Obgleich die Trägheitsmomente von Eisenbetonquerschnitten nicht genau ermittelt werden können, weil man über die Mitwirkung der Zugzone im unklaren ist, lässt sich die Berechnung der Schnittmomente unter Berücksichtigung des veränderlichen Querschnitts trotzdem durchführen, sofern nur $n < \frac{1}{5}$ ausser Zweifel steht. Man setzt dann einfach $n = \frac{1}{5}$ und $r = 2$, ohne lange zu untersuchen, ob diese Werte nun genau zutreffen; der entstehende Fehler kann, wie die Tabelle zeigt, nur unbedeutend sein.

Als *zweites Beispiel* möge in Kürze das Mittelfeld eines kontinuierlichen Balkens auf sehr vielen, gleich weit entfernten Stützen betrachtet werden (Abb. 7). Die Grössen

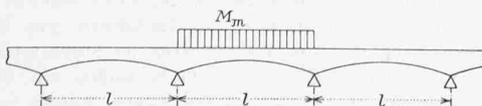


Abbildung 7.

J_m , n und r seien für jede Öffnung konstant. Dann wird auch die Entfernung $a = b$ der Festpunkte von den Auflagern konstant; um sie zu berechnen, braucht man nur in Gl. (15) $a' = a$ zu setzen und nach a aufzulösen. Mit Beachtung, dass jetzt $c_3 = \mu = 1$ und $c_1 = 1 + c_2$ ist, findet man leicht

$$a = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{c_1}} \right) \frac{l}{2}.$$

Die Mittelöffnung trage die gleichmässig verteilte Belastung p pro Längeneinheit, wogegen alle andern Öffnungen von Lasten frei seien. Dann ist das Moment in Balkenmitte wie im ersten Beispiel

$$M_m = \frac{p l^2}{8} \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right);$$

wird für a der obenstehende Wert eingesetzt, so folgt die Gleichung

$$M_m = \frac{p l^2}{8} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{c_1}},$$

die der folgenden Tabelle zugrunde liegt.

$n =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
$M_m = \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ r = 2 \\ r = 3 \end{array} \right\} \cdot p l^2$	0,0722	0,0659	0,0589	0,0564	0,0548
	0,0722	0,0662	0,0608	0,0591	0,0581
	0,0722	0,0668	0,0625	0,0612	0,0605

Wie man sieht, gelten dieselben Eigentümlichkeiten, die wir oben für den vollständig eingespannten Träger fanden, auch für den kontinuierlichen Balken mit partieller Belastung. Der Einfluss der Querschnittsänderung ist hier etwas geringer; z. B. wird für $n = \frac{1}{8}$ und $r = 2$

$M_m = 0,0591 p l^2$, d. h. um 18,2 % kleiner als für $n = 1$.

Eingespannte und kontinuierliche Balken kommen namentlich im Eisenbetonbau überaus häufig zur Anwendung. Als vollständig eingespannt dürfen beispielsweise die Wandungen quadratischer Silozellen und Wasserbehälter berechnet werden, ebenso die Mittelfelder kontinuierlicher Balken mit vielen, gleich grossen Öffnungen für die Untersuchung der Momente vom Eigengewicht. ¹⁾ Kontinuierliche Träger mit Vouten gehören zu den beliebtesten Konstruktionen des Eisenbetonbaues. Es kann nur empfohlen werden, diese Vouten recht kräftig auszubilden und dafür, den Ergebnissen der Theorie entsprechend, die Trägermitte etwas schwächer zu halten.

Auch im Eisenbau sind kontinuierliche Träger mit gewölbter Untersicht mehrfach ausgeführt; hier wiegen allerdings die erhöhten Herstellungskosten den geringern Materialaufwand auf. Beispiele: Quaibrücke in Zürich, Brücke über die Reuss in Luzern u. a.

Auf die Frage, ob die Berechnung elastisch eingespannter Träger in Eisenbeton nach der Elastizitätstheorie überhaupt berechtigt erscheint, soll hier nicht eingetreten werden. Verfasser möchte nur sagen: Wenn die Berechnung von Balken *ohne* Vouten unter Annahme eines konstanten Querschnittes gestattet ist, dann dürfen konsequenterweise Balken *mit* Vouten auf Grund der vorausgegangenen Theorie dimensioniert werden. Dieser Schluss steht in Einklang mit einer Reihe günstiger Erfahrungen an eingeführten Objekten dieser Art, sowie auch mit den Versuchen an kontinuierlichen Plattenbalken, die Prof. E. Mörsch in seinem Buche „Der Eisenbetonbau“ (3. Aufl., Seite 210 ff.) veröffentlicht hat.

Man darf nicht vergessen, dass Träger mit gewölbter Untersicht eigentlich eine gekrümmte Axe besitzen; an den Auflagern tritt in den meisten Fällen ein Horizontalschub auf, der sich der Berechnung entzieht, der aber das Moment in Balkenmitte weiter in günstigem Sinne beeinflusst.

Zürich und Berlin, im Dezember 1908.

Miscellanea.

Die Wüschelrutenfrage, die bekanntlich immer noch offen ist, erfährt einen interessanten Beitrag durch G. Frantsius, der im «Z. d. B.» über den Erfolg berichtet, den die Reise des bekannten Rutengängers, Landrat v. Uslar, nach Deutsch-Südwestafrika gehabt hat. Uslar hat dort mit Hilfe der Rute 300 Stellen bezeichnet, an denen Wasser zu finden sei. Bis jetzt hat man an 163 dieser Stellen gebohrt und dabei an 129 der Bohrstellen

¹⁾ Nach den schweizerischen Normen muss indessen das Moment in Balkenmitte unter Berücksichtigung von $\frac{2}{8}$ des Auflagermomentes berechnet werden.