

Ueber Kräftezerlegung

Autor(en): **Kiefer, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **43/44 (1904)**

Heft 21

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die theoretische Untersuchung der Knickungsvorgänge eines auf Biegung beanspruchten, gleichmässig belasteten, freiliegenden, seitlich nicht gestützten Trägers ist eine sehr schwierige und soll hier nicht näher behandelt werden. Es sei nur darauf hingewiesen, dass bei einem solchen Träger folgende Ursachen zu berücksichtigen sind:

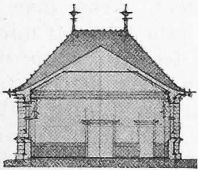
1. die von den Enden gegen Trägermitte nach parabolischem Gesetze zunehmende Druckkraft in der einen Gurtung, die zuletzt das Ausknicken verursachen wird;
2. die Quersteifigkeit des ganzen Balkens, d. h. sowohl der auf Zug wie der auf Druck beanspruchten Hälfte des Querschnittes;
3. die in der Zuggurtung wirkende Kraft, die für jeden Querschnitt gleich und entgegengesetzt der Kraft in der Druckgurtung ist.

Das Problem hat grosse Aehnlichkeit mit demjenigen des Ausknickens ausserhalb der Trägerebene von sich kreuzenden Fachwerkstreben, ein Problem, das theoretisch 1894 in den „Annales des Ponts et Chaussées“ von Jasinsky gelöst wurde. Die Lösung wird auch in unserm Fall eine ähnliche sein und es wird die Knickkraft in der Druckgurtung aus einer Summe der folgenden zwei Kräfte bestehen:

1. die Knickkraft eines nur auf Druck beanspruchten Stabes mit einem Querschnitt gleich dem Gesamtbalken-Querschnitt;
2. die in der Zuggurtung wirkende Kraft.



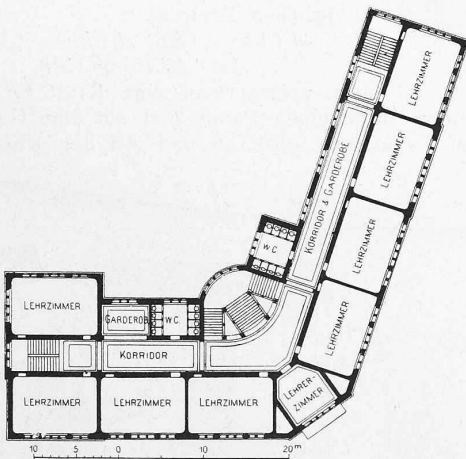
Ansicht der Turnhalle. — Masstab 1 : 600.



Schnitt der Turnhalle.

Nur innerhalb der Elastizitätsgrenze des Materiales und bei genügend starkem Stege wäre ein solcher Schluss richtig; dies würde zum Ergebnisse führen, dass bei den gewöhnlichen Verhältnissen von Trägerhöhe zur Stützweite ein seitliches Ausknicken infolge der Belastung in der Symmetrie-Ebene des Trägers theoretisch nicht eintritt; diese Ableitung ist jedoch für solche Fälle der Anwendung ebenso wenig in der Lage, die Knickbelastung des Balkens anzugeben, wie die Formel von Jasinsky die effektive Tragkraft für eine auf Druck beanspruchte Strebe eines

mehrteiligen Fachwerkträgers angeben kann. Die Beschaffenheit des Materiales wird bei diesen Untersuchungen unberücksichtigt gelassen, obwohl dieselbe die Hauptrolle bei solchen Knickvorgängen spielt. Nur Versuche können aber die Fragen der Beschaffenheit des Materiales beantworten. (Schluss folgt.)



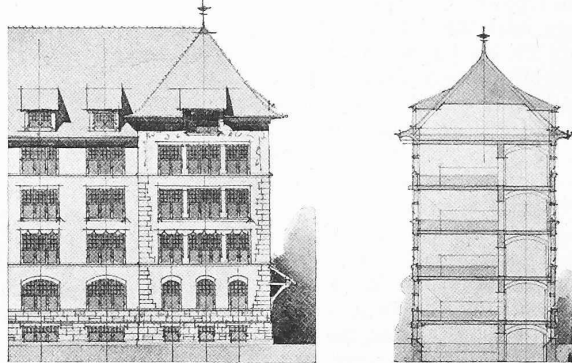
Grundriss vom I., II. und III. Stockwerk. — 1 : 800.

Wettbewerb für ein Mädchen-Primarschul-Gebäude in St. Gallen.

II.

Unter Hinweis auf das in Nr. 19 veröffentlichte preisgerichtliche Gutachten mit Darstellungen der beiden II. Preise geben wir nachstehend noch den mit einem III. Preis aus-

III. Preis. — Motto: Epheu (gez.). — Verf.: Arch. *Ubaldo Grassi*.



Teil der Hoffassade. — 1 : 600. — Querschnitt.

gezeichneten Entwurf Nr. 95 mit dem Merkzeichen Epheu (gez.) von Architekt *Ubaldo Grassi* in Neuenburg, sowie das Projekt Nr. 105 mit dem Merkzeichen: Winkel, Zirkel und Stern (gez.) von Architekt *Hermann Weideli* aus Oberhofen (Thurgau) z. Z. in Mannheim, das mit einem IV. Preis bedacht worden ist.

Ueber Kräftezerlegung.

Von *A. Kiefer* in Zürich.

1. Eine häufig vorkommende Aufgabe besteht darin, dass in der Ebene eine Kraft EF in zwei Komponenten zu zerlegen ist, von denen die eine auf eine gegebene Gerade g fällt und die andere durch einen gegebenen Punkt C geht. (Abb. 1).

Zieht man FB parallel CE und dann EA parallel CB , so ist AB die Komponente, die auf g fällt; legt man durch A die Parallele zu BF und durch F die Parallele zu AE und ist D der Schnittpunkt der zwei Parallelen, so ist CD die Komponente durch C . Dabei besteht die Probe, dass die Verlängerungen von CD und EF sich auf g schneiden. Man bemerkt, dass für die zweite Komponente der Anfangspunkt C der Anfangspunkt A hat (Abb. 2). In diesem Falle zieht man die Gerade g^1 durch den gegebenen Punkt, der jetzt O heissen mag, nach dem Schnittpunkt von g und EF , legt durch F die Parallele FD zu EA und durch F und E die Parallelen FB , EC zu AD . Die gesuchten Komponenten sind AB und CD und es be-

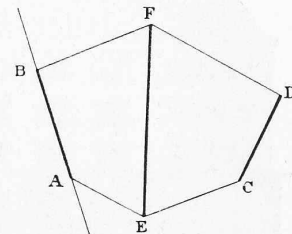


Abb. 1.

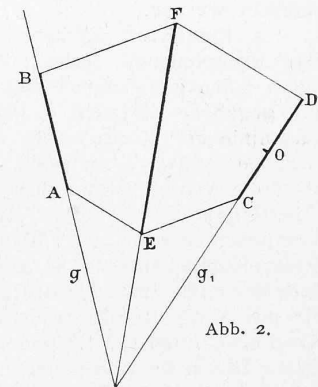
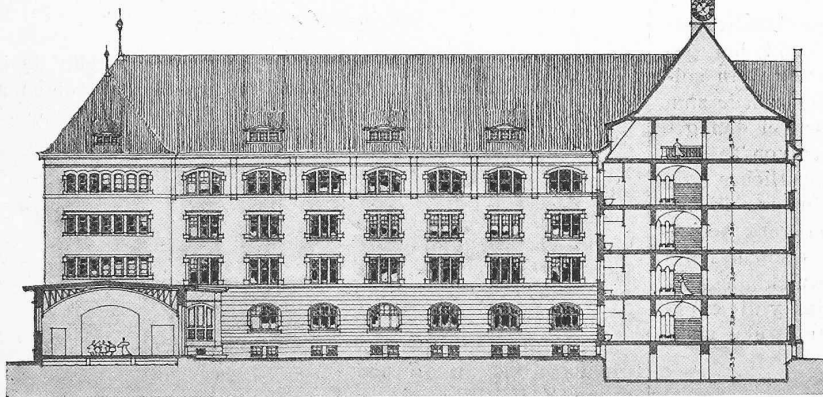


Abb. 2.

steht die Probe, dass BC parallel EA und FD sein muss. Diese Konstruktionen bedürfen keines Beweises, indem sie in der Art der Kräftezusammensetzung begründet sind, die bereits in Nr. 6 des laufenden Bandes der schweiz. Bauzeitung auseinandergesetzt ist.

2. Die Konstruktionen ändern sich nicht, wenn g parallel EF ist, ferner wenn O im Unendlichen liegt. Die Abbildungen zeigen auch die Lösung der Aufgabe, eine Kraft EF im Raum in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine in eine gegebene Ebene fällt und die andere durch einen gegebenen Punkt geht. In Abbildung 1 sind A, B die Schnittpunkte der Ebene mit den Hülllinien FB und EA und in der Abbildung 2 geht g^1 nach dem Schnittpunkt von EF mit der Ebene und es ist darauf zu achten, dass OA die Gerade EF schneidet, d. h. in der durch O und EF bestimmten Ebene liegt.

3. Die Abbildungen 1 und 2 lösen ferner die Aufgabe, wenn zwei Kräfte EF, AB gegeben sind, eine dritte Kraft CD zu konstruieren, sodass EF die Resultierende von AB und CD ist. Verschiebt man dabei EF parallel zu sich selber und lässt die Grösse konstant, so verschiebt sich auch CD parallel und behält die Grösse. Wenn also von EF Grösse und Richtung gegeben sind, so darf man auf



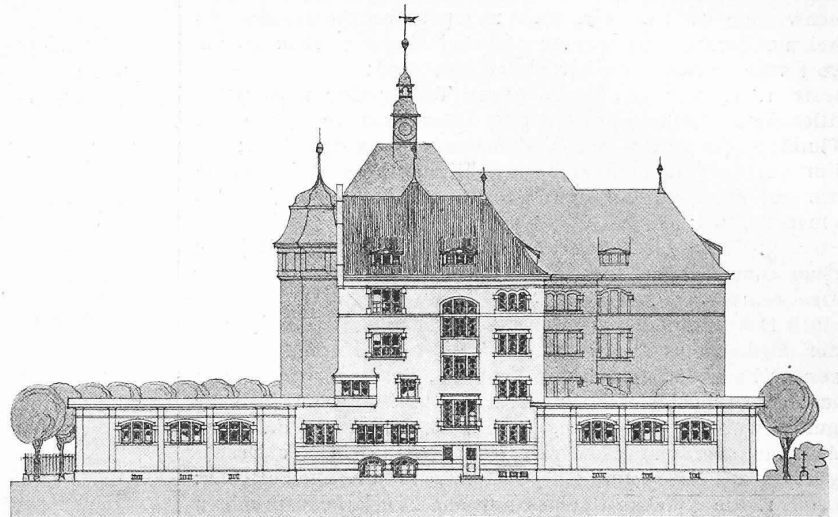
Schnitt durch Turnhalle und Vordergebäude sowie Hoffassade. — Masstab 1 : 600.

CD noch einen Punkt O beliebig wählen und kann dann EF und CD finden. Hievon soll später eine Anwendung gemacht werden.

4. Eine Kraft EF kann auf unendlich viele Arten in drei Komponenten zerlegt werden, von denen die eine durch einen gegebenen Punkt O geht und die zwei andern auf gegebene Geraden g, l fallen. Wählt man die Wirkungslinie der Komponente durch O , so kann man EF in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine auf die gewählte Wirkungslinie fällt und die andere durch den Schnittpunkt von g, l geht; die letztere gibt dann die zwei Komponenten nach g, l . Wählt man umgekehrt die eine dieser Komponenten z. B. K auf g , so sind die beiden andern bestimmt; man konstruiert nach Abschnitt 3 eine Kraft, die mit K die Resultierende EF hat und zerlegt dann die Kraft nach l und O . Es findet also eindeutiges Entsprechen statt. Durch die Komponente auf g ist diejenige auf l eindeutig bestimmt und umgekehrt. Gibt man den Komponenten auf g, l je einen festen Punkt als Anfangspunkt, so müssen daher die Endpunkte projektivische Punktreihen beschreiben; die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden

Wettbewerb für ein Mädchen-Primarschul-Gebäude in St. Gallen.

IV. Preis. Motto: Winkel, Zirkel und Stern (gez.). — Verf.: Arch. H. Weideli in Mannheim.



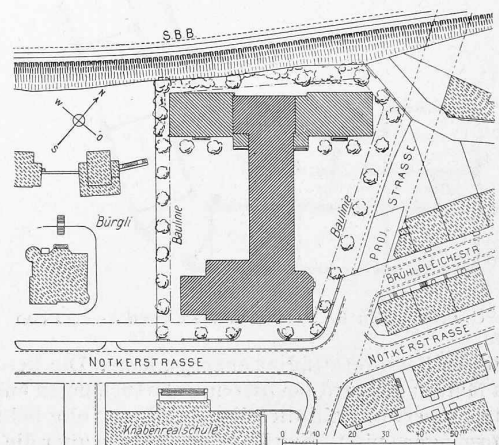
Ansicht von Norden. — Masstab 1 : 600.

Endpunkte umhüllen einen Kegelschnitt und zwar eine Parabel, weil, wenn die eine Komponente unendlich gross wird, auch die andere unendlich wird. Die Berührungspunkte der Parabel mit g, l sind die Endpunkte derjenigen Komponenten, deren entsprechende ihren Endpunkt im Schnittpunkt von g, l haben. Man kann noch fragen, was die Endpunkte der Komponenten durch O für eine Kurve bilden, wenn O als Anfangspunkt gewählt wird. Die Kurve entsteht, wenn man in Abbildung 1, wo der feste Punkt O mit C bezeichnet ist, C, EF festhält, g um den Schnittpunkt mit l , der auf g beliebig angenommen werden darf, dreht, FD parallel CB zieht und C immer mit dem Schnittpunkt von g und EF verbindet; sie ist nämlich das Erzeugnis der beiden perspektivischen Strahlenbüschel mit den Scheiteln C, F , das ist eine Gerade, die parallel zur Verbindungslinie von O mit dem Schnittpunkt von g, l liegt.

5. Aus Abbildung 1 folgt wegen der Gleichheit der Grundlinien und Höhen der bezüglichen Dreiecke

$$\begin{aligned} \triangle CEF &= \triangle CEB; \triangle CBE = \triangle CBA; \\ \text{also } \triangle CEF &= \triangle CAB, \end{aligned}$$

d. h. zerlegt man eine Kraft EF in zwei Komponenten durch einen Punkt und auf eine Gerade, so bildet der Punkt mit der Kraft und mit der Komponente



Lageplan. — Masstab 1 : 2000.

auf der Geraden Dreiecke gleichen Inhalts; das statische Moment der Kraft für den Punkt ist gleich dem Moment der Komponente, $P \cdot x = P' \cdot a$, wenn Kraft und Komponente P, P' und ihre Abstände von dem Punkt x und a heissen. Zerlegt man jede Kraft eines ebenen Kräftesystems in Komponenten durch einen festen Punkt O und auf eine feste Gerade g , so ist die Summe der statischen Momente

für den Punkt $\Sigma Px = a \Sigma P'$. Für $a = 1$ wird also die Summe der Momente durch die Strecke $\Sigma P'$ dargestellt, (Man kann nach Abb. 2 die Konstruktion so einrichten, dass sich die Komponenten P' von selbst summieren, indem man den Endpunkt einer jeden als Anfangspunkt der folgenden wählt; ferner kann man die Komponenten durch O weglassen). Denkt man sich jetzt die Resultierende des Kräftesystems hergestellt, in entgegengesetztem Sinne genommen und ebenfalls in zwei Komponenten durch O und auf g zerlegt, so müssen alle Komponenten im Gleichgewicht sein. Das ist nur möglich, wenn die Komponenten durch O für sich und ebenso die Komponenten auf g im Gleichgewicht sind. Also muss die Komponente der Resultierenden auf g gleich und entgegengesetzt der Summe der andern Komponenten auf g sein, d. h. das Moment der Resultierenden eines ebenen Kräftesystems für einen beliebigen Punkt ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Kräfte.

6. Bringt man jede Kraftkomponente P' auf die Wirkungslinie der Kraft P , aus welcher sie entstanden ist, und zerlegt neuerdings jede Kraft P' in eine Komponente durch O und eine solche auf g , so ist, wenn die letztere P'' heisst $P' \cdot x = P'' \cdot a$.

Nun war $P \cdot x = P' \cdot a$, also durch Multiplikation $P' \cdot P \cdot x^2 = P' \cdot P'' \cdot a^2$. Indem man durch P' dividiert $P \cdot x^2 = P'' \cdot a^2$.

Summiert, da a^2 konstant, $\Sigma(P \cdot x^2) = a^2 \Sigma P''$.

Für $a = 1$ stellt also $\Sigma P''$ die Summe der Momente zweiter Ordnung aller Kräfte P in bezug auf den Punkt O dar. Bei der Konstruktion kann man wieder die Komponenten durch O weglassen. Die Wiederholung des Verfahrens gibt successive die Summe der Momente dritter Ordnung, vierter Ordnung usw.

7. Wenn die Strecken, welche die Kräfte P darstellen, so liegen, dass der Endpunkt einer jeden mit dem Anfangspunkt der folgenden zusammenfällt, und wenn die Strecken ein geschlossenes Polygon bilden, das im übrigen beliebig verläuft, so stellt bekanntlich $\Sigma(Px)$ den doppelten Inhalt des Polygons dar. Derselbe wird also, wenn $a = 1$ ist, durch die Linie $\Sigma P'$ repräsentiert. Die Linien P' stellen die Inhalte der Dreiecke dar, welche der

Punkt O mit den einzelnen Seiten des Polygons bestimmt. Die Richtung jeder Linie P' auf g hängt von dem Vorzeichen des entsprechenden Dreiecksinhaltes ab.

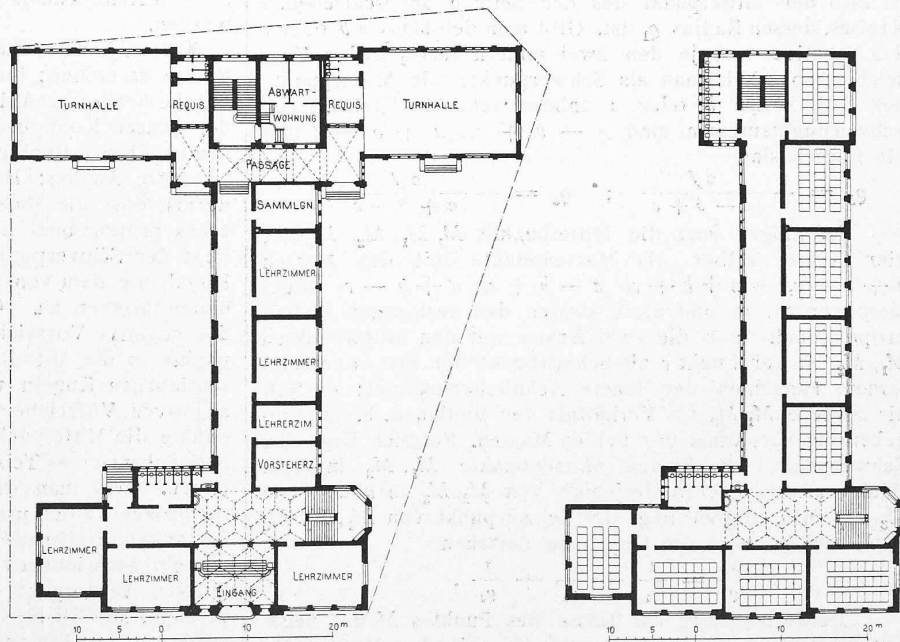
8. Es kann vorkommen, dass von einem ebenen System von Kräften, deren Komponenten durch O und auf g bestimmt sind, die Resultierende anzugeben ist. Anstatt in diesem Falle die Methode des kreuzweise Ziehens von parallelen Hilfsgeraden anzuwenden, vereinigt man die Komponenten durch O und auch diejenigen auf g und bestimmt die Resultierende der zwei so entstandenen Kräfte. Diese Art der Zusammensetzung ist bei einer grossen Anzahl von Kräften und insbesondere wenn die Wirkungslinien der Kräfte zu g parallel sind, geradezu von Vorteil; im letztern Fall braucht man nämlich die Komponenten durch O gar nicht aufzusuchen. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass man die Grössen der Komponenten einer Kraft auf zwei zu ihr parallelen Geraden findet, indem

man durch Anfangs- und Endpunkt der Kraft in beliebiger Richtung parallele Geraden legt und in dem Parallelogramm, das sie mit den ersten zwei Parallelen bestimmen, eine Diagonale zieht; sie teilt die Kraft in zwei Teile, die gleich den Komponenten sind. Ist für Kräfte mit parallelen Wirkungslinien auf einer zu ihnen parallelen Geraden die Kraft $\Sigma P'$ bestimmt, so findet man also die Resultierende der Kräfte

Wettbewerb für ein Mädchen-Primarschul-Gebäude in St. Gallen.
IV. Preis. Motto: Winkel, Zirkel und Stern (gez.). — Verf.: Arch. H. Weideli.



Fassade gegen Süden. — Masstab 1 : 600.



Grundriss vom Erdgeschoss. — Masstab 1 : 800. — Grundriss vom II. Stockwerk.

folgendermassen. Man trägt auf g von dem Anfangspunkt von $\Sigma P'$ aus ΣP ab, verbindet O mit dem gemeinsamen Anfangspunkt und mit dem Endpunkt von ΣP , zieht dann durch den Endpunkt von $\Sigma P'$ die Parallele zur ersten Linie und schneidet mit der zweiten. Der Schnittpunkt ist ein Punkt der gesuchten Resultierenden. Diese Konstruktion

eignet sich namentlich für Schwerpunktsbestimmungen und für Mittelpunktsbestimmungen paralleler Kräfte. Der Mittelpunkt ist bekanntlich der Punkt, um den sich die Wirkungslinie der Resultierenden dreht, wenn die Wirkungslinien der einzelnen Kräfte um feste Punkte derselben gedreht werden, sodass sie nach der Drehung parallel und die Kräfte von gleicher Grösse und relativer Richtung bleiben. Das nähere braucht wohl nicht auseinander gesetzt zu werden.

9. In diesem Abschnitt soll von einer einfachen Schwerpunktsaufgabe die Rede sein, die eine interessante Erweiterung zulässt. Bekanntlich ist der Schwerpunkt von drei Massenpunkten, bei denen die Masse eines jeden zur Verbindungslinie der beiden andern proportional ist, der Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises. Bezeichnet man die Seiten des Dreieckes mit a, b, c , so bedeuten diese Buchstaben die Massen der gegenüberliegenden Punkte und die Masse des Schwerpunktes ist $a + b + c$. (Abb. 3). Ist h die Dreieckshöhe, die zur Seite a gehört und q der Abstand des Schwerpunktes von der Seite a , so muss nach dem Momentensatz sein:

$$(a + b + c) \cdot q = a \cdot h$$

also

$$q = \frac{ah}{a + b + c}$$

Nun ist $a \cdot h$ der doppelte Inhalt des Dreieckes. Setzt man dafür $2J$, so ist

$$q = \frac{2J}{a + b + c};$$

der Schwerpunkt hat denselben Abstand von den zwei andern Dreiecksseiten und ist also der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Nimmt man jetzt an, die Masse des einen Punktes z. B. a habe das negative Vorzeichen, was gut durch die Deutung der Massen als elektrische Mengen erklärt werden kann, so hat der neue Schwerpunkt die Masse $-a + b + c$ und wenn sein Abstand von der Seite a mit q_1 bezeichnet wird, ist

$$(-a + b + c) \cdot q_1 = -a \cdot h$$

$$q_1 = \frac{-a \cdot h}{-a + b + c} = -\frac{2J}{-a + b + c}$$

Denselben Abstand, abgesehen vom Vorzeichen, hat der Punkt von den zwei andern Seiten des Dreieckes; er ist also der Mittelpunkt des der Seite a anbeschriebenen Kreises, dessen Radius q_1 ist. Gibt man den Massen b oder c das negative und je den zwei andern das positive Vorzeichen, so erhält man als Schwerpunkte die Mittelpunkte der den Seiten b oder c anbeschriebenen Kreise. Die Schwerpunktsmassen sind $a - b + c$, $a + b - c$ und die Radien sind

$$q_2 = -\frac{2J}{a - b + c}; \quad q_3 = -\frac{2J}{a + b - c}$$

Es mögen jetzt die Mittelpunkte M, M_1, M_2, M_3 der vier Kreise selber als Massenpunkte mit den Massen $a + b + c, -a + b + c, a - b + c, a + b - c$ aufgefasst werden, so sind diese Massen den reziproken Radien proportional. Für die zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 ist der Punkt c als Schnittpunkt der inneren gemeinsamen Tangenten der innere Aehnlichkeitspunkt; er teilt die Strecke $M_1 M_2$ im Verhältnis der Radien d. h. im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen. Folglich liegt der Schwerpunkt der beiden Massenpunkte M_1, M_2 in dem Punkte c und ebenso derjenige von M_2, M_3 in a und von M_3, M_1 in b . Daher liegt der Schwerpunkt von M_1, M_2, M_3 in M und es muss die Gleichung bestehen

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$$

Denkt man sich der Masse des Punktes M das negative Vorzeichen gegeben, so ist sie mit den Massen der Punkte M_1, M_2, M_3 im Gleichgewicht und es muss daher der Schwerpunkt von irgend drei der vier Massenpunkte in den vierten Punkt hineinfallen und der Schwerpunkt von $-M$ und irgend eines der drei andern fällt in diejenige Ecke des Dreieckes, die mit den zwei Punkten auf einer Geraden liegt.

Zur Darstellung der Massen der Punkte kann man die Kreise selber verwenden und z. B. annehmen, die Kreis-

linien seien elektrisch geladen und die Grössen der Ladungen den reziproken Umfängen proportional. Man kann dann vom Schwerekreis von Kreisen reden und erhält eine Mechanik der Kreise. Das Zentrum des Schwerekreises der beiden Kreise M_1, M_2 ist, wenn die Ladungen gleiches Vorzeichen haben, der innere Aehnlichkeitspunkt c . Setzt man den Radius gleich x so ist

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

und für die Dreiecksseite c , welche beide Kreise berührt nach dem Momentensatz

$$\frac{1}{x} \cdot h_c = \frac{1}{q_1} \cdot q_1 + \frac{1}{q_2} \cdot q_2 \quad \text{also}$$

$$2x = \frac{2q_1 q_2}{q_1 + q_2} = h_c$$

Ueber Kräftezerlegung.

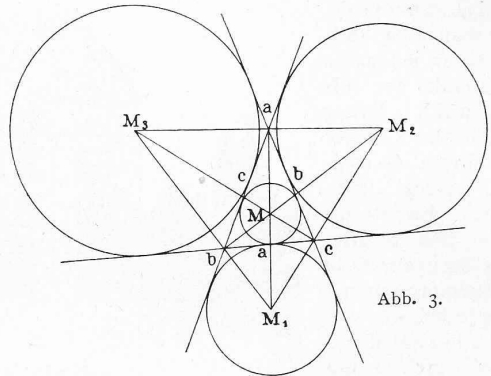


Abb. 3.

Der Durchmesser des Schwerekreises ist das harmonische Mittel aus den beiden Kreisradien und gleich dem Lot vom innern Aehnlichkeitspunkt auf eine äussere gemeinsame Tangente der zwei Kreise. Der Schwerekreis ist auch dann reell, wenn einer der zwei Kreise den andern einschliesst; legt man den konzentrischen Kreis von doppeltem Radius, so hat er mit jedem der zwei Kreise den gleichen äussern Aehnlichkeitspunkt und kann daher leicht gefunden werden.

Man könnte auch die gegebenen Massenpunkte durch Kreise darstellen; ihre Radien müssten gleich den Höhen des Dreieckes gewählt werden. Eine Verallgemeinerung der ganzen Konfiguration von Kreisen tritt ein, wenn man den gegebenen Punkten Massen von beliebiger Grösse beilegt.

10. Analog: Hat man im Raum vier Massenpunkte derart, dass die Masse eines jeden der Fläche des Dreieckes proportional ist, welches die drei andern bilden, so liegt der Schwerpunkt der vier Punkte im Mittelpunkt der Kugel, die dem von den vier Punkten gebildeten Tetraeder eingeschrieben ist. Gibt man der Masse je eines der Punkte das negative Vorzeichen, so fallen die bezüglichen Schwerpunkte in die Mittelpunkte der vier dem Tetraeder anbeschriebenen Kugeln und werden je zwei Massen mit dem negativen Vorzeichen versehen, so erscheinen als Schwerpunkte die Mittelpunkte der drei Kugeln, die ebenfalls alle Seitenebenen des Tetraeders berühren und über den Kanten liegen. Legt man den Mittelpunkten Massen bei, die den reziproken Radien proportional sind, so fällt für die Zentren der anbeschriebenen Kugeln der Schwerpunkt in das Zentrum der eingeschriebenen Kugel und wenn man die Masse des letztern verdoppelt und mit dem negativen Vorzeichen versieht, so fällt für ihn und je drei der Zentren der Schwerpunkt in das Zentrum der vierten anbeschriebenen Kugel. Für die Zentren von irgend zwei anbeschriebenen Kugeln und das Zentrum der Kugel über der Gegenkante zur Schnittlinie der im Innern berührten Seitenflächen kommt der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel und dahin fällt er auch, wenn die Masse des Zentrums der gleichen Kantenkugel negativ gewählt und die Zentren der zwei andern anbeschriebenen Kugeln genommen werden.